cálculo

TRADUÇÃO DA 6ª EDIÇÃO NORTE-AMERICANA

POSSUI MATERIAL DE APOIO
(para professores que comprovadamente adotam a obra)

VOLUME 1

JAMES STEWART

CÁLCULO

VOLUME I

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James
Cálculo : volume 1 / James Stewart ; tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins ; revisão técnica Helena Castro. -- São Paulo : Cengage Learning, 2009.

Título original: Calculus. 6. ed. americana.
Bibliografia
ISBN 978-85-221-0968-5

1. Cálculo 2. Cálculo - Problemas, exercícios etc. I. Título.

09-04388 CDD-515
515.076

Índices para catálogo sistemático:

1. Cálculo : Matemática 515
2. Exercícios : Cálculo : Matemática 515.076
3. Problemas : Cálculo : Matemática 515.076

CÁLCULO

VOLUME I

Tradução da 6ª edição norte-americana

JAMES STEWART

MCMASTER UNIVERSITY

Tradução Técnica

ANTONIO CARLOS MORETTI

Doutor em Engenharia Industrial pelo Georgia Institute of Technology e Professor Livre-Docente do Imeec – Unicamp

ANTONIO CARLOS GILLI MARTINS

Doutor em Matemática pela Unicamp e Professor Doutor do Imeec – Unicamp

Revisão Técnica

HELENA CASTRO

Professora Doutora do IME-USP

Austrália • Brasil • Japão • Coreia • México • Cingapura • Espanha• Reino Unido • Estados Unidos

PREFÁCIO

Esta versão da 6ª edição de *Cálculo* utiliza em todos os exemplos e exercícios o Sistema Internacional de Unidades (SI). Em algumas exceções, porém, as unidades originais foram mantidas: para algumas aplicações em engenharia (principalmente na Seção 8.3), acredito ser do interesse de alguns engenheiros familiarizarem-se com as unidades empregadas nos EUA. Também foram mantidas as unidades em exercícios específicos nos quais o uso de outro sistema de medidas não faria sentido (por exemplo, os que tratam de beisebol).

Procurei tornar mais internacional a natureza dos exercícios e exemplos que envolvessem dados do mundo real, de forma que agora, em grande parte, os dados se referem a outros países, que não os Estados Unidos. Os exemplos e exercícios tratam da tarifa postal de Hong Kong; da dívida pública canadense; dos índices de desemprego na Austrália; da incidência de luz solar em Ancara, na Turquia; de isotermas da China; do percentual da população rural na Argentina; das populações da Malásia, Indonésia, México e Índia; do consumo de energia elétrica em Ontário, entre muitos outros.

Além de adaptar alguns exercícios para o sistema internacional de unidades e internacionalizar os dados, alguns outros exercícios também foram alterados, de forma que cerca de 10% dos exercícios diferem da versão original.

FILOSOFIA DO LIVRO

A arte de ensinar, diz Mark van Doren, é a arte de propiciar o descobrimento. Tentei escrever um livro que auxiliasse o estudante em sua descoberta do cálculo – tanto pela utilidade prática da disciplina quanto por sua surpreendente beleza. Nesta edição, bem como nas cinco anteriores, meu objetivo foi mostrar ao estudante a utilidade do cálculo e desenvolver competência técnica, mas ao mesmo tempo desejei transmitir a beleza intrínseca à matéria. Não há dúvida que Newton teve uma enorme sensação de triunfo quando realizou suas maiores descobertas, e minha intenção é que os estudantes partilhem um pouco deste sentimento.

A ênfase aqui é na compreensão de conceitos. Creio que quase todos concordam que este deve ser o objetivo principal do ensino do cálculo. Na verdade, o ímpeto que norteia o atual movimento de reforma no ensino do cálculo vem da Conferência de Tulane de 1986, que teve como principal recomendação:

Concentrar-se na compreensão de conceitos.

Tentei atingir este objetivo por meio da chamada *Regra dos Três*: "Os tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente". A visualização e as experiências numéricas e gráficas, entre outras ferramentas, alteraram fundamentalmente a forma como ensinamos os raciocínios conceituais. Mais recentemente, a *Regra dos Três* expandiu-se em uma *Regra dos Quatro*, valorizando também o ponto de vista verbal (ou descritivo).

Na redação desta 6ª edição, parti da premissa de que é possível almejar à compreensão dos conceitos e ao mesmo tempo conservar as melhores tradições do cálculo convencional. Este livro possui elementos de reforma, mas dentro do contexto do currículo tradicional.

O QUE HÁ DE NOVO NA 6ª EDIÇÃO?

Estas são algumas das alterações nesta 6ª edição de *Cálculo*:

- No início do livro, foram incluídos quatro testes de verificação: Álgebra Básica, Geometria Analítica, Funções e Trigonometria. São fornecidas as respostas, e os estudantes que não tiverem bom desempenho são encaminhados aos locais em que podem encontrar a ajuda necessária (nos Apêndices e nas seções de revisão do Capítulo 1).
- Atendendo aos pedidos de diversos leitores, o material de preparação para o conceito de derivada foi condensado: as Seções 2.7 e 2.8 foram combinadas em uma única seção intitulada "Derivadas e Taxas de Variação".
- A seção "Derivadas de Ordem Superior", no Capítulo 3, foi eliminada, e seu conteúdo distribuído em diversas seções dos Capítulos 2 e 3.
- Alguns docentes cujos cursos não chegavam ao capítulo de equações diferenciais afirmavam ser inadequado que a seção sobre Crescimento e Decaimento Exponencial estivesse colocada ali. Por essa razão, esta parte foi deslocada para o Capítulo 3, mais próximo do início do livro, o que causou a reorganização do Capítulo 3.
- As Seções 4.7 e 4.8 foram combinadas em uma única seção, tratando mais sucintamente dos problemas de otimização em economia e negócios.
- Foram reformuladas ou incluídas algumas frases e observações para tornar o texto mais elucidativo.
- Algumas ilustrações foram redesenhadas.
- Os dados de alguns exemplos e exercícios foram atualizados e modernizados.
- Inúmeros exemplos foram incluídos ou alterados, como o Exemplo 2, da p. 170, que foi alterado, pois muitos estudantes ficam confusos ao encontrar constantes arbitrárias em um problema, e eu quis incluir um caso no qual elas aparecem.
- Foram acrescentados alguns passos na resolução de certos problemas.
- Mais de 25% dos exercícios são novos. Alguns de meus favoritos: 3.1.79, 3.1.80, 4.3.62, 4.3.83.
- Existem também alguns interessantes problemas novos nas Seções "Problemas Quentes". Ver, por exemplo, os Problemas 2 e 13 na p. 388, o Problema 13, da p. 425.
- O novo projeto da p. 520, *Xícaras de Café Complementares*, vem de um artigo de Thomas Banchoff no qual ele se indaga sobre qual de duas xícaras de café, que se encaixam perfeitamente por suas formas convexa e côncava, comportaria mais café.

CARACTERÍSTICAS

EXERCÍCIOS CONCEITUAIS

A melhor maneira de treinar a compreensão dos conceitos é resolvendo os problemas sugeridos. Com esta finalidade, desenvolvi diversos tipos de exercício. Em alguns, é exigida a explicação dos conceitos fundamentais da seção (ver, por exemplo, os primeiros exercícios das Seções 2.2 e 2.5). Da mesma forma, as seções de revisão começam com uma *Verificação de Conceitos* e *Testes Verdadeiro-Falso*. Outros exercícios verificam a compreensão dos conceitos mediante o uso de gráficos e tabelas (como nos Exercícios 2.7.17, 2.8.33-38, 2.8.41-44).

Outra modalidade de exercícios parte da descrição verbal para verificar o entendimento dos conceitos (ver Exercícios 2.5.8, 2.8.56, 4.3.63-64 e 7.8.67). Particularmente, valorizo problemas que combinam e confrontam processos gráficos, numéricos e algébricos (ver Exercícios 2.6.37-38 e 3.7.25).

EXERCÍCIOS COM DIFICULDADE PROGRESSIVA

Cada grupo de exercícios progride em complexidade, partindo da verificação de conceitos básicos e problemas para treinar técnicas, até problemas mais desafiadores envolvendo demonstrações e aplicações.

DADOS REAIS

Eu e minha equipe nos empenhamos em pesquisar dados do mundo real em bibliotecas, empresas, agências governamentais e na Internet que pudessem apresentar e ilustrar os conceitos de cálculo. Por este motivo, muitos exercícios e exemplos lidam com funções definidas por tais dados numéricos ou gráficos. Eles podem ser vistos, por exemplo, na Figura 1 na Seção 1.1 (os sismogramas do terremoto de Northridge), ou no Exercício 2.8.34 (percentual de menores de 18 anos na população), Exercício 5.1.14 (velocidade do ônibus espacial *Endeavour*) ou a Figura 4 da Seção 5.4 (consumo de energia elétrica em Ontário).

PROJETOS

Uma maneira de despertar o interesse dos alunos – e facilitar a aprendizagem – é fazer com que trabalhem (às vezes em grupos) em projetos mais aprofundados, que transmitam um verdadeiro sentimento de realização quando completados. Incluí quatro tipos de projetos: os *Projetos Aplicados* são aplicações que visam despertar a imaginação dos estudantes; os *Projetos de Laboratório* envolvem tecnologia; os *Projetos Escritos* exigem que os alunos comparem os métodos atuais àqueles desenvolvidos pelos fundadores do cálculo – por exemplo, o método criado por Fermat para encontrar as tangentes. Neles, também são oferecidas sugestões de bibliografia. Os *Projetos de Descoberta* incentivam a descoberta por meio da percepção de padrões (como após a Seção 7.6) ou antecipam questões a serem aprofundadas posteriormente.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os alunos normalmente têm mais dificuldades naqueles problemas em que não há um único procedimento bem definido para chegar à solução. Acredito que não ocorreram muitos avanços na área de resolução de problemas após a estratégia em quatro estágios propostos por George Polya. Inseri, portanto, uma versão desta estratégia após o Capítulo 1. Este método é utilizado explícita e implicitamente em todo o livro. Depois dos demais capítulos, incluí seções denominadas *Problemas Quentes*, apresentando exemplos de como lidar com problemas de cálculo mais desafiadores. Ao selecionar os diversos problemas nestas seções, tentei seguir este conselho, dado por David Hilbert: “Um problema matemático deve ser difícil a ponto de nos desafiar, mas não inacessível a ponto de zombar de nossos esforços”. Ao propor problemas difíceis em tarefas e provas, costumo corrigi-los de forma diferenciada: neles, procuro valorizar principalmente as ideias que levam à resposta e a aplicação dos princípios de resolução de problemas mais relevantes.

TECNOLOGIA

A disponibilidade de tecnologia não diminui – pelo contrário, aumenta – a importância de se entender com clareza os conceitos por trás das imagens na tela. Quando utilizados apropriadamente, computadores e calculadoras gráficas são ferramentas úteis na descoberta e compreensão de tais conceitos. Este livro pode ser utilizado com ou sem o emprego de ferramentas tecnológicas – dois símbolos especiais são usados para indicar precisamente quando um tipo especial de aparelho é necessário. O símbolo indica um exercício que definitivamente requer o uso dessas tecnologias (o que não quer dizer que seu uso nos demais exercícios seja proibido). O símbolo SCA aparece em problemas nos quais são empregados todos os recursos de um sistema de computação algébrica (como o Derive, Maple, Mathematica ou o TI-89/92). Mas a tecnologia não torna lápis e papel obsoletos. Frequentemente, são preferíveis os cálculos e esboços feitos à mão, ao se tentar ilustrar e reforçar algum conceito. Tanto professores quanto estudantes precisam aprender a discernir quando é mais adequado o uso das máquinas ou o cálculo à mão.

No site da Cengage (www.cengage.com.br) há material de apoio com slides, uma importante ferramenta no dia a dia do aprendizado. O material de apoio é uma cortesia para professores que adotam a obra e a indicam na ementa do curso

CONTEÚDO – VOLUME I

TESTES DE VERIFICAÇÃO — O livro começa com quatro testes de verificação: Álgebra Básica, Geometria Analítica, Funções e Trigonometria.

UMA APRESENTAÇÃO DO CÁLCULO — Temos aqui um panorama da matéria, incluindo uma série de questões para nortear o estudo do cálculo.

1 ■ FUNÇÕES E MODELOS — Desde o princípio, a multiplicidade de representação das funções é valorizada: verbal, numérica, visual e algébrica. A discussão dos modelos matemáticos conduz a uma revisão das funções gerais, incluindo as funções exponenciais e logarítmicas, por meio desses quatro pontos de vista.

2 ■ LIMITES E DERIVADAS — O material sobre limites decorre da discussão prévia sobre tangentes e problemas de velocidade. Os limites são tratados dos pontos de vista descritivo, gráfico, numérico e algébrico. A Seção 2.4, sobre a definição precisa de limite por meio de ε-δ, é opcional. As Seções 2.7 e 2.8 tratam das derivadas (principalmente com funções definidas gráfica e numericamente) antes da introdução das regras de derivação (que serão discutidas no Capítulo 3). Aqui, os exemplos e exercícios exploram o significado das derivadas em vários contextos. As derivadas de ordem superior são apresentadas na Seção 2.8.

3 ■ REGRAS DE DERIVAÇÃO — Todas as funções básicas, incluindo as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas inversas são derivadas aqui. Quando as derivadas são calculadas em situações aplicadas, é solicitado que o aluno explique seu significado. Nesta edição, o crescimento e decaimento exponencial são tratados neste capítulo.

4 ■ APLICAÇÕES DA DERIVAÇÃO — Os fatos básicos referentes aos valores extremos e formas das curvas são deduzidos do Teorema do Valor Médio. O uso de tecnologias gráficas ressalta a interação entre o cálculo e as calculadoras, e a análise das famílias de curvas. São apresentados alguns problemas de otimização, incluindo uma explicação de por que precisamos elevar nossa cabeça a 42º para ver o topo de um arco-íris.

5 ■ INTEGRAIS — Problemas de área e distância servem para apresentar a integral definida, introduzindo a notação sigma quando necessária (esta notação é estudada de forma mais completa no Apêndice E). É dada ênfase à explicação do significado das integrais em diversos contextos e à obtenção de estimativas para seus valores a partir de tabelas e gráficos.

6 ■ APLICAÇÕES DE INTEGRAÇÃO — Aqui, são apresentadas algumas aplicações de integração – área, volume, trabalho, valor médio – que podem ser feitas sem o uso de técnicas avançadas. É dada ênfase aos métodos gerais. O objetivo é que os alunos consigam dividir uma dada quantidade em partes menores, estimar usando somas de Riemann, e que sejam capazes de reconhecer o limite como uma integral.

7 ■ TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO — Todos os métodos tradicionais são mencionados, mas é claro que o verdadeiro desafio é perceber qual técnica é mais adequada a cada situação. Por esse motivo, na Seção 7.5, temos uma estratégia para calcular integrais. O uso de sistemas de computação algébrica é discutido na Seção 7.6.

8 ■ MAIS APLICAÇÕES DE INTEGRAÇÃO — Aqui estão as aplicações de integração para as quais é útil dispor de todas as técnicas de integração – área de superfície e comprimento do arco – bem como outras aplicações à biologia, economia e física (força hidrostática e centros de massa). Também foi incluída uma seção tratando de probabilidades. Há mais aplicações do que se pode estudar em qualquer curso, assim o professor deve selecionar aquelas que julgue mais interessantes ou adequadas a seus alunos.

AGRADECIMENTOS

A preparação desta edição envolveu muito tempo e contou com a leitura de muitos revisores. Eu agradeço imensamente o tempo despendido para compreender a motivação da minha abordagem para este livro.

Aprendi algo com cada um deles.

REVISORES DA SEXTA EDIÇÃO

Marilyn Belkin, *Villanova University*
Philip L. Bowers, *Florida State University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
M. Hilary Davies, *University of Alaska Anchorage*
Frederick Gass, *Miami University*
Paul Triantafilos Hadavas, *Armstrong Atlantic State University*
Nets Katz, *Indiana University Bloomington*
James McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*
Martin Nakashima, *California State Polytechnic University, Pomona*
Lila Roberts, *Georgia College and State University*

REVISORES DE TECNOLOGIA

Maria Andersen, *Muskegon Community College*
Eric Aurand, *Eastfield College*
Joy Becker, *University of Wisconsin-Stout*
Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
Monica Brown, *University of Missouri-St. Louis*
Roxanne Byrne, *University of Colorado at Denver and Health Sciences Center*
Teri Christiansen, *University of Missouri-Columbia*
Bobby Dale Daniel, *Lamar University*
Jennifer Daniel, *Lamar University*
Andras Domokos, *California State University, Sacramento*
Timothy Flaherty, *Carnegie Mellon University*
Lee Gibson, *University of Louisville*
Jane Golden, *Hillsborough Community College*
Semion Gutman, *University of Oklahoma*
Diane Hoffoss, *University of San Diego*
Lorraine Hughes, *Mississippi State University*
Jay Jahangiri, *Kent State University*
John Jernigan, *Community College of Philadelphia*
Brian Karasek, *South Mountain Community College*
Jason Kozinski, *University of Florida*
Carole Krueger, *The University of Texas at Arlington*
Ken Kubota, *University of Kentucky*
John Mitchell, *Clark College*
Donald Paul, *Tulsa Community College*
Chad Pierson, *University of Minnesota, Duluth*
Lanita Presson, *University of Alabama in Huntsville*
Karin Reinhold, *State University of New York at Albany*
Thomas Riedel, *University of Louisville*
Christopher Schroeder, *Morehead State University*
Angela Sharp, *University of Minnesota, Duluth*
Patricia Shaw, *Mississippi State University*
Carl Spitznagel, *John Carroll University*
Mohammad Tabanjeh, *Virginia State University*
Capt. Koichi Takagi, *United States Naval Academy*
Lorna TenEyck, *Chemeketa Community College*
Roger Werbylo, *Pima Community College*
David Williams, *Clayton State University*
Zhuan Ye, *Northern Illinois University*

REVISORES DA EDIÇÃO ANTERIOR

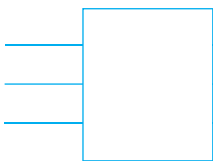
B. D. Aggarwala, *University of Calgary*
John Alberghini, *Manchester Community College*
Michael Albert, *Carnegie-Mellon University*
Daniel Anderson, *University of Iowa*
Donna J. Bailey, *Northeast Missouri State University*
Wayne Barber, *Chemeketa Community College*
Neil Berger, *University of Illinois, Chicago*
David Berman, *University of New Orleans*
Richard Biggs, *University of Western Ontario*
Robert Blumenthal, *Oglethorpe University*
Martina Bode, *Northwestern University*
Barbara Bohannon, *Hofstra University*
Philip L. Bowers, *Florida State University*
Jay Bourland, *Colorado State University*
Stephen W. Brady, *Wichita State University*
Michael Breen, *Tennessee Technological University*
Robert N. Bryan, *University of Western Ontario*
David Buchthal, *University of Akron*

Jorge Cassio, *Miami-Dade Community College*
Jack Ceder, *University of California, Santa Barbara*
Scott Chapman, *Trinity University*
James Choike, *Oklahoma State University*
Barbara Cortzen, *DePaul University*
Carl Cowen, *Purdue University*
Philip S. Crooke, *Vanderbilt University*
Charles N. Curtis, *Missouri Southern State College*
Daniel Cyphert, *Armstrong State College*
Robert Dahlin
Gregory J. Davis, *University of Wisconsin-Green Bay*
Elias Deeba, *University of Houston-Downtown*
Daniel DiMaria, *Suffolk Community College*
Seymour Ditor, *University of Western Ontario*
Greg Dresden, *Washington and Lee University*
Daniel Drucker, *Wayne State University*
Kenn Dunn, *Dalhousie University*
Dennis Dunninger, *Michigan State University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
David Ellis, *San Francisco State University*
John Ellison, *Grove City College*
Martin Erickson, *Truman State University*
Garret Etgen, *University of Houston*
Theodore G. Faticoni, *Fordham University*
Laurene V. Fausett, *Georgia Southern University*
Norman Feldman, *Sonoma State University*
Newman Fisher, *San Francisco State University*
José D. Flores, *The University of South Dakota*
William Francis, *Michigan Technological University*
James T. Franklin, *Valencia Community College, East*
Stanley Friedlander, *Bronx Community College*
Patrick Gallagher, *Columbia University-New York*
Paul Garrett, *University of Minnesota-Minneapolis*
Frederick Gass, *Miami University of Ohio*
Bruce Gilligan, *University of Regina*
Matthias K. Gobbert, *University of Maryland, Baltimore County*
Gerald Goff, *Oklahoma State University*
Stuart Goldenberg, *California Polytechnic State University*
John A. Graham, *Buckingham Browne & Nichols School*
Richard Grassl, *University of New Mexico*
Michael Gregory, *University of North Dakota*
Charles Groetsch, *University of Cincinnati*
Salim M. Haïdar, *Grand Valley State University*
D. W. Hall, *Michigan State University*
Robert L. Hall, *University of Wisconsin-Milwaukee*
Howard B. Hamilton, *California State University, Sacramento*
Darel Hardy, *Colorado State University*
Gary W. Harrison, *College of Charleston*
Melvin Hausner, *New York University/Courant Institute*
Curtis Herink, *Mercer University*
Russell Herman, *University of North Carolina at Wilmington*
Allen Hesse, *Rochester Community College*
Randall R. Holmes, *Auburn University*
James F. Hurley, *University of Connecticut*
Matthew A. Isom, *Arizona State University*
Gerald Janusz, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
John H. Jenkins, *Embry-Riddle Aeronautical University, Prescott Campus*
Clement Jeske, *University of Wisconsin, Platteville*
Carl Jockusch, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
Jan E. H. Johansson, *University of Vermont*
Jerry Johnson, *Oklahoma State University*
Zsuzsanna M. Kadas, *St. Michael's College*
Matt Kaufman
Matthias Kawski, *Arizona State University*
Frederick W. Keene, *Pasadena City College*
Robert L. Kelley, *University of Miami*
Virgil Kowalik, *Texas A&I University*
Kevin Kreider, *University of Akron*
Leonard Krop, *DePaul University*
Mark Krusemeyer, *Carleton College*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Christopher C. Leary, *State University of New York at Geneseo*
David Leeming, *University of Victoria*
Sam Lesseig, *Northeast Missouri State University*
Phil Locke, *University of Maine*
Joan McCarter, *Arizona State University*
Phil McCartney, *Northern Kentucky University*
Igor Malyshev, *San Jose State University*
Larry Mansfield, *Queens College*
Mary Martin, *Colgate University*
Nathaniel F. G. Martin, *University of Virginia*
Gerald Y. Matsumoto, *American River College*
Tom Metzger, *University of Pittsburgh*
Michael Montaño, *Riverside Community College*
Teri Jo Murphy, *University of Oklahoma*
Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
Hussain S. Nur, *California State University, Fresno*
Wayne N. Palmer, *Utica College*
Vincent Panico, *University of the Pacific*
F. J. Papp, *University of Michigan-Dearborn*
Mike Penna, *Indiana University-Purdue University Indianapolis*
Mark Pinsky, *Northwestern University*
Lothar Redlin, *The Pennsylvania State University*
Joel W. Robbin, *University of Wisconsin-Madison*
E. Arthur Robinson, Jr., *The George Washington University*
Richard Rockwell, *Pacific Union College*
Rob Root, *Lafayette College*
Richard Ruedemann, *Arizona State University*
David Ryeburn, *Simon Fraser University*

Richard St. Andre, *Central Michigan University*
Ricardo Salinas, *San Antonio College*
Robert Schmidt, *South Dakota State University*
Eric Schreiner, *Western Michigan University*
Mihr J. Shah, *Kent State University-Trumbull*
Theodore Shifrin, *University of Georgia*
Wayne Skrapek, *University of Saskatchewan*
Larry Small, *Los Angeles Pierce College*
Teresa Morgan Smith, *Blinn College*
William Smith, *University of North Carolina*
Donald W. Solomon, *University of Wisconsin-Milwaukee*
Edward Spitznagel, *Washington University*
Joseph Stampfli, *Indiana University*
Kristin Stoley, *Blinn College*
M. B. Tavakoli, *Chaffey College*
Paul Xavier Uhlig, *St. Mary's University, San Antonio*
Stan Ver Nooy, *University of Oregon*
Andrei Verona, *California State University-Los Angeles*
Russell C. Walker, *Carnegie Mellon University*
William L. Walton, *McCallie School*
Jack Weiner, *University of Guelph*
Alan Weinstein, *University of California, Berkeley*
Theodore W. Wilcox, *Rochester Institute of Technology*
Steven Willard, *University of Alberta*
Robert Wilson, *University of Wisconsin-Madison*
Jerome Wolbert, *University of Michigan-Ann Arbor*
Dennis H. Wortman, *University of Massachusetts, Boston*
Mary Wright, *Southern Illinois University-Carbondale*
Paul M. Wright, *Austin Community College*
Xian Wu, *University of South Carolina*

COLABORADORES DA 6ª EDIÇÃO BRASILEIRA

Professores da Universidade de Caxias do Sul

Adalberto Ayjara Dornelles Filho
Adriana Miorelli Adami
Adriana Speggiorin Verza
Daiane Scopel Boff
Eliana Maria do Sacramento Soares
Helena Maria Ludke
Isolda Giani de Lima
Juliana Dotto
Kelen Berra de Mello
Laurete Zanol Sauer
Luciana Muler Somavilla
Magda Mantovani Lorandi
Marilia Schmidt de Azambuja
Mauren Turra Pize
Monica Scotti
Raquel Milani
Rejane Pergher
Solange Galiotto Sartor
Valdecir Bottega
Vania Maria Pinheiro Slaviero

AO ALUNO

A leitura de um livro-texto de cálculo difere da leitura de um jornal ou de um romance, ou mesmo de um livro de física. Não desanime se precisar ler o mesmo trecho muitas vezes antes de entendê-lo. E, durante a leitura, você deve sempre ter lápis, papel e calculadora à mão, para fazer contas e desenhar diagramas.

Alguns estudantes preferem partir diretamente para os exercícios passados como dever de casa, consultando o texto somente ao topar com alguma dificuldade. Acredito que ler e compreender toda a seção antes de lidar com os exercícios é muito mais interessante. Você deve prestar especial atenção às definições e compreender o significado exato dos termos. E, antes de ler cada exemplo, sugiro que você cubra a solução e tente resolvê-lo sozinho. Assim, será muito mais proveitoso quando você observar a resolução.

Parte do objetivo deste curso é treiná-lo a pensar logicamente. Procure escrever os estágios da resolução de forma articulada, passo a passo, com frases explicativas – e não somente uma série de equações e fórmulas desconexas.

As respostas da maioria dos exercícios ímpares são dadas ao final do livro, no Apêndice I. Alguns exercícios pedem explicações, interpretações ou descrições por extenso. Em tais casos, não há uma forma única de escrever a resposta, então não se preocupe se a sua ficou muito diferente. Da mesma forma, também há mais de uma maneira de expressar uma resposta algébrica ou numérica. Assim, se a sua resposta diferir daquela que consta no livro, não assuma imediatamente que a sua está errada. Por exemplo, se você chegou em $\sqrt{2} - 1$ e a resposta impressa é $1/(1 + \sqrt{2})$, você está certo, e a racionalização do denominador mostrará que ambas são equivalentes.

O símbolo indica que o exercício exige o uso de uma calculadora gráfica ou um computador com software adequado (na Seção 1.4, discutimos o uso desses dispositivos e algumas das armadilhas que você pode encontrar). Mas isso não significa que você não pode utilizar esses equipamentos para verificar seus resultados nos demais exercícios. O símbolo SCA é utilizado nos exercícios em que são necessários todos os recursos de um sistema de computação algébrica (como o Derive, Maple, Mathematica ou o TI-89/92).

Outro símbolo com o qual você vai deparar é o ⊘, que o alerta para um erro comum. O símbolo registra as situações em que percebi que uma boa parte dos alunos tende a cometer o mesmo erro.

O cálculo é uma matéria fascinante e, com justiça, é considerado uma das maiores realizações da inteligência humana. Espero que você descubra não apenas o quanto esta disciplina é útil, mas também o quão intrinsecamente bela ela é.

JAMES STEWART

SUMÁRIO

3 REGRAS DE DERIVAÇÃO 158

4 APLICAÇÕES DA DERIVAÇÃO 252

8 MAIS APLICAÇÕES DE INTEGRAÇÃO 496

APÊNDICES

ÍNDICE REMISSIVO A97

VOLUME II

TESTES DE VERIFICAÇÃO

O sucesso no cálculo depende em grande parte do conhecimento da matemática que precede o cálculo: álgebra, geometria analítica, funções e trigonometria. Os testes a seguir têm a intenção de diagnosticar falhas que você possa ter nessas áreas. Depois de fazer cada teste, é possível conferir suas respostas com as respostas dadas e, se necessário, refrescar sua memória consultando o material de revisão fornecido.

A TESTES DE VERIFICAÇÃO: ÁLGEBRA

1. Calcule cada expressão sem usar uma calculadora.

(a) $(-3)^4$ (b) -3^4 (c) 3^{-4}

(d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ (e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ (f) $16^{-3/4}$

2. Simplifique cada expressão. Escreva suas respostas sem expoentes negativos.

(a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$

(b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$

(c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$

3. Expanda e simplifique.

(a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ (b) $(x + 3)(4x - 5)$

(c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (d) $(2x + 3)^2$

(e) $(x + 2)^3$

4. Fatore cada expressão.

(a) $4x^2 - 25$ (b) $2x^2 + 5x - 12$

(c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ (d) $x^4 + 27x$

(e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ (f) $x^3y - 4xy$

5. Simplifique as expressões racionais.

(a) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ (b) $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{x + 3}{2x + 1}$

(c) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ (d) $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

6. Racionalize a expressão e simplifique.

(a) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}-2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

7. Reescreva, completando o quadrado.

(a) $x^2 + x + 1$ (b) $2x^2 - 12x + 11$

8. Resolva a equação. (Encontre apenas as soluções reais.)

(a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ (b) $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x}$

(c) $x^2 - x - 12 = 0$ (d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$

(e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (f) $3|x - 4| = 10$

(g) $2x(4-x)^{-1/2} - 3\sqrt{4-x} = 0$

9. Resolva cada desigualdade. Escreva suas respostas usando a notação de intervalos.

(a) $-4 < 5 - 3x \leqslant 17$ (b) $x^2 < 2x + 8$

(c) $x(x-1)(x+2) > 0$ (d) $|x - 4| < 3$

(e) $\dfrac{2x-3}{x+1} \leqslant 1$

10. Diga se cada equação é verdadeira ou falsa.

(a) $(p+q)^2 = p^2 + q^2$ (b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$

(c) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ (d) $\dfrac{1 + TC}{C} = 1 + T$

(e) $\dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$ (f) $\dfrac{1}{a/x - b/x} = \dfrac{1}{a-b}$

RESPOSTAS DOS TESTES DE VERIFICAÇÃO A: ÁLGEBRA

1. (a) 81 (b) -81 (c) $\frac{1}{81}$
(d) 25 (e) $\frac{9}{4}$ (f) $\frac{1}{8}$

2. (a) $6\sqrt{2}$ (b) $48a^5b^7$ (c) $\dfrac{x}{9y^7}$

3. (a) $11x - 2$ (b) $4x^2 + 7x - 15$
(c) $a - b$ (d) $4x^2 + 12x + 9$
(e) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

4. (a) $(2x-5)(2x+5)$ (b) $(2x-3)(x+4)$
(c) $(x-3)(x-2)(x+2)$ (d) $x(x+3)(x^2-3x+9)$
(e) $3x^{-1/2}(x-1)(x-2)$ (f) $xy(x-2)(x+2)$

5. (a) $\dfrac{x+2}{x-2}$ (b) $\dfrac{x-1}{x-3}$

(c) $\dfrac{1}{x-2}$ (d) $-(x+y)$

6. (a) $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$

7. (a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ (b) $2(x-3)^2 - 7$

8. (a) 6 (b) 1 (c) $-3, 4$
(d) $-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (e) $\pm 1, \pm\sqrt{2}$ (f) $\frac{2}{3}, \frac{22}{3}$
(g) $\frac{12}{5}$

9. (a) $[-4, 3)$ (b) $(-2, 4)$
(c) $(-2, 0) \cup (1, \infty)$ (d) $(1, 7)$
(e) $(-1, 4]$

10. (a) Falso (b) Verdadeiro (c) Falso
(d) Falso (e) Falso (f) Verdadeiro

B TESTES DE VERIFICAÇÃO: GEOMETRIA ANALÍTICA

1. Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(2, -5)$ e
(a) tem inclinação -3
(b) é paralela ao eixo x
(c) é paralela ao eixo y
(d) é paralela à reta $2x - 4y = 3$

2. Encontre uma equação para o círculo que tem centro $(-1, 4)$ e passa pelo ponto $(3, -2)$.

3. Encontre o centro e o raio do círculo com equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.

4. Sejam $A(-7, 4)$ e $B(5, -12)$ pontos no plano.
(a) Encontre a inclinação da reta que contém A e B.
(b) Encontre uma equação da reta que passa por A e B. Quais são as intersecções com os eixos?
(c) Encontre o ponto médio do segmento AB.
(d) Encontre o comprimento do segmento AB.
(e) Encontre uma equação para a mediatriz de AB.
(f) Encontre uma equação para o círculo para o qual AB é um diâmetro.

5. Esboce a região do plano xy definidas pelas equações ou inequações.
(a) $-1 \leqslant y \leqslant 3$
(b) $|x| < 4$ e $|y| < 2$
(c) $y < 1 - \frac{1}{2}x$
(d) $y \geqslant x^2 - 1$
(e) $x^2 + y^2 < 4$
(f) $9x^2 + 16y^2 = 144$

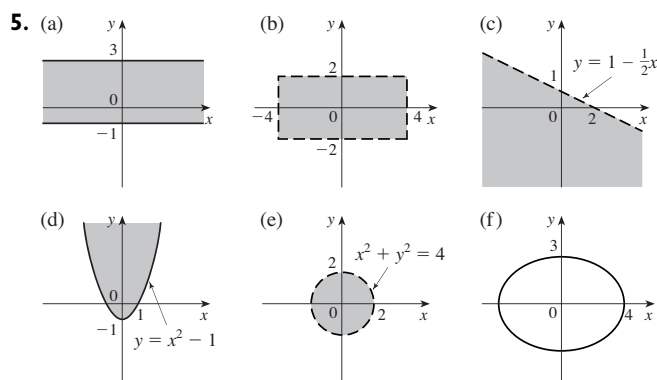
RESPOSTAS DOS TESTES DE VERIFICAÇÃO B: GEOMETRIA ANALÍTICA

1. (a) $y = -3x + 1$ (b) $y = -5$
(c) $x = 2$ (d) $y = \frac{1}{2}x - 6$

2. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 52$

3. Centro $(3, -5)$, raio 5

4. (a) $-\frac{4}{3}$
(b) $4x + 3y + 16 = 0$; intersecção com o eixo x, -4; intersecção com o eixo y, $-\frac{16}{3}$
(c) $(-1, -4)$
(d) 20
(e) $3x - 4y = 13$
(f) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$

5.

Se você tiver dificuldade com estes problemas, consulte a revisão de geometria analítica, nos Apêndices B e C.

C TESTES DE VERIFICAÇÃO: FUNÇÕES

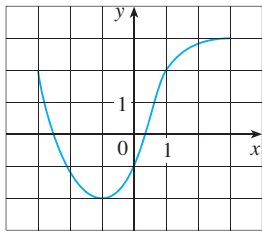



FIGURA PARA O PROBLEMA 1

1. O gráfico de uma função f é dado à esquerda.
(a) Diga o valor de $f(-1)$.
(b) Estime o valor de $f(2)$.
(c) Para quais valores de x vale que $f(x) = 2$?
(d) Estime os valores de x tais que $f(x) = 0$.
(e) Diga qual é o domínio e a imagem de f.

2. Se $f(x) = x^3$, calcule o quociente da diferença $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ e simplifique sua resposta.

3. Encontre o domínio da função
(a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ (b) $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ (c) $h(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$

4. Como os gráficos das funções são obtidos a partir do gráfico de f?
(a) $y = -f(x)$ (b) $y = 2f(x) - 1$ (c) $y = f(x-3) + 2$

5. Sem usar uma calculadora, faça um esboço grosseiro do gráfico.
(a) $y = x^3$ (b) $y = (x+1)^3$ (c) $y = (x-2)^3 + 3$
(d) $y = 4 - x^2$ (e) $y = \sqrt{x}$ (f) $y = 2\sqrt{x}$
(g) $y = -2^x$ (h) $y = 1 + x^{-1}$

6. Seja $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$
(a) Calcule $f(-2)$ e $f(1)$. (b) Esboce o gráfico de f.

7. Se $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e $g(x) = 2x - 3$, encontre cada uma das seguintes funções.
(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $g \circ g \circ g$

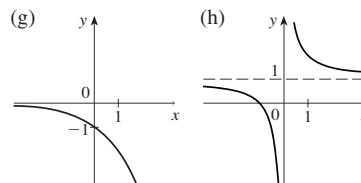
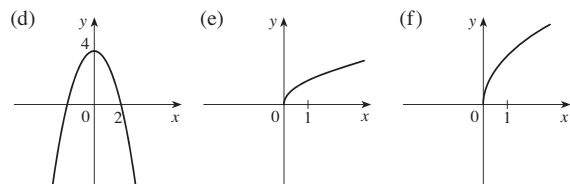
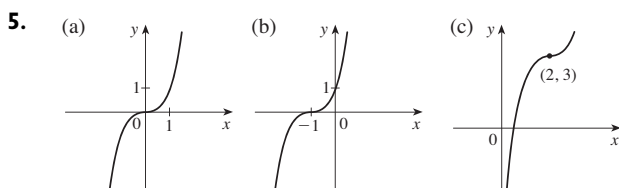
RESPOSTAS DOS TESTES DE VERIFICAÇÃO C: FUNÇÕES

1. (a) -2 (b) 2,8
(c) $-3,1$ (d) $-2,5$, 0,3
(e) $[-3, 3]$, $[-2, 3]$

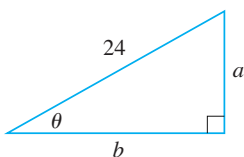
2. $12 + 6h + h^2$

3. (a) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$
(b) $(-\infty, \infty)$
(c) $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$

4. (a) Refletindo em torno do eixo x.
(b) Expandindo verticalmente por um fator 2, a seguir transladando 1 unidade para baixo.
(c) Transladando 3 unidades para a direita e duas unidades para cima.

5.
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)
6. (a) -3, 3
(b)

7. (a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 8x + 2$
(b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x - 5$
(c) $(g \circ g \circ g)(x) = 8x - 21$

Se você tiver dificuldade com estes problemas, consulte as Seções 1.1 a 1.3 deste livro.

D TESTES DE VERIFICAÇÃO: TRIGONOMETRIA

1. Converta de graus para radianos.
(a) 300° (b) -18°

2. Converta de radianos para graus.
(a) $5\pi/6$ (b) 2

3. Encontre o comprimento de um arco de um círculo de raio 12 cm cujo ângulo central é 30°.

4. Encontre os valores exatos.
(a) $\operatorname{tg}(\pi/3)$ (b) $\operatorname{sen}(7\pi/6)$ (c) $\sec(5\pi/3)$

24
a
θ
b

FIGURA PARA O PROBLEMA 5

5. Expresse os comprimentos a e b na figura em termos de θ.

6. Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde x e y estão entre 0 e $\pi/2$, calcule $\operatorname{sen}(x + y)$.

7. Demonstre as identidades.
(a) $\operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$

(b) $$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{sen} 2x$$

8. Encontre todos os valores de x tais que $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$ e $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

9. Esboce o gráfico da função $y = 1 + \operatorname{sen} 2x$ sem usar uma calculadora.

RESPOSTAS DOS TESTES DE VERIFICAÇÃO D: TRIGONOMETRIA

1. (a) $5\pi/3$ (b) $-\pi/10$

2. (a) 150° (b) $360/\pi \approx 114{,}6^\circ$

3. 2π cm

4. (a) $\sqrt{3}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2

5. (a) $24 \operatorname{sen}\theta$ (b) $24 \cos\theta$

6. $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$

8. $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$

9.

Se você tiver dificuldade com estes problemas, consulte o Apêndice D deste livro.

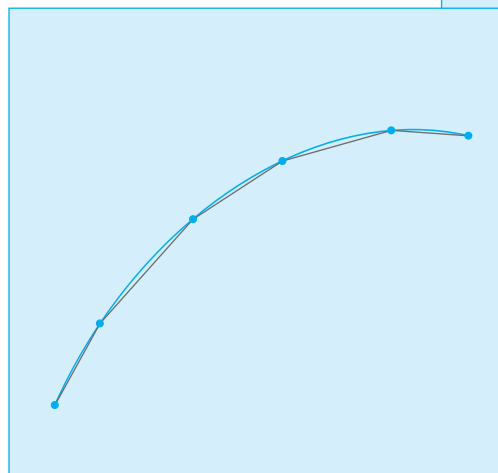
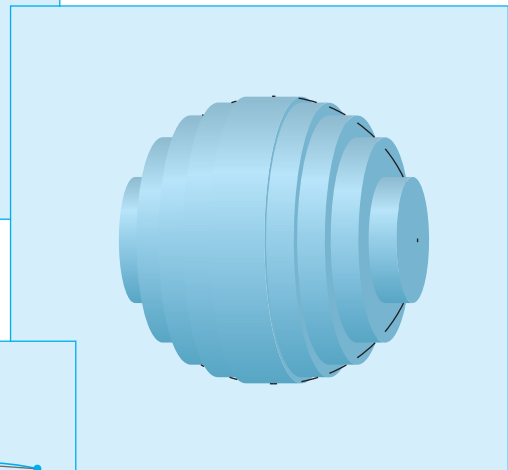
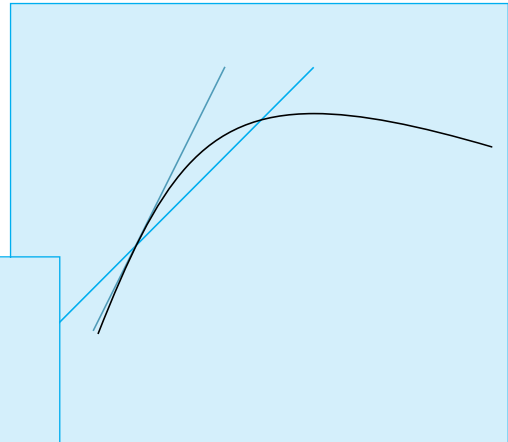
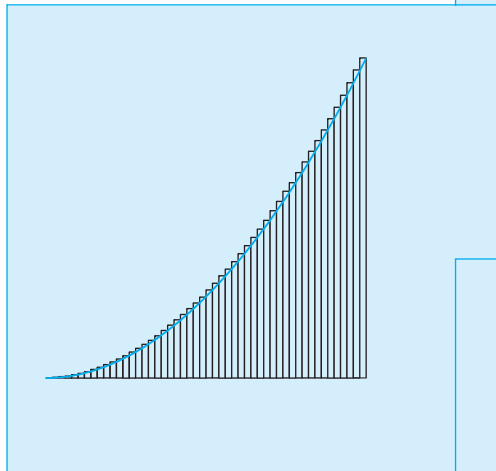
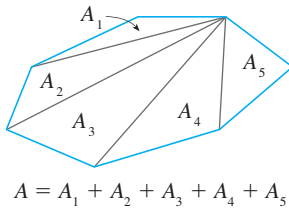
UMA APRESENTAÇÃO DO CÁLCULO

O cálculo é fundamentalmente diferente da matemática que você já estudou. O cálculo é menos estático e mais dinâmico. Ele trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. Por essa razão, pode ser útil ter uma visão geral do assunto antes de começar um estudo mais aprofundado. Vamos dar aqui uma olhada em algumas das principais ideias do cálculo, mostrando como surgem os limites quando tentamos resolver diversos problemas.

O PROBLEMA DA ÁREA

FIGURA 1

As origens do cálculo remontam à Grécia antiga, pelo menos 2 500 anos atrás, quando foram encontradas áreas usando o chamado "método da exaustão". Naquela época, os gregos já sabiam encontrar a área de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na Figura 1 e, em seguida, somando as áreas obtidas.

É muito mais difícil achar a área de uma figura curva. O método da exaustão dos antigos gregos consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e então aumentar o número de lados deles. A Figura 2 ilustra esse procedimento no caso especial de um círculo, com polígonos regulares inscritos.

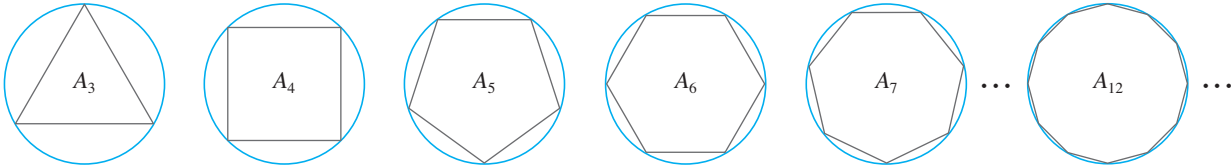



FIGURA 2

Seja A_n a área do polígono inscrito com n lados. À medida que aumentamos n, fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Dizemos então que a área do círculo é o *limite* das áreas dos polígonos inscritos, e escrevemos

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Os gregos, porém, não usaram explicitamente os limites. Todavia, por um raciocínio indireto, Eudoxo (século V a.C.) usou a exaustão para demonstrar a conhecida fórmula da área do círculo: $A = \pi r^2$.

Usaremos uma ideia semelhante no Capítulo 5 para encontrar a área de regiões do tipo mostrado na Figura 3. Vamos aproximar a área desejada A por áreas de retângulos (como na Figura 4), fazer decrescer a largura dos retângulos e então calcular A como o limite dessas somas de áreas de retângulos.

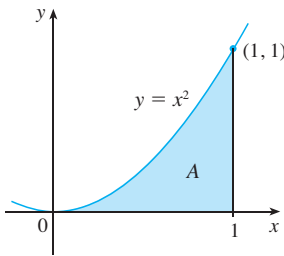



FIGURA 3

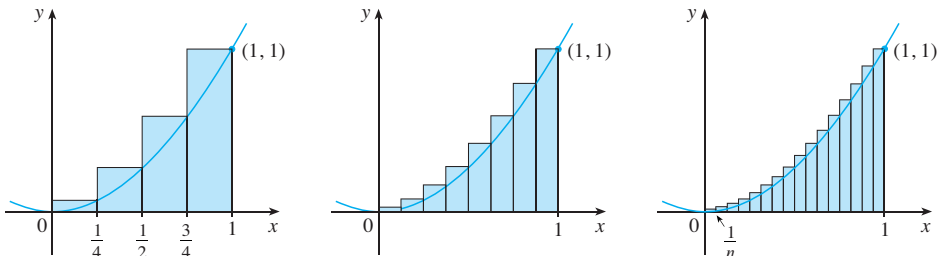



FIGURA 4

O problema da área é central no ramo do cálculo chamado *cálculo integral*. As técnicas que desenvolveremos no Capítulo 5 para encontrar áreas também possibilitarão o cálculo do volume de um sólido, o comprimento de um arco, a força da água sobre um dique, a massa e o centro de gravidade de uma barra e o trabalho realizado ao se bombear a água para fora de um tanque.

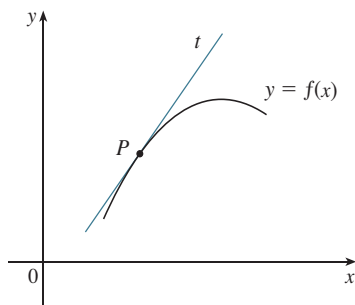



FIGURA 5
A reta tangente em P

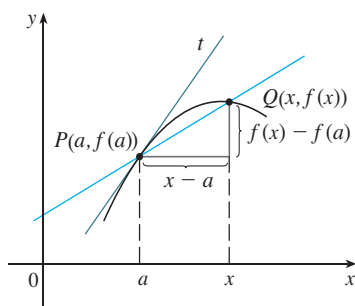



FIGURA 6
A reta secante PQ

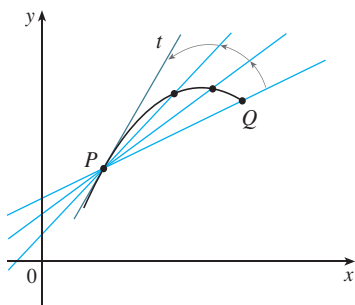



FIGURA 7
Retas secantes aproximando-se da reta tangente

O PROBLEMA DA TANGENTE

Considere o problema de tentar determinar a reta tangente t a uma curva com equação $y = f(x)$, em um dado ponto P. (Daremos uma definição precisa de reta tangente no Capítulo 2. Por ora, você pode pensá-la como a reta que toca a curva em P, como na Figura 5.) Uma vez que sabemos ser P um ponto sobre a reta tangente, podemos encontrar a equação de t se conhecermos sua inclinação m. O problema está no fato de que, para calcular a inclinação, é necessário conhecer dois pontos e, sobre t, temos somente o ponto P. Para contornar esse problema, determinamos primeiro uma aproximação para m, tomando sobre a curva um ponto próximo Q e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ. Da Figura 6 vemos que

1 $$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Imagine agora o ponto Q movendo-se ao longo da curva em direção a P, como na Figura 7. Você pode ver que a reta secante gira e aproxima-se da reta tangente como sua posição-limite. Isso significa que a inclinação m_{PQ} da reta secante fica cada vez mais próxima da inclinação m da reta tangente. Isso é denotado por

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

e dizemos que m é o limite de m_{PQ} quando Q tende ao ponto P ao longo da curva. Uma vez que x tende a a quando Q tende a P, também podemos usar a Equação 1 para escrever

2 $$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemplos específicos desse procedimento serão dados no Capítulo 2.

O problema da tangente deu origem ao ramo do cálculo chamado *cálculo diferencial*, que não foi inventado até mais de 2 mil anos após o cálculo integral. As principais ideias por trás do cálculo diferencial devem-se ao matemático francês Pierre Fermat (1601-1665) e foram desenvolvidas pelos matemáticos ingleses John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) e Isaac Newton (1642-1727) e pelo matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716).

Os dois ramos do cálculo e seus problemas principais, o da área e o da tangente, apesar de parecerem completamente diferentes, têm uma estreita conexão. O problema da área e o da tangente são problemas inversos, em um sentido que será explicado no Capítulo 5.

VELOCIDADE

Quando olhamos no velocímetro de um carro e vemos que ele está a 48 km/h, o que essa informação indica? Sabemos que, se a velocidade permanecer constante, após uma hora o carro terá percorrido 48 km. Porém, se a velocidade do carro variar, qual o significado de a velocidade ser, em um dado momento, 48 km/h?

Para analisar essa questão, vamos examinar o movimento de um carro percorrendo uma estrada reta e suponha que possamos medir a distância percorrida por ele (em metros) em intervalos de 1 segundo, como na tabela a seguir:

t = Tempo decorrido (s)	0	2	4	6	8	10
d = Distância (m)	0	2	10	25	43	78

Como primeiro passo para encontrar a velocidade após 4 segundos de movimento, calcularemos qual a velocidade média no intervalo de tempo $4 \leq t \leq 8$:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}}$$

$$= \frac{43 - 10}{8 - 4}$$

$$= 8{,}25 \text{ m/s}$$

Analogamente, a velocidade média no intervalo $4 \leq t \leq 6$ é

$$\text{velocidade média} = \frac{25 - 10}{5 - 4} = 7{,}5 \text{ m/s}$$

Nossa intuição é de que a velocidade no instante $t = 4$ não pode ser muito diferente da velocidade média durante um pequeno intervalo de tempo que começa em $t = 4$. Assim, imaginaremos que a distância percorrida foi medida em intervalos de 0,2 segundo, como na tabela a seguir:

t	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
d	10,00	11,02	12,16	13,45	14,96	16,80

Então, podemos calcular, por exemplo, a velocidade média no intervalo de tempo [4, 5]:

$$\text{velocidade média} = \frac{16{,}80 - 10{,}00}{5 - 4} = 6{,}8 \text{ m/s}$$

Os resultados desses cálculos estão mostrados na tabela:

Intervalo de tempo	[4, 6]	[4, 5]	[4, 4,8]	[4, 4,6]	[4, 4,4]	[4, 4,2]
Velocidade média (m/s)	7,5	6,8	6,2	5,75	5,4	5,1

As velocidades médias em intervalos cada vez menores parecem ficar cada vez mais próximas de 5; dessa forma, esperamos que exatamente em $t = 4$ a velocidade seja cerca de 5 m/s. No Capítulo 2 definiremos a velocidade instantânea de um objeto em movimento como o limite das velocidades médias em intervalos de tempo cada vez menores.

Na Figura 8 mostramos uma representação gráfica do movimento de um carro traçando a distância percorrida como uma função do tempo. Se escrevermos $d = f(t)$, então $f(t)$ é o número de metros percorridos após t segundos. A velocidade média no intervalo de tempo $[4, t]$ é

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

que é a mesma coisa que a inclinação da reta secante PQ da Figura 8. A velocidade v quando $t = 4$ é o valor-limite da velocidade média quando t aproxima-se de 4; isto é,

$$v = \lim_{t \to 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

e, da Equação 2, vemos que isso é igual à inclinação da reta tangente à curva em P.

Dessa forma, ao resolver o problema da tangente em cálculo diferencial, também estamos resolvendo problemas relativos à velocidade. A mesma técnica se aplica a problemas relativos à taxa de variação nas ciências naturais e sociais.

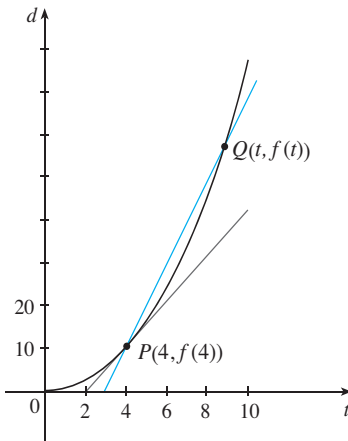



FIGURA 8

O LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA

No século V a.C., o filósofo grego Zenão propôs quatro problemas, hoje conhecidos como *Paradoxos de Zenão*, com o intento de desafiar algumas das ideias correntes em sua época sobre espaço e tempo. O segundo paradoxo de Zenão diz respeito a uma corrida entre o herói grego Aquiles e uma tartaruga para a qual foi dada uma vantagem inicial. Zenão argumentava que Aquiles jamais ultrapassaria a tartaruga: se ele começasse em uma posição a_1 e a tartaruga em t_1 (veja a Figura 9), quando ele atingisse o ponto $a_2 = t_1$ a tartaruga estaria adiante, em uma posição t_2. No momento em que Aquiles atingisse $a_3 = t_2$, a tartaruga estaria em t_3. Esse processo continuaria indefinidamente, e, dessa forma, aparentemente a tartaruga estaria sempre à frente! Todavia, isso desafia o senso comum.

Aquiles a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 . . .

tartaruga t_1 t_2 t_3 t_4 . . .

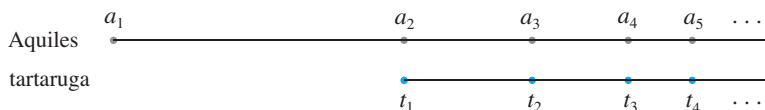



FIGURA 9

Uma forma de explicar esse paradoxo usa a ideia de *sequência*. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga são respectivamente $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$, conhecidas como sequências.

Em geral, uma sequência $\{a_n\}$ é um conjunto de números escritos em uma ordem definida. Por exemplo, a sequência

$$\left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots\right\}$$

pode ser descrita pela seguinte fórmula para o n-ésimo termo:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Podemos visualizar essa sequência marcando seus termos sobre uma reta real, como na Figura 10(a), ou desenhando seu gráfico, como na Figura 10(b). Observe em ambas as figuras que os termos da sequência $a_n = 1/n$ tornam-se cada vez mais próximos de 0 à medida que n cresce. De fato, podemos encontrar termos tão pequenos quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos n suficientemente grande. Dizemos então que o limite da sequência é 0 e indicamos isso por

FIGURA 10

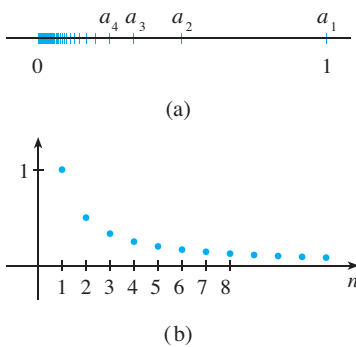
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

será usada se os termos a_n tendem a um número L quando n torna-se grande. Isso significa que podemos tornar os números a_n tão próximos de L quanto quisermos escolhendo n suficientemente grande.

O conceito de limite de uma sequência ocorre sempre que usamos a representação decimal de um número real. Por exemplo, se

$$a_1 = 3{,}1$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 3{,}14 \\
a_3 &= 3{,}141 \\
a_4 &= 3{,}1415 \\
a_5 &= 3{,}14159 \\
a_6 &= 3{,}141592 \\
a_7 &= 3{,}1415926 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

então $$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$$

Os termos nessa seqüência são aproximações racionais de π.

Vamos voltar ao paradoxo de Zenão. As posições sucessivas de Aquiles e da tartaruga formam as sequências $\{a_n\}$ e $\{t_n\}$, onde $a_n < t_n$ para todo n. Podemos mostrar que ambas as sequências têm o mesmo limite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p = \lim_{n\to\infty} t_n$$

É precisamente nesse ponto p que Aquiles ultrapassa a tartaruga.

A SOMA DE UMA SÉRIE

Outro paradoxo de Zenão, conforme nos foi passado por Aristóteles, é o seguinte: "Uma pessoa em certo ponto de uma sala não pode caminhar até a parede. Para tanto ela deveria percorrer metade da distância, depois a metade da distância restante, e então novamente a metade da distância que restou e assim por diante, de forma que o processo pode ser sempre continuado e não terá um fim". (Veja a Figura 11.)

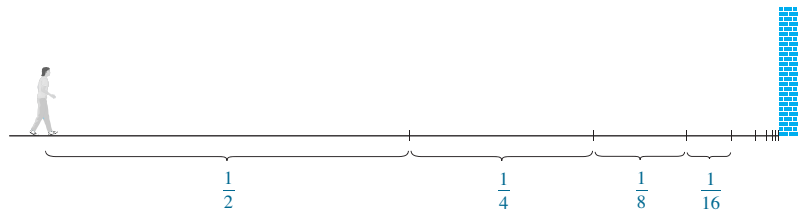



FIGURA 11

Como, naturalmente, sabemos que de fato a pessoa pode chegar até a parede, isso sugere que a distância total possa ser expressa como a soma de infinitas distâncias cada vez menores, como a seguir:

3 $$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Zenão argumentava que não fazia sentido somar um número infinito de números. Porém há situações em que fazemos implicitamente somas infinitas. Por exemplo, na notação decimal, o símbolo, $0{,}\overline{3} = 0{,}3333\ldots$ significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots$$

dessa forma, em algum sentido, deve ser verdade que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Mais geralmente, se d_n denotar o n-ésimo algarismo na representação decimal de um número, então

$$0{,}d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Portanto, algumas somas infinitas, ou, como são chamadas, séries infinitas, têm um significado. Todavia, é necessário definir cuidadosamente o que é a soma de uma série.

Retornando à série da Equação 3, denotamos por s_n a soma dos n primeiros termos da série. Assim

$$\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{2} = 0{,}5 \\
s_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0{,}75 \\
s_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0{,}875 \\
s_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0{,}9375 \\
s_5 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0{,}96875 \\
s_6 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0{,}984375 \\
s_7 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0{,}9921875 \\
&\vdots \\
s_{10} &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1024} \approx 0{,}99902344 \\
&\vdots \\
s_{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0{,}99998474
\end{aligned}$$

Observe que à medida que somamos mais e mais termos, as somas parciais ficam cada vez mais próximas de 1. De fato, pode ser mostrado que tomando n suficientemente grande (isto é, adicionando um número suficientemente grande de termos da série), podemos tornar a soma parcial s_n tão próxima de 1 quanto quisermos. Parece então razoável dizer que a soma da série infinita é 1 e escrever

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Em outras palavras, a razão de a soma da série ser 1 é que

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 1$$

No Capítulo 11 do Volume II discutiremos mais essas ideias. Usaremos então a ideia de Newton de combinar séries infinitas com cálculo diferencial e integral.

RESUMO

Vimos que o conceito de limite surge de problemas tais como encontrar a área de uma região, a tangente a uma curva, a velocidade de um carro ou a soma de uma série infinita. Em cada um dos casos, o tema comum é o cálculo de uma quantidade como o limite de outras quantidades mais facilmente calculáveis. É essa ideia básica que coloca o cálculo à parte de outras áreas da matemática. Na realidade, poderíamos definir o cálculo como aquele ramo da matemática que trata de limites.

Depois de inventar sua versão de cálculo, *Sir* Isaac Newton a usou para explicar o movimento dos planetas em torno do Sol. Hoje, o cálculo é usado na determinação de órbitas de satélites e naves espaciais, na predição do tamanho de uma população, na estimativa

de como aumenta o preço do café, na previsão do tempo, na medida do fluxo sanguíneo que sai do coração, no cálculo dos prêmios dos seguros de vida e em uma grande variedade de outras áreas. Vamos explorar neste livro algumas dessas aplicações do cálculo.

Para transmitir uma noção da potência dessa matéria, finalizaremos esta apresentação com uma lista de perguntas que você poderá responder usando o cálculo:

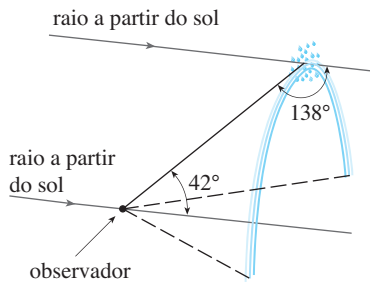



FIGURA 12

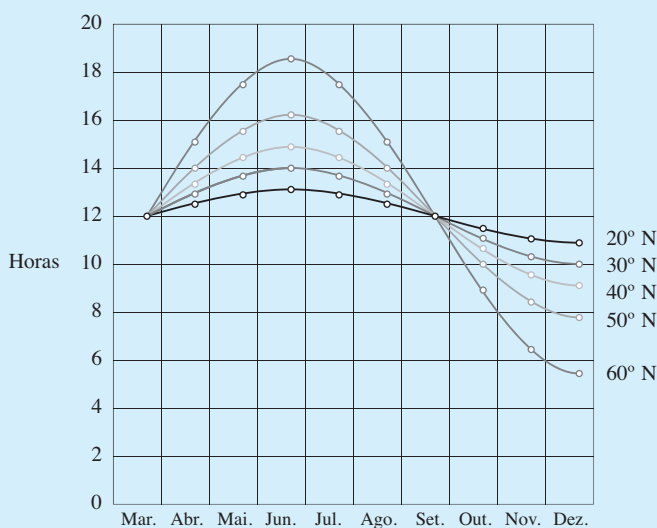
1. Como você explicaria o fato, ilustrado na Figura 12, de que o ângulo de elevação de um observador até o ponto mais alto em um arco-íris é 42º?
2. Como você poderia explicar as formas das latas nas prateleiras de um supermercado?
3. Qual o melhor lugar para se sentar em um cinema?
4. A qual distância de um aeroporto um piloto deve começar a descida?
5. Como podemos juntar curvas para desenhar formas que representam letras em uma impressora a laser?
6. Onde um jogador deveria se posicionar para apanhar uma bola de beisebol lançada por outro jogador e mandá-la para a *home plate*?
7. Uma bola lançada para cima leva mais tempo para atingir sua altura máxima ou para cair de volta à sua altura original?
8. Como você pode explicar o fato de planetas e satélites se moverem em órbitas elípticas?
9. Como você pode distribuir o escoamento de água entre as turbinas de uma usina hidrelétrica de modo a maximizar a energia total produzida?
10. Se uma bola de gude, uma bola de *squash*, uma barra de aço e um cano de ferro rolarem por uma encosta, qual deles atingirá o fundo primeiro?

CÁLCULO

VOLUME I

1

FUNÇÕES E MODELOS

O gráfico de uma função – aqui, o número de horas de luz solar como uma função da época do ano, em várias latitudes – é com frequência o modo mais conveniente e natural de representá-la.

O objeto fundamental do cálculo são as funções. Este capítulo abre o caminho para o cálculo discutindo as ideias básicas concernentes às funções e seus gráficos, bem como as formas de combiná-los e transformá-los. Enfatizamos que uma função pode ser representada de várias maneiras: por uma equação, por uma tabela, por um gráfico ou mesmo por meio de palavras. Vamos examinar os principais tipos de funções que ocorrem no cálculo e descrever o modo de usá-las como modelos matemáticos de fenômenos do mundo real. Também discutiremos o uso de calculadoras gráficas e de software gráfico para computadores.

1.1 QUATRO MANEIRAS DE REPRESENTAR UMA FUNÇÃO

As funções surgem quando uma quantidade depende de outra. Consideremos as seguintes situações:

Ano	População (milhões)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080

A. A área A de um círculo depende de seu raio r. A lei que relaciona r e A é dada pela equação $A = \pi r^2$. A cada número r positivo existe associado um único valor de A e dizemos que A é uma *função* de r.

B. A população humana mundial P depende do tempo t. A tabela ao lado fornece estimativas da população mundial $P(t)$ no instante t, para determinados anos. Por exemplo,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

Porém, para cada valor do tempo t, existe um valor de P correspondente e dizemos que P é uma função de t.

C. O custo C de enviar uma carta pelo correio depende de seu peso w. Embora não haja uma fórmula simples relacionando w e C, o correio tem uma fórmula que permite calcular C quando é dado w.

D. A aceleração vertical a do solo registrada por um sismógrafo durante um terremoto é uma função do tempo t decorrido. A Figura 1 mostra o gráfico gerado pela atividade sísmica durante o terremoto de Northridge, que abalou Los Angeles em 1994. Para um dado valor de t, o gráfico fornece um valor correspondente de a.

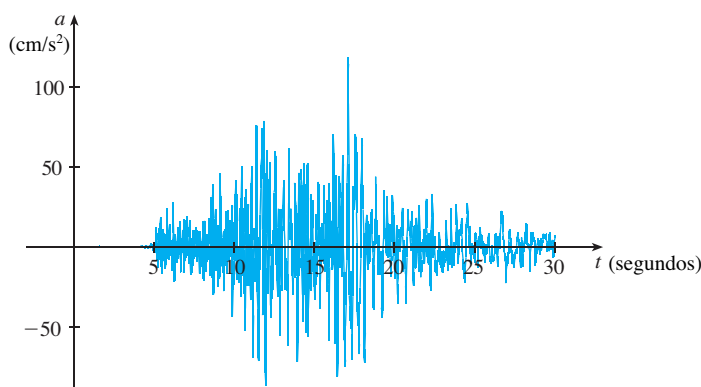



FIGURA 1
Aceleração vertical do solo durante o terremoto de Northridge

Fonte: Departamento de Minas e Geologia da Califórnia

Cada um dos exemplos anteriores descreve uma lei segundo a qual, dado um número (r, t, w ou t), fica determinado outro número (A, P, C ou a). Em cada caso dizemos que o segundo número é uma função do primeiro.

> Uma **função** f é uma lei que associa cada elemento x em um conjunto D exatamente a um elemento $f(x)$, em um conjunto E.

Em geral consideramos as funções para as quais D e E são conjuntos de números reais. O conjunto A é chamado **domínio** da função. O número $f(x)$ é o **valor de f em x** e deve ser lido como "f de x". A **imagem** de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ quando x varia por todo o domínio. O símbolo que representa um número arbitrário no *domínio* de uma função f é denominado **variável independente**, e o que representa um número qualquer na *imagem* de f é chamado de **variável dependente**. No Exemplo A, a variável r é independente, enquanto A é dependente.

FIGURA 2
Diagrama de máquina para uma função f

É útil considerar uma função como uma **máquina** (veja a Figura 2). Se x estiver no domínio da função f, quando x entrar na máquina, ele será aceito como entrada, e a máquina produzirá uma saída $f(x)$ de acordo com a lei que define a função. Assim, podemos pensar o domínio como o conjunto de todas as *entradas*, enquanto a imagem é o conjunto de todas as saídas possíveis.

As funções pré-programadas de sua calculadora são exemplos de funções como máquinas. Por exemplo, a tecla de raiz quadrada em sua calculadora é uma dessas funções. Você pressiona a tecla $\sqrt{\ }$ (ou $\sqrt{x}$) e dá a entrada x. Se $x < 0$, então x não está no domínio dessa função; isto é, não é uma entrada aceitável, e a calculadora indicará um erro. Se $x \geqslant 0$, então uma aproximação de $\sqrt{x}$ aparecerá. Assim, a tecla $\sqrt{x}$ de sua calculadora não é exatamente a mesma coisa que a função matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

Outra forma de ver a função é como um **diagrama de flechas**, como na Figura 3. Cada flecha conecta um elemento de D com um elemento de E. A flecha indica que $f(x)$ está associado a x, $f(a)$ a a etc.

O método mais comum de visualizar uma função consiste em fazer seu gráfico. Se f for uma função com domínio A, então seu **gráfico** será o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que eles são os pares entrada-saída.) Em outras palavras, o gráfico de f consiste em todos os pontos (x, y) do plano coordenado tais que $y = f(x)$ e x está no domínio de f.

O gráfico de uma função f nos dá uma imagem útil do comportamento ou da "história de vida" de uma função. Uma vez que a coordenada y de qualquer ponto (x, y) sobre o gráfico é $y = f(x)$, podemos ler o valor $f(x)$ como a altura do ponto no gráfico acima de x (veja a Figura 4). O gráfico de f também nos permite visualizar o domínio sobre o eixo x e a imagem sobre o eixo y, como na Figura 5.

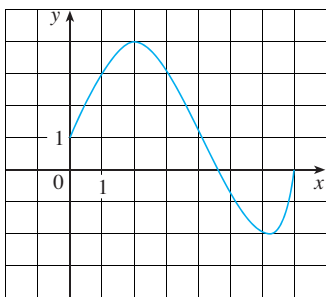



FIGURA 4

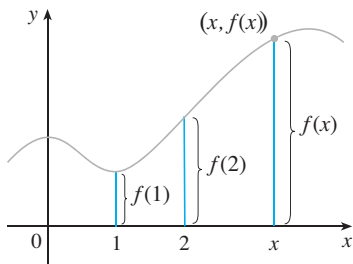
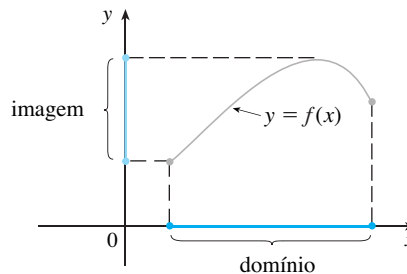



FIGURA 5

FIGURA 6

EXEMPLO 1 O gráfico de uma função f está na Figura 6.
(a) Encontre os valores de $f(1)$ e $f(5)$.
(b) Quais são o domínio e a imagem de f?

SOLUÇÃO
(a) Vemos na Figura 6 que o ponto $(1, 3)$ está no gráfico de f, assim, o valor de f em 1 é $f(1) = 3$. (Em outras palavras, o ponto sobre o gráfico correspondente a $x = 1$ está três unidades acima do eixo x.)

Quando $x = 5$, o ponto no gráfico que corresponde a esse valor está 0,7 unidade abaixo do eixo x e estimamos que $f(5) \approx -0{,}7$.
(b) Vemos que $f(x)$ está definida quando $0 \leqslant x \leqslant 7$, logo, o domínio de f é o intervalo fechado $[0, 7]$. Observe que os valores de f variam de -2 até 4; assim, a imagem de f é

■ A notação para intervalos é dada no Apêndice A.

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$

□

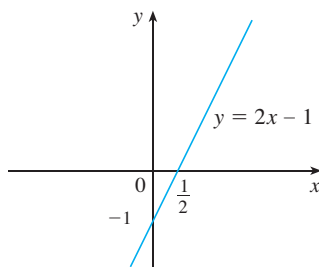
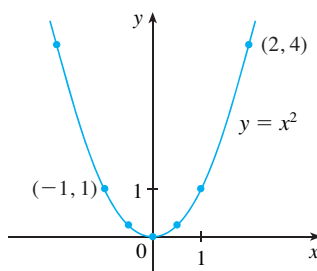



FIGURA 7

FIGURA 8

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico e encontre o domínio e a imagem de cada função.
(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUÇÃO

(a) O gráfico tem equação $y = 2x - 1$, que reconhecemos ser a equação de uma reta com inclinação 2 e intersecção com o eixo y igual a -1. (Lembre-se da equação da reta em sua forma inclinação-intersecção: $y = mx + b$. Veja o Apêndice B). Isso nos possibilita esboçar uma parte do gráfico de f na Figura 7. A expressão $2x - 1$ está definida para todos os números reais; logo, seu domínio é todo o conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$. O gráfico mostra ainda que a imagem também é $\mathbb{R}$.

(b) Como $g(2) = 2^2 = 4$ e $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podemos marcar os pontos $(2, 4)$ e $(-1, 1)$ junto com alguns outros no gráfico e ligá-los para produzir o gráfico da Figura 8. A equação do gráfico é $y = x^2$, que representa uma parábola (veja o Apêndice C). O domínio de g é $\mathbb{R}$. A imagem de g consiste em todos os valores de $g(x)$, isto é, todos os números da forma x^2. Mas $x^2 \geqslant 0$ para todos os números reais x e todo número positivo y é um quadrado. Assim, a imagem de g é $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Isso também pode ser visto na Figura 8. □

EXEMPLO 3 Se $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ e $h \neq 0$, calcule $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

SOLUÇÃO Primeiro calculamos $f(a + h)$ substituindo x por $a + h$ na expressão para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

A seguir, substituímos isso na expressão dada e simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a + 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$ □

■ A expressão

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

no Exemplo 3 é chamada de **quociente de diferenças** e ocorre com frequência no cálculo. Como veremos no Capítulo 2, ela representa a taxa média de variação de $f(x)$ entre $x = a$ e $x = a + h$.

REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES

É possível representar uma função de quatro maneiras:

- verbalmente (descrevendo-a com palavras)
- numericamente (por meio de uma tabela de valores)
- visualmente (através de um gráfico)
- algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita)

Se uma função puder ser representada das quatro maneiras, em geral é útil ir de uma representação para a outra, a fim de ganhar um entendimento adicional da função. (No caso do Exemplo 2, partimos de fórmulas algébricas para obter os gráficos.) Porém, certas funções são descritas mais naturalmente por um método que por outro. Tendo isso em mente, vamos reexaminar as quatro situações consideradas no começo desta seção.

A. A mais útil dentre as representações da área de um círculo em função de seu raio é provavelmente a fórmula $A(r) = \pi r^2$, apesar de ser possível elaborar uma tabela de valores, bem como esboçar um gráfico (meia parábola). Como o raio do círculo deve ser positivo, o domínio da função é $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$ e a imagem também é $(0, \infty)$.

Ano	População (milhões)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080

B. Foi dada a seguinte descrição em palavras da função: $P(t)$ é a população humana mundial no instante t. A tabela de valores da população mundial nos fornece uma representação conveniente dessa função. Se marcarmos esses valores, vamos obter o gráfico da Figura 9 (chamado *diagrama de dispersão*). Ele é também uma representação útil, já que nos possibilita absorver todos os dados de uma vez. E o que dizer sobre uma fórmula para a função? Naturalmente, é impossível dar uma fórmula explícita para a população humana exata $P(t)$ em qualquer momento t. Porém, é possível encontrar uma expressão *aproximada* para ela. Usando métodos explicados na Seção 1.2 obtemos a aproximação

$$P(t) \approx f(t) = (0{,}008079266) \cdot (1{,}013731)^t$$

e a Figura 10 mostra que o "ajuste" é bem razoável. A função f é chamada *modelo matemático* do crescimento populacional. Em outras palavras, é uma função com uma fórmula explícita que aproxima o comportamento da função dada. No entanto, vamos ver que podemos aplicar ideias de cálculo em tabelas de valores não sendo necessária uma fórmula explícita.

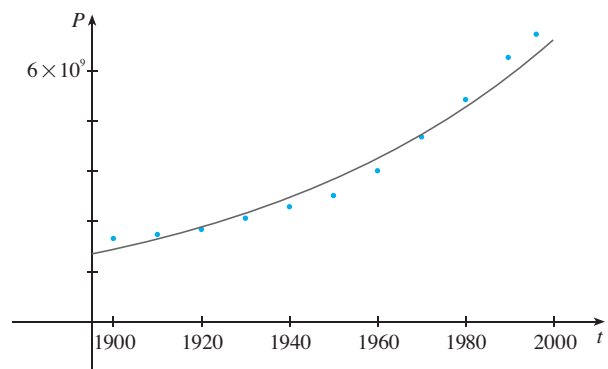



FIGURA 9

FIGURA 10

A função P é um exemplo típico das funções que aparecem quando tentamos aplicar o cálculo ao mundo real. Começamos por uma descrição verbal de uma função. Então é possível que a partir de dados experimentais possamos construir as tabelas de valores da função. Mesmo que não tenhamos um conhecimento completo dos valores da função, veremos por todo este livro que é possível realizar operações do cálculo nessas funções.

■ Uma função definida por uma tabela de valores é chamada função tabular.

C. Novamente, a função é descrita em palavras: $C(w)$ é o custo de se enviar pelo correio uma carta com um peso w. Em Hong Kong, em 2007, o serviço postal seguia esta regra: o custo é $ 1,40 até 30 g, $ 2,20 para pesos entre 30 e 50 g (inclusive), e assim por diante. A tabela de valores mostrada ao lado é a representação mais conveniente dessa função, embora seja possível esboçar seu gráfico (veja o Exemplo 10).

w (gramas)	$C(w)$ (dólares em Hong Kong)
$0 < w \leqslant 30$	1,40
$30 < w \leqslant 50$	2,20
$50 < w \leqslant 100$	3,00
$100 < w \leqslant 150$	3,70
$150 < w \leqslant 200$	4,00
.	.
.	.
.	.

D. O gráfico na Figura 1 é a representação mais natural da aceleração vertical $a(t)$. É verdade que seria possível montar uma tabela de valores e até mesmo desenvolver uma fórmula aproximada. Porém tudo o que um geólogo precisa saber — amplitude e padrões — pode facilmente ser obtido do gráfico. (O mesmo é válido tanto para os padrões de um eletrocardiograma como para o caso de um detector de mentiras.)

No próximo exemplo, vamos esboçar o gráfico de uma função definida verbalmente.

EXEMPLO 4 Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende de há quanto tempo ela está correndo. Esboce um gráfico de T como uma função do tempo t decorrido desde a abertura da torneira.

SOLUÇÃO A temperatura inicial da água corrente está próxima da temperatura ambiente, pois ela estava em repouso nos canos. Quando a água do tanque de água quente começa a escoar da torneira, T aumenta rapidamente. Na próxima fase, T fica constante, na temperatura da água aquecida no tanque. Quando o tanque fica vazio, T decresce para a

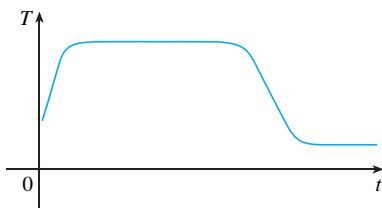



FIGURA 11

temperatura da fonte de água. Isso nos permite fazer o esboço de T como uma função de T na Figura 11. □

No exemplo a seguir, começamos pela descrição verbal de uma função em uma situação física e depois obtemos uma fórmula algébrica explícita. A habilidade de fazer essa transição é muito útil na solução de problemas de cálculo envolvendo a determinação de valores máximo ou mínimo de quantidades.

EXEMPLO 5 Uma caixa de armazenamento retangular aberta na parte superior tem um volume de 10 m^3. O comprimento da base é o dobro de sua largura. O material da base custa $ 10 por metro quadrado, ao passo que o material das laterais custa $ 6 por metro quadrado. Expresse o custo total do material como uma função do comprimento da base.

FIGURA 12

SOLUÇÃO Fazemos um diagrama como o da Figura 12, com uma notação na qual w e $2w$ são, respectivamente, o comprimento e a largura da base, e h é a altura.
A área da base é $(2w)w = 2w^2$; assim, o custo do material em dólares para a base é de $10(2w^2)$. Quanto aos lados, dois têm área wh e os outros dois, $2wh$. Portanto, o custo total dos lados é $6[2(wh) + 2(2wh)]$. Assim, o custo total é

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expressar C como uma função somente de w, precisamos eliminar h, o que é feito usando o volume dado de 10 m^3. Dessa forma,

$$w(2w)h = 10$$

o que fornece

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Substituindo essa expressão na fórmula de C, temos

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Logo, a equação

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expressa C como uma função de w. □

■ Na montagem de funções aplicadas, como no Exemplo 5, pode ser útil rever os princípios para a resolução de problemas discutidos na página 65, particularmente o *Passo 1: Entendendo o Problema*.

EXEMPLO 6 Encontre o domínio de cada função.

(a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

■ Se uma função for dada por uma fórmula e o domínio não for definido explicitamente, convenciona-se que o domínio é o conjunto de todos os números para os quais a fórmula tem sentido e define um número real.

SOLUÇÃO

(a) Como a raiz quadrada de um número negativo não é definida (como um número real), o domínio de f consiste em todos os valores de x tais que $x + 2 \geqslant 0$. Isso é equivalente a $x \geqslant -2$; assim, o domínio é o intervalo $[-2, \infty)$.

(b) Uma vez que

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

e a divisão por 0 não é permitida, vemos que $g(x)$ não está definida no caso de $x = 0$ ou $x = 1$. Dessa forma, o domínio de g é

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

que também pode ser dado na notação de intervalo como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$ □

O gráfico de uma função é uma curva no plano xy. De imediato surge uma pergunta: quais curvas no plano xy são gráficos de funções? Essa pergunta será respondida por meio do teste a seguir.

> **TESTE DA RETA VERTICAL** Uma curva no plano xy é o gráfico de uma função de x se e somente se nenhuma reta vertical cortar a curva mais de uma vez.

A razão da veracidade do Teste da Reta Vertical pode ser vista na Figura 13. Se cada reta vertical $x = a$ interceptar a curva somente uma vez, em (a, b), então exatamente um valor funcional é definido por $f(a) = b$. Mas se a reta $x = a$ interceptar a curva em dois pontos, em (a, b) e (a, c), nesse caso, a curva não pode representar uma função, pois uma função não pode associar dois valores diferentes a a.

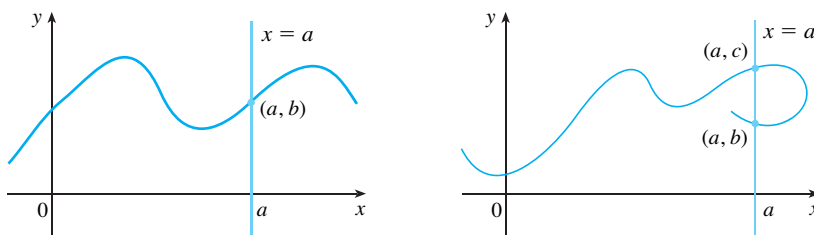



FIGURA 13

Por exemplo, a parábola $x = y^2 - 2$ na Figura 14(a) não é o gráfico de uma função de x, pois, como podemos ver, existem retas verticais que interceptam a parábola duas vezes. A parábola, no entanto, contém os gráficos de *duas* funções de x. Observe que a equação $x = y^2 - 2$ implica que $y^2 = x + 2$, de modo que $y = \pm\sqrt{x + 2}$. Assim, a metade superior e a inferior da parábola são os gráficos de $f(x) = \sqrt{x + 2}$ [do Exemplo 6(a)] e $g(x) = -\sqrt{x + 2}$ [veja as Figuras 14(b) e (c)]. Observe que se invertermos os papéis de x e y, então a equação $x = h(y) = y^2 - 2$ define x como uma função de y (com y como variável independente e x como variável dependente), e a parábola agora é o gráfico da função h.

(a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x + 2}$ (c) $y = -\sqrt{x + 2}$

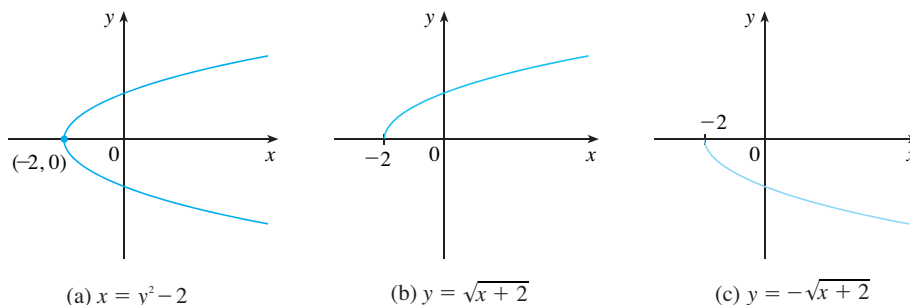



FIGURA 14

FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES

As funções nos quatro exemplos a seguir são definidas por fórmulas distintas em diferentes partes de seus domínios.

EXEMPLO 7 Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Calcule $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$ e esboce o gráfico.

SOLUÇÃO Lembre-se de que toda função é uma regra. Para esta função em particular a regra é a seguinte: olhe primeiro o valor da entrada x. Se tivermos que $x \leqslant 1$, então o valor de $f(x)$ será $1 - x$. Por outro lado, se $x > 1$, então o valor de $f(x)$ será x^2.

$$\text{Uma vez que } 0 \leqslant 1, \text{ temos } f(0) = 1 - 0 = 1.$$

$$\text{Uma vez que } 1 \leqslant 1, \text{ temos } f(1) = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{Uma vez que } 2 > 1, \text{ temos } f(2) = 2^2 = 4.$$

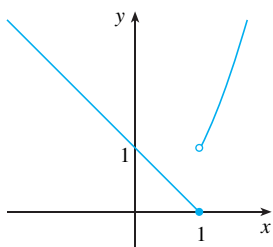
Como fazer o gráfico de f? Observamos que se $x \leqslant 1$, então $f(x) = 1 - x$, assim, a parte do gráfico de f à esquerda da reta vertical $x = 1$ deve coincidir com a reta $y = 1 - x$, essa última com inclinação -1 e intersecção com o eixo y igual a 1. Se $x > 1$, daí $f(x) = x^2$, e, dessa forma, a parte do gráfico f à direita da reta $x = 1$ deve coincidir com o gráfico de $y = x^2$, que é uma parábola. Isso nos permite esboçar o gráfico da Figura 15. O círculo cheio indica que o ponto $(1, 0)$ está incluso no gráfico; o círculo vazio indica que o ponto $(1, 1)$ está excluído do gráfico. □

FIGURA 15

O próximo exemplo de função definida por partes é a função valor absoluto. Lembre-se de que o **valor absoluto** de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 sobre a reta real. Como distâncias são sempre positivas ou nulas, temos

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por exemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

■ Para uma revisão mais ampla de valores absolutos, veja o Apêndice A.

Em geral, temos

$$|a| = a \qquad \text{se } a \geqslant 0$$
$$|a| = -a \qquad \text{se } a < 0$$

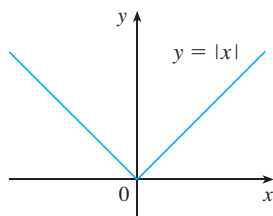
(Lembre-se de que se a for negativo, então $-a$ será positivo.)

EXEMPLO 8 Esboce o gráfico da função valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUÇÃO Da discussão precedente sabemos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

FIGURA 16

Usando o mesmo método empregado no Exemplo 7, vemos que o gráfico de f coincide com a reta $y = x$ à direita do eixo y e com a reta $y = -x$ à esquerda do eixo y (veja a Figura 16). □

EXEMPLO 9 Encontre uma fórmula para a função f cujo gráfico está na Figura 17.

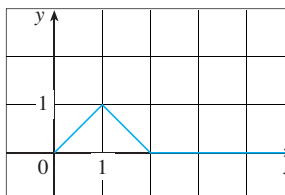



FIGURA 17

SOLUÇÃO A reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ tem inclinação $m = 1$, e intersecção com o eixo y, $b = 0$; assim, sua equação é $y = x$. Logo, para a parte do gráfico de f que liga os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, temos

$$f(x) = x \qquad \text{se} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

■ A forma ponto-inclinação da equação da reta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Veja o Apêndice B.

A reta que passa pelos pontos $(1, 1)$ e $(2, 0)$ tem uma inclinação de $m = -1$; dessa maneira, a forma ponto-inclinação será

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{ou} \qquad y = 2 - x$$

Logo temos

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{se} \qquad 1 < x \leqslant 2$$

Vemos também que o gráfico de f coincide com o eixo x para $x > 2$. Juntando todas as informações, temos a seguinte fórmula em três partes para f:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

□

EXEMPLO 10 No Exemplo C, no início desta seção, consideramos o custo $C(w)$ do envio pelo correio de uma carta com peso w. Na realidade, trata-se de uma função definida por partes, pois a partir da tabela de valores temos

$$C(w) = \begin{cases} 1{,}40 & \text{se } 0 < w \leqslant 30 \\ 2{,}20 & \text{se } 30 < w \leqslant 50 \\ 3{,}00 & \text{se } 50 < w \leqslant 100 \\ 3{,}70 & \text{se } 100 < w \leqslant 150 \\ 4{,}00 & \text{se } 150 < w \leqslant 200 \end{cases}$$

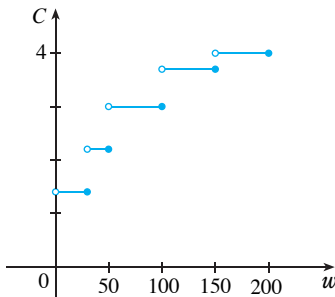



FIGURA 18

O gráfico é mostrado na Figura 18. Você pode entender então por que as funções similares a esta são chamadas **funções escada** – elas pulam de um valor para o próximo. Essas funções serão estudadas no Capítulo 2. □

SIMETRIAS

Se uma função f satisfizer $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, então f é chamada **função par**. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é par, pois

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

O significado geométrico de uma função ser par é que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y (veja a Figura 19). Isso significa que se fizermos o gráfico de f para $x \geqslant 0$, então, para obter o gráfico inteiro, basta refletir esta parte em torno do eixo y.

Se f satisfizer $f(-x) = -f(x)$ para todo número x em seu domínio, dizemos que f é uma **função ímpar**. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ é ímpar, pois

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

FIGURA 19
Uma função par

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem (veja a Figura 20). Se já tivermos o gráfico de f para $x \geqslant 0$, poderemos obter o restante do gráfico girando esta parte 180º em torno da origem.

EXEMPLO 11 Determine se a função é par, ímpar ou nenhum dos dois.

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUÇÃO

(a)

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

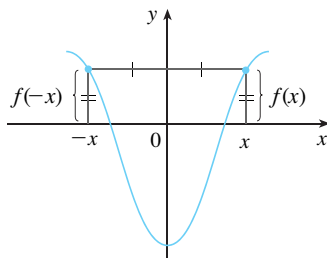
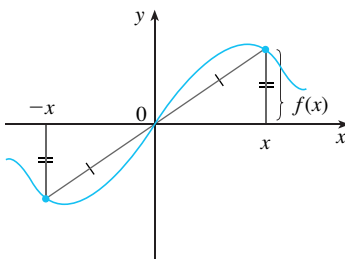



FIGURA 20
Uma função ímpar

Portanto, f é uma função ímpar.

(b) $$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

Assim, g é par.

(c) $$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$, concluímos que h não é par nem ímpar. □

Os gráficos das funções do Exemplo 11 estão na Figura 21. Observe que o gráfico de h não é simétrico em relação ao eixo y nem em relação à origem.

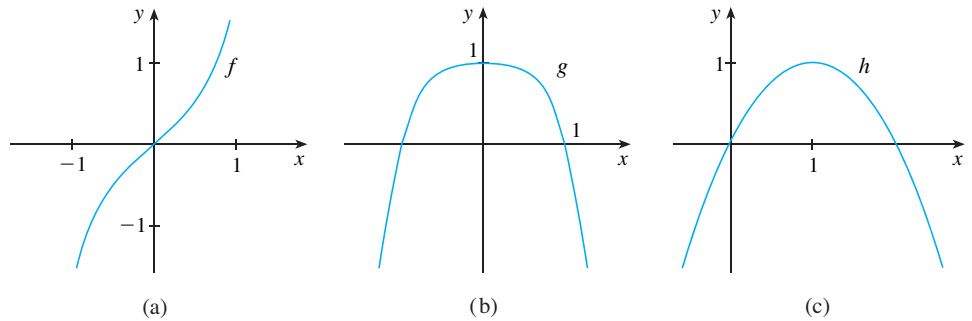



FIGURA 21

FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES

O gráfico da Figura 22 se eleva de A para B, cai de B para C, e sobe novamente de C para D. Dizemos que a função f é crescente no intervalo $[a, b]$, decrescente em $[b, c]$, e novamente crescente em $[c, d]$. Observe que se x_1 e x_2 forem dois números quaisquer entre a e b com $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Vamos usar isso como a propriedade que define uma função crescente.

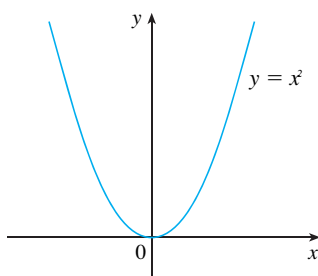



FIGURA 22

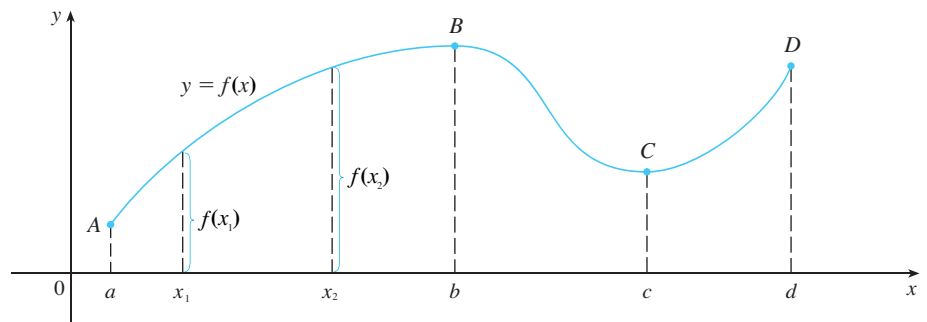



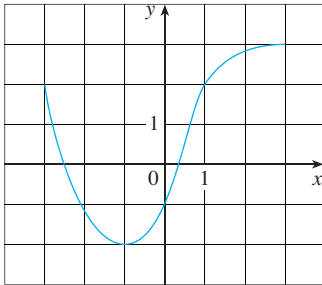
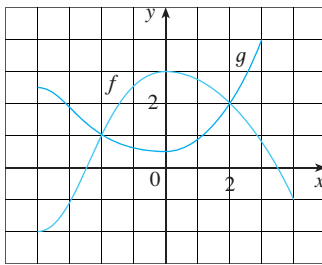
FIGURA 23

> Uma função f é chamada **crescente** em um intervalo I se
>
> $$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 < x_2 \text{ em } I$$
>
> Ela é denominada **decrescente** em I se
>
> $$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 < x_2 \text{ em } I$$

Na definição de função crescente é importante compreender que a desigualdade $f(x_1) < f(x_2)$ deve estar satisfeita para *todo* par de números x_1 e x_2 em I com $x_1 < x_2$.

Você pode ver que na Figura 23 a função $f(x) = x^2$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente no intervalo $[0, \infty)$.

1.1 EXERCÍCIOS

1. Dado o gráfico de uma função f:
(a) Obtenha o valor de $f(-1)$.
(b) Estime o valor de $f(2)$.
(c) $f(x) = 2$ para quais valores de x?
(d) Estime os valores de x para os quais $f(x) = 0$.
(e) Obtenha o domínio e a imagem de f.
(f) Em qual intervalo f é crescente?

2. Dados os gráficos de f e g:
(a) Obtenha os valores de $f(-4)$ e $g(3)$.
(b) $f(x) = g(x)$ para quais valores de x?
(c) Estime a solução da equação $f(x) = -1$.
(d) Em qual intervalo f é decrescente?
(e) Dê o domínio e a imagem de f.
(f) Obtenha o domínio e a imagem de g.

3. A Figura 1 foi registrada por um instrumento monitorado pelo Departamento de Minas e Geologia da Califórnia pertencente ao Hospital Universitário do Sul da Califórnia, em Los Angeles. Use-a para estimar a imagem da função da aceleração vertical do solo na USC durante o terremoto de Northridge.

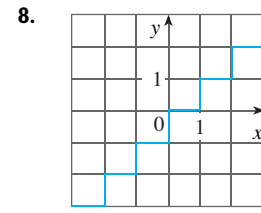
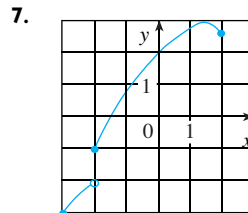
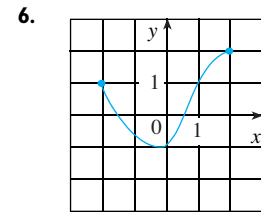
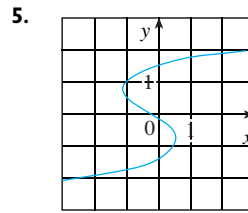
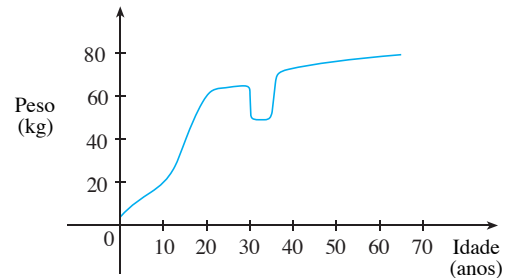
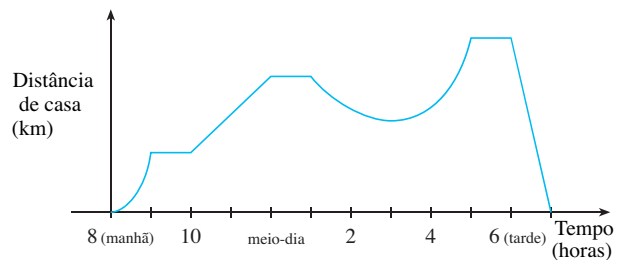
4. Nesta seção discutimos exemplos de funções no dia a dia, como: a população em função do tempo; o custo da franquia postal em função do peso; a temperatura da água em função do tempo. Dê três novos exemplos de funções cotidianas que possam ser descritas verbalmente. O que você pode dizer sobre o domínio e a imagem de cada uma dessas funções? Se possível, esboce um gráfico para cada uma delas.

5-8 Determine se a curva dada é o gráfico de uma função de x. Se for o caso, obtenha o domínio e a imagem da função.

5.

6.

7.

8.

9. O gráfico mostra o peso de uma certa pessoa como uma função da idade. Descreva em forma de texto como o peso dessa pessoa varia com o tempo. O que você acha que aconteceu quando essa pessoa tinha 30 anos?

10. O gráfico mostra a distância que um caixeiro-viajante está de sua casa em um certo dia, como uma função do tempo. Descreva em palavras o que o gráfico indica sobre suas andanças nesse dia.

11. Ponha cubos de gelo em um copo, encha-o com água fria e deixe-o sobre uma mesa. Descreva como vai variar no tempo a temperatura da água. Esboce então um gráfico da temperatura da água como uma função do tempo decorrido.

12. Esboce um gráfico do número de horas diárias de luz do sol como uma função do tempo no decorrer de um ano.

13. Esboce um gráfico da temperatura externa como uma função do tempo durante um dia típico de primavera.

14. Esboce um gráfico do valor de mercado de um carro novo como função do tempo por um período de 20 anos. Suponha que ele esteja bem conservado.

15. Esboce o gráfico da quantidade de uma marca particular de café vendida por uma loja como função do preço do café.

16. Coloque uma torta gelada em um forno e asse-a por uma hora. Então tire-a do forno e deixe-a esfriar antes de comê-la. Descreva como varia no tempo a temperatura da torta. Esboce um gráfico da temperatura da torta como uma função do tempo.

17. Um homem apara seu gramado toda quarta-feira à tarde. Esboce o gráfico da altura da grama como uma função do tempo no decorrer de um período de quatro semanas.

18. Um avião vai de um aeroporto a outro em uma hora, e a distância entre eles é de 400 km. Se t representa o tempo em minutos desde a partida do avião, seja $x(t)$ a distância horizontal percorrida e $y(t)$ a altura do avião.
(a) Esboce um possível gráfico de $x(t)$.
(b) Esboce um possível gráfico de $y(t)$.
(c) Esboce um possível gráfico da velocidade no solo.
(d) Esboce um possível gráfico da velocidade vertical.

19. Uma estimativa anual do número N (em milhões) de assinantes de telefones celulares no mundo é mostrada na tabela. (São dadas estimativas para meados do ano.)

t	1990	1992	1994	1996	1998	2000
N	11	26	60	160	340	650

(a) Use os dados da tabela para esboçar o gráfico de N como uma função t.
(b) Use seu gráfico para estimar o número de assinantes de telefones celulares nos anos de 1995 e 1999.

20. Os registros de temperatura T (em ºC) foram tomados de duas em duas horas a partir da meia-noite até as 15 horas, em Montreal, em 13 de junho de 2004. O tempo foi medido em horas após a meia-noite.

t	0	3	6	9	12	15
T	21,5	19,8	20,0	22,2	24,8	25,8

(a) Use os registros para esboçar um gráfico de T como uma função de t.
(b) Use seu gráfico para estimar a temperatura às 11 horas da manhã.

21. Se $f(x) = 3x^2 - x + 2$, encontre $f(2), f(-2), f(a), f(-a), f(a+1), 2f(a), f(2a), f(a^2), [f(a)]^2$ e $f(a+h)$.

22. Um balão esférico com raio de r centímetros tem o volume $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encontre uma função que represente a quantidade de ar necessária para inflar o balão de um raio r até um raio $r + 1$ centímetros.

23–26 Calcule o quociente das diferenças para a função dada. Simplifique sua resposta.

23. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

24. $f(x) = x^3$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

26. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

27–31 Encontre o domínio da função.

27. $f(x) = \dfrac{x}{3x - 1}$,

28. $f(x) = \dfrac{5x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

29. $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$

30. $g(u) = \sqrt{u} + \sqrt{4 - u}$

31. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

32. Encontre o domínio e a imagem e esboce o gráfico da função $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

33–44 Encontre o domínio e esboce o gráfico da função.

33. $f(x) = 5$

34. $F(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$

35. $f(t) = t^2 - 6t$

36. $H(t) = \dfrac{4 - t^2}{2 - t}$

37. $g(x) = \sqrt{x - 5}$

38. $F(x) = |2x + 1|$

39. $G(x) = \dfrac{3x + |x|}{x}$

40. $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

41. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{se } x \leqslant 2 \\ 2x - 5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} x + 9 & \text{se } x < -3 \\ -2x & \text{se } |x| \leqslant 3 \\ -6 & \text{se } x > 3 \end{cases}$

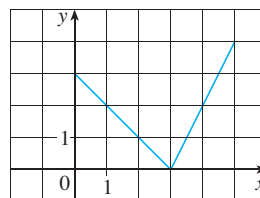
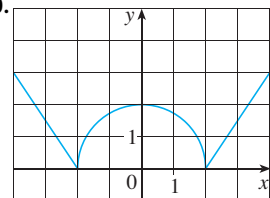
45–50 Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva dada.

45. O segmento de reta unindo os pontos $(1, -3)$ e $(5, 7)$.

46. O segmento de reta unindo os pontos $(-5, 10)$ e $(7, -10)$.

47. A metade inferior da parábola $x + (y - 1)^2 = 0$.

48. A metade superior do círculo $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

49.

50.

51–55 Encontre uma fórmula para a função descrita e obtenha seu domínio.

51. Um retângulo tem um perímetro de 20 metros. Expresse a área do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

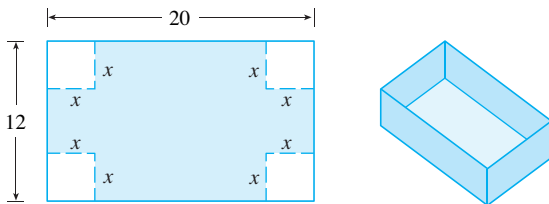
52. Um retângulo tem uma área de 16 m^2. Expresse o perímetro do retângulo como uma função do comprimento de um de seus lados.

53. Expresse a área de um triângulo equilátero como uma função do comprimento de um lado.

54. Expresse a área da superfície de um cubo como uma função de seu volume.

55. Uma caixa retangular aberta com volume de 2 m^3 tem uma base quadrada. Expresse a área da superfície da caixa como uma função do comprimento de um lado da base.

56. Uma janela normanda tem um formato de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo. Se o perímetro da janela for de 10 m, expresse a área A da janela como uma função de sua largura x.

57. Uma caixa sem tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 12 cm por 20 cm. Para isso, devem-se cortar quadrados de lados x de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura. Expresse o volume V da caixa como uma função de x.

58. Uma companhia de táxi cobra $ 2 pelo primeiro quilômetro (ou parte de quilômetro) e 20 centavos a cada décimo de quilômetro adicional (ou parte disso). Expresse o custo C (em dólares) de uma corrida como uma função da distância x percorrida (em quilômetros) para $0 < x < 2$ e esboce o gráfico desta função.

59. Em um certo país, o imposto de renda é taxado da maneira a seguir. Não há taxa para rendimentos até $ 10 000. Qualquer renda acima de $ 10 000 e abaixo de $ 20 000 é taxada em 10%. Qualquer renda acima de $ 20 000 é taxada em 15%.

(a) Esboce o gráfico da taxa de impostos R como uma função da renda I.

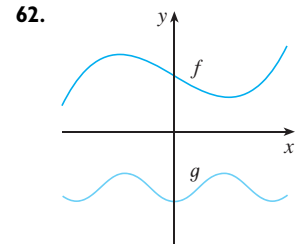
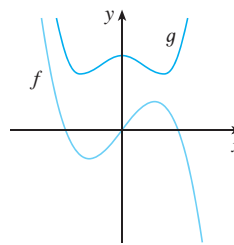
(b) Qual o imposto cobrado sobre um rendimento de $ 14 000? E sobre $ 26 000?

(c) Esboce o gráfico do imposto total cobrado T como uma função da renda I.

60. As funções no Exemplo 10 e nos Exercícios 58 e 59(a) são chamadas *funções escada*, em virtude do aspecto de seus gráficos. Dê dois outros exemplos de funções escada que aparecem no dia a dia.

61–62 Os gráficos de f e de g são mostrados a seguir. Verifique se cada função é par, ímpar ou nem par nem ímpar. Explique seu raciocínio.

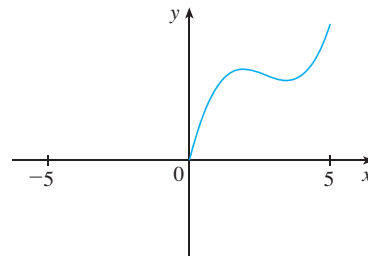
61.

62.

63. (a) Se o ponto (5, 3) estiver no gráfico de uma função par, que outro ponto também deverá estar no gráfico?

(b) Se o ponto (5, 3) estiver no gráfico de uma função ímpar, que outro ponto deverá também estar no gráfico?

64. Uma função f tem o domínio $[-5, 5]$ e é mostrada uma parte do seu gráfico.

(a) Complete o gráfico de f sabendo que ela é uma função par.

(b) Complete o gráfico de f sabendo que ela é uma função ímpar.

65–70 Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois. Se você tiver uma calculadora gráfica, use-a para verificar visualmente sua resposta.

65. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

66. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

67. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

68. $f(x) = x|x|$

69. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

70. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

1.2 MODELOS MATEMÁTICOS: UMA LISTA DE FUNÇÕES ESSENCIAIS

Um **modelo matemático** é a descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real, como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução de poluentes. O propósito desses modelos é entender o fenômeno e talvez fazer previsões sobre seu comportamento futuro.

A Figura 1 ilustra o processo de modelagem matemática. Dado um problema do mundo real, nossa primeira tarefa é formular um modelo matemático por meio da identificação e especificação das variáveis dependentes e independentes e da formulação de hipóteses que simplifiquem o fenômeno o suficiente, tornando-o matematicamente tratável. Usamos nosso conhecimento da situação física e nossos recursos matemáticos para obter equações que relacionem as variáveis. Em situações em que não existe uma lei física para nos guiar, pode ser necessário coletar dados (de uma biblioteca, da Internet ou conduzindo nossas próprias experiências) e examiná-los na forma de uma tabela, a fim de perceber os padrões. Dessa representação numérica de uma função podemos obter sua representação gráfica marcando os dados. Esse gráfico pode até sugerir a fórmula algébrica apropriada, em alguns casos.

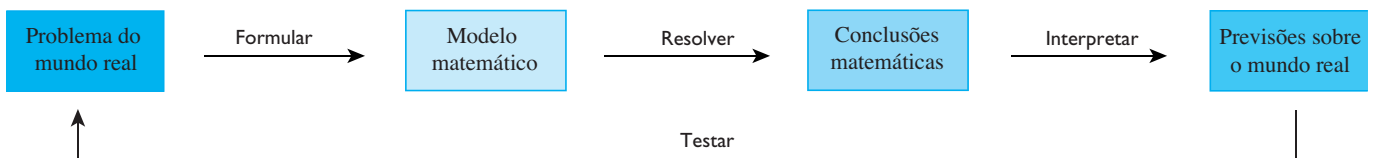



FIGURA 1
Processo de modelagem

O segundo estágio é aplicar a matemática que sabemos (tal como o cálculo a ser desenvolvido neste livro) ao modelo matemático que formulamos, a fim de tirar conclusões matemáticas. Então, em um terceiro estágio, interpretamos essas conclusões matemáticas como informações sobre o fenômeno original e oferecemos explicações ou fazemos previsões. A etapa final é testar nossas previsões, comparando-as com novos dados reais. Se as previsões não se ajustam bem à realidade, precisamos refinar nosso modelo ou formular um novo, começando novamente o ciclo.

Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física — é uma *idealização*. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza.

Existem vários tipos diferentes de funções que podem ser usados para modelar as relações observadas no mundo real. A seguir, discutiremos o comportamento e os gráficos dessas funções e daremos exemplos de situações modeladas apropriadamente por elas.

MODELOS LINEARES

■ A revisão de geometria em coordenadas das retas está no Apêndice B.

Quando dizemos que y é uma **função linear** de x, queremos dizer que o gráfico da função é uma reta; assim, podemos usar a forma inclinação-intersecção da equação de uma reta para escrever uma fórmula para esta função, ou seja

$$y = f(x) = mx + b$$

onde m é o coeficiente angular da reta e b é a intersecção com o eixo y.

Uma característica peculiar das funções lineares é que elas variam a uma taxa constante. Por exemplo, a Figura 2 mostra o gráfico da função linear $f(x) = 3x - 2$ e uma tabela de valores amostrais. Observe que quando x sofre um aumento de 0,1, o valor de $f(x)$ se eleva em 0,3. Dessa forma, $f(x)$ cresce três vezes mais rápido que x. Assim, a inclinação do gráfico de $y = 3x - 2$, isto é, 3, pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x.

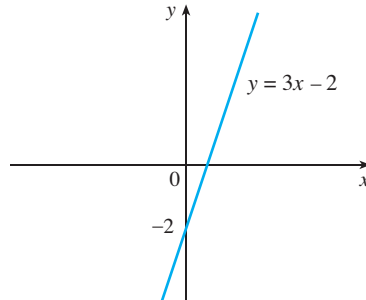



FIGURA 2

x	$f(x) = 3x - 2$
1,0	1,0
1,1	1,3
1,2	1,6
1,3	1,9
1,4	2,2
1,5	2,5

EXEMPLO 1
(a) À medida que o ar seco move-se para cima, ele se expande e esfria. Se a temperatura do solo for de 20° C e a temperatura a uma altitude de 1 km for de 10º C, expresse a temperatura T (em °C) como uma função da altitude h (em km), supondo que um modelo linear seja apropriado.
(b) Faça um gráfico da função na parte (a). O que representa a inclinação?
(c) Qual é a temperatura a 2,5 km de altura?

SOLUÇÃO
(a) Como estamos supondo que T é uma função linear de h, podemos escrever

$$T = mh + b$$

Nos é dado que $T = 20$ quando $h = 0$, assim,

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

Em outras palavras, a intersecção com o eixo y é $b = 20$.

Também nos é dado que $T = 10$ quando $h = 1$, dessa forma,

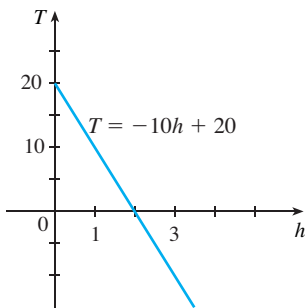
$$10 = m \cdot 1 + 20$$

A inclinação da reta é, portanto, $m = 10 - 20 = -10$ e a função linear procurada é

$$T = -10h + 20$$

FIGURA 3

(b) O gráfico está esboçado na Figura 3. A inclinação é igual a $m = -10$ °C/km e representa a taxa de variação da temperatura em relação à altura.
(c) A uma altitude de $h = 2{,}5$ km, a temperatura é,

$$T = -10(2.5) + 20 = -5°C$$ □

Se não existir uma lei física ou princípio que nos ajude a formular o modelo, construímos um **modelo empírico**, inteiramente baseado em dados coletados. Procuramos uma curva que se ajuste aos dados, no sentido de que ela capte a tendência dos pontos dados.

EXEMPLO 2 A Tabela 1 fornece uma lista de níveis médios de dióxido de carbono na atmosfera, medidos em partes por milhão no Observatório de Mauna Loa em Hilo, no Havaí, de 1980 a 2002. Use os dados da Tabela 1 para encontrar um modelo para o nível de dióxido de carbono.

SOLUÇÃO Vamos usar os dados da tabela para fazer o diagrama de dispersão na Figura 4, onde t representa o tempo (em anos) e C, o nível de CO_2 (em ppm).

TABELA 1

Ano	Nível de CO_2 (em ppm)	Ano	Nível de CO_2 (em ppm)
1980	338,7	1992	356,4
1982	341,1	1994	358,9
1984	344,4	1996	362,6
1986	347,2	1998	366,6
1988	351,5	2000	369,4
1990	354,2	2002	372,9

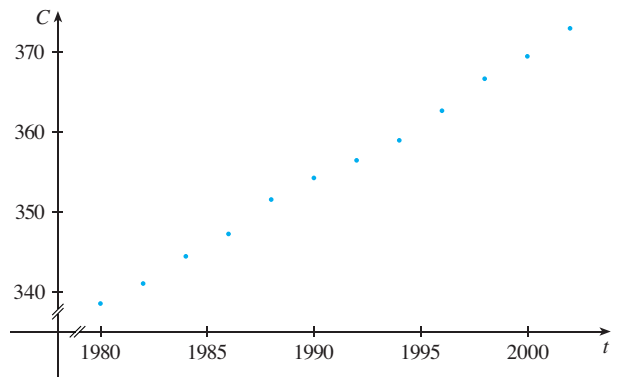



FIGURA 4 Diagrama de dispersão para o nível médio de CO_2

Observe que os pontos estão muito próximos de uma reta; dessa forma, é natural escolher um modelo linear nesse caso. Porém, há inúmeras possibilidades de retas para aproximar esses pontos. Qual deveríamos usar? Do gráfico, vemos que uma possibilidade é a reta que passa pelo primeiro e o último pontos dados. A inclinação dessa reta é

$$\frac{372{,}9 - 338{,}7}{2002 - 1980} = \frac{34{,}2}{22} \approx 1{,}5545$$

e sua equação é

$$C - 338{,}7 = 1{,}5545(t - 1980)$$

ou

$$C = 1{,}5545t - 2\,739{,}21 \tag{1}$$

A Equação 1 fornece um modelo linear possível para o nível de dióxido de carbono; seu gráfico está mostrado na Figura 5.

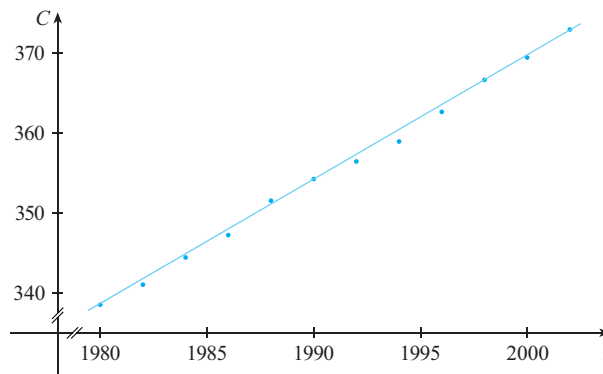



FIGURA 5
Modelo linear pelo primeiro e último pontos dados

Embora nosso modelo se ajuste razoavelmente aos dados, ele dá valores mais altos que a maior parte dos níveis reais de CO_2. Um modelo linear melhor seria obtido por meio de um procedimento da estatística chamado *regressão linear*. Se utilizarmos uma calculadora gráfica, inserimos os dados da Tabela 1 no editor de dados e escolhemos o comando de regressão linear. (Com o Maple usamos o comando fit[leastsquare]; com o

■ Um computador ou uma calculadora gráfica encontra a reta de regressão pelo Método dos Mínimos Quadráticos, que minimiza a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os pontos dados e a reta. Os detalhes serão esclarecidos na Seção 14.7, no Volume II.

Mathematica empregamos o comando Fit.) A máquina dá a inclinação e a intersecção com o eixo y da reta de regressão como

$$m = 1{,}55192 \qquad b = -2\,734{,}55$$

Assim, nosso modelo de mínimos quadrados para o nível de CO_2 é

$$C = 1{,}55192t - 2\,734{,}55 \tag{2}$$

Na Figura 6 fizemos o gráfico da reta de regressão e marcamos os pontos dados. Comparando-a com a Figura 5 vemos que ela fornece um ajuste melhor que o anterior para nosso modelo linear.

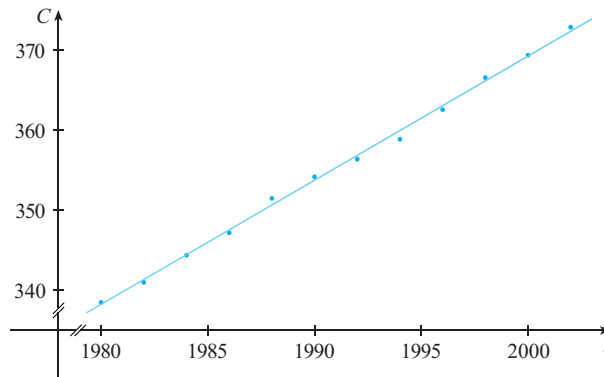



FIGURA 6
Reta de regressão

□

EXEMPLO 3 Use o modelo linear dado pela Equação 2 para estimar o nível médio de CO_2 em 1987 e predizer o nível para o ano de 2010. De acordo com esse modelo, quando o nível de CO_2 excederá 400 ppm?

SOLUÇÃO Usando a Equação 2 com $t = 1987$, estimamos que o nível médio de CO_2 era

$$C(1987) = (1{,}55192)(1987) - 2\,734{,}55 \approx 349{,}12$$

Esse é um exemplo de *interpolação*, pois estimamos um valor *entre* e valores observados. (De fato, o Observatório de Mauna Loa registrou em 1987 um nível médio de CO_2 de 348,93 ppm; assim, nossa estimativa é bem precisa.)

Com $t = 2010$, obtemos

$$C(2010) = (1{,}55192)(2010) - 2\,734{,}55 \approx 384{,}81$$

Prevemos então que o nível médio de CO_2 no ano de 2010 será de 384,8 ppm. Esse é um exemplo de *extrapolação*, pois prevemos um valor *fora* da região de observações. Consequentemente, temos menos certeza da precisão dessa nossa previsão.

Usando a Equação 2, vemos que o nível de CO_2 excederá 400 ppm quando

$$1{,}55192t - 2\,734{,}55 > 400$$

Resolvendo essa desigualdade, obtemos

$$t > \frac{3\,134{,}55}{1{,}55192} \approx 2\,019{,}79$$

Portanto, prevemos que o nível de CO_2 vai exceder 400 ppm no ano 2019. Essa previsão é um pouco arriscada, pois envolve um tempo bem distante de nossas observações. □

POLINÔMIOS

Uma função P é denominada **polinômio** se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo e os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes chamadas **coeficientes** do polinômio. O domínio de qualquer polinômio é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Se o coeficiente dominante $a_n \neq 0$, então o **grau** do polinômio é n. Por exemplo, a função

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

é um polinômio de grau 6.

Um polinômio de grau 1 é da forma $P(x) = mx + b$ e, portanto, é uma função linear. Um polinômio de grau 2 é da forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ e é chamado **função quadrática**. O gráfico de P é sempre uma parábola obtida por translações da parábola $y = ax^2$, conforme veremos na próxima seção. A parábola abre-se para cima se $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$. (Veja a Figura 7.)

(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

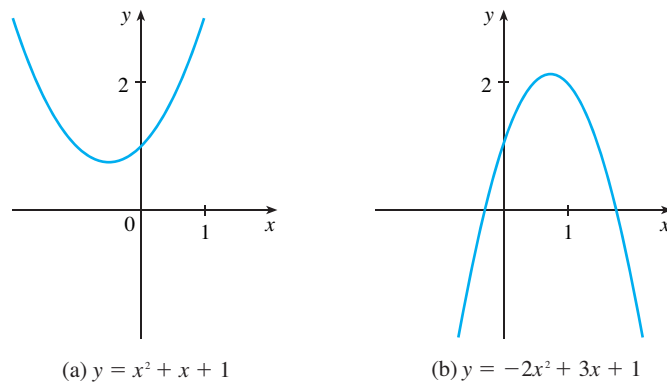



FIGURA 7
Os gráficos de funções quadráticas são parábolas

Um polinômio de grau 3 tem a forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

e é chamado **função cúbica**. A Figura 8 mostra o gráfico de uma função cúbica na parte (a) e os gráficos de polinômios de grau 4 e 5 nas partes (b) e (c). Veremos adiante por que os gráficos têm esses aspectos.

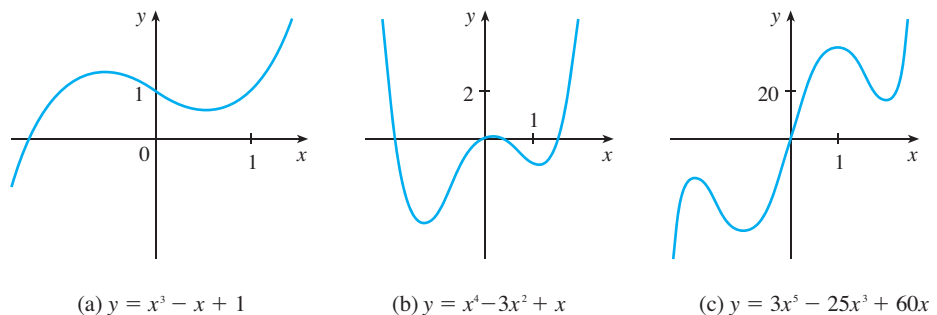



FIGURA 8
(a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Os polinômios são usados comumente para modelar diversas quantidades que ocorrem em ciências sociais e naturais. Por exemplo, na Seção 3.7 explicaremos por que os economistas frequentemente usam um polinômio $P(x)$ para representar o custo da produção de x unidades de um produto. No exemplo a seguir vamos usar uma função quadrática para modelar a queda de uma bola.

TABELA 2

Tempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

EXEMPLO 4 Uma bola é solta a partir do posto de observação no topo da Torre CN, 450 m acima do chão, e sua altura h acima do solo é registrada em intervalos de 1 segundo na Tabela 2. Encontre um modelo para ajustar os dados e use-o para predizer o tempo após o qual a bola atinge o chão.

SOLUÇÃO Vamos fazer um diagrama de dispersão na Figura 9 e observar que um modelo linear não é apropriado. Parece que os pontos podem estar sobre uma parábola; assim, vamos tentar um modelo quadrático. Usando uma calculadora gráfica ou um SCA (que usa o método dos mínimos quadrados), obtemos o seguinte modelo quadrático:

$$h = 449{,}36 + 0{,}96t - 4{,}90t^2 \qquad \boxed{3}$$

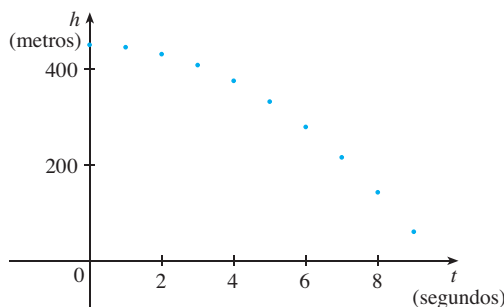



FIGURA 9
Diagrama de dispersão para uma bola caindo

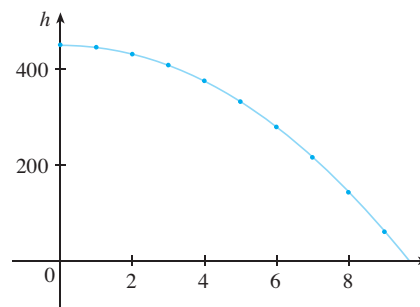



FIGURA 10
Modelo quadrático para uma bola caindo

Na Figura 10 fizemos um gráfico da Equação 3 a partir dos pontos dados e vimos que o modelo quadrático é adequado.

A bola atinge o chão quando $h = 0$, e assim resolvemos a equação quadrática

$$-4{,}90t^2 + 0{,}96t + 449{,}36 = 0$$

A fórmula quadrática fornece

$$h = \frac{-0{,}96 \pm \sqrt{(0{,}96)^2 - 4(-4{,}90)(449{,}36)}}{2(-4{,}90)}$$

A raiz positiva é $t \approx 9{,}67$; dessa forma, predizemos que a bola vai atingir o chão após 9,7 segundos. □

FUNÇÕES POTÊNCIAS

Uma função da forma $f(x) = x^a$, onde a é uma constante, é chamada **função potência**. Vamos considerar vários casos.

(i) $a = n$, onde n é um inteiro positivo

Os gráficos de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5 estão na Figura 11. (Esses são polinômios com um só termo). Já conhecíamos os gráficos de $y = x$ (uma reta passando pela origem, com inclinação 1) e $y = x^2$ [uma parábola – veja o Exemplo 2(b) da Seção 1.1].

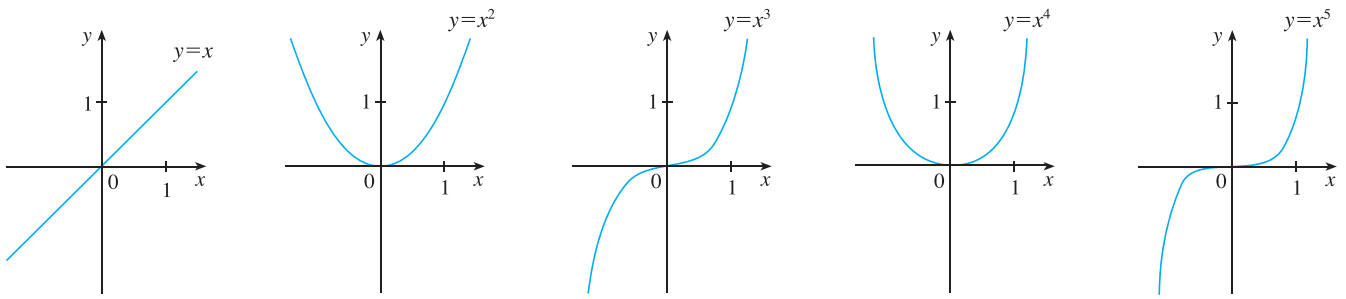



FIGURA 11 Gráficos de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5

A forma geral do gráfico de $f(x) = x^n$ depende de n ser par ou ímpar. Se n for par, então $f(x) = x^n$ será uma função par e seu gráfico é similar ao da parábola $y = x^2$. Se n for ímpar, então $f(x) = x^n$ será uma função ímpar e seu gráfico é similar ao de $y = x^3$. Observe na Figura 12, porém, que à medida que n cresce, o gráfico de $y = x^n$ torna-se mais achatado quando próximo de zero e mais inclinado quando $|x| \geqslant 1$. (Se x for pequeno, então x^2 é menor; x^3 será ainda menor; e x^4 será muito menor, e assim por diante.)

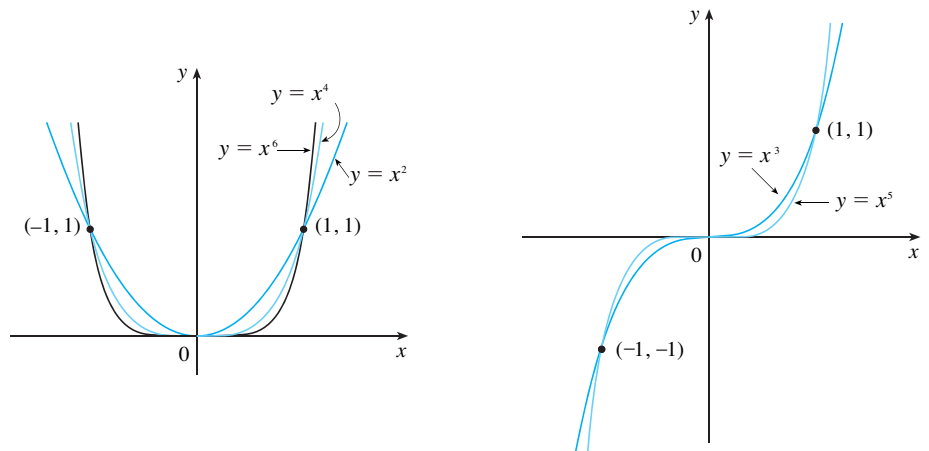



FIGURA 12
Famílias de funções potências

(ii) $a = 1/n$**, onde** n **é um inteiro positivo**

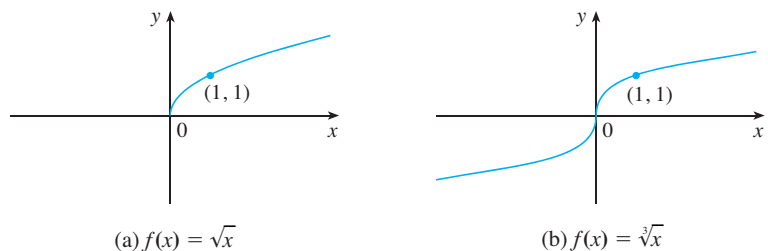
A função $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ é uma **função raiz**. Para $n = 2$, ela é a função raiz quadrada $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é $[0, \infty)$ e cujo gráfico é a parte superior da parábola $x = y^2$ [veja a Figura 13(a)]. Para outros valores pares de n, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ é similar ao de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$, temos a função raiz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cujo domínio é $\mathbb{R}$ (lembre-se de que todo número real tem uma raiz cúbica) e cujo gráfico está na Figura 13(b). O gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ para n ímpar $(n > 3)$ é similar ao de $y = \sqrt[3]{x}$.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

FIGURA 13
Gráficos das funções raízes

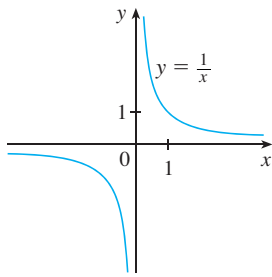



FIGURA 14
A função recíproca

(iii) $a = -1$

O gráfico da **função recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$ está na Figura 14. Seu gráfico tem a equação $y = 1/x$, ou $xy = 1$, e é uma hipérbole com os eixos coordenados como suas assíntotas. Esta função aparece em física e química em conexão com a Lei de Boyle, que afirma que, sendo constante a temperatura, o volume de um gás é inversamente proporcional à pressão:

$$V = \frac{C}{P}$$

onde C é uma constante. Assim, o gráfico de V como uma função de P (veja a Figura 15) tem o mesmo aspecto geral da metade à direita da Figura 14.

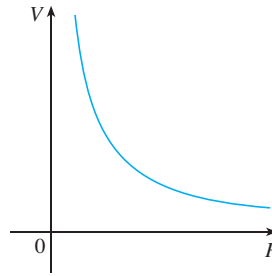



FIGURA 15
Volume como uma função da pressão à temperatura constante

Outro exemplo do uso da função potência na modelagem de um fenômeno físico será discutido no Exercício 26.

FUNÇÕES RACIONAIS

Uma **função racional** f é a razão de dois polinômios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

em que P e Q são polinômios. O domínio consiste em todos os valores de x tais que $Q(x) \neq 0$. Um simples exemplo de uma função racional é a função $f(x) = 1/x$, cujo domínio é $\{x \mid x \neq 0\}$; esta é a função recíproca cujo gráfico está na Figura 14. A função

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

é uma função racional com domínio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. Seu gráfico está na Figura 16.

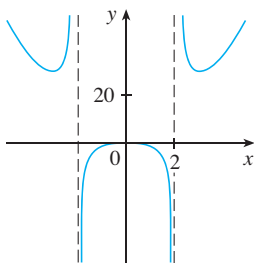



FIGURA 16
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

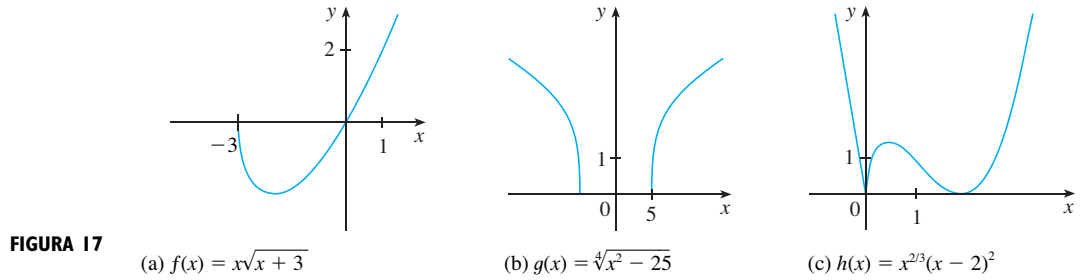
FUNÇÕES ALGÉBRICAS

Uma função f é chamada **função algébrica** se puder ser construída por meio de operações algébricas (como adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes) a partir de polinômios. Toda função racional é automaticamente uma função algébrica. A seguir, alguns exemplos:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Quando trabalharmos com funções algébricas no Capítulo 4, veremos que seus gráficos podem assumir diversas formas. A Figura 17 ilustra algumas dessas possibilidades.

FIGURA 17

(a) $f(x) = x\sqrt{x + 3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x - 2)^2$

Um exemplo de função algébrica ocorre na Teoria da Relatividade. A massa de uma partícula com uma velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

em que m_0 é a massa da partícula em repouso e $c = 3{,}0 \times 10^5$ km/s é a velocidade da luz no vácuo.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

■ As páginas de referência estão localizadas no início e no fim do livro.

Há uma revisão de trigonometria e de funções trigonométricas no Apêndice D. Em cálculo, convenciona-se dar a medida de ângulos em radianos (exceto quando explicitamente mencionado). Por exemplo, se $f(x) = \text{sen}\, x$, entende-se que $\text{sen}\, x$ seja o seno de um ângulo cuja medida em radianos é x. Assim, os gráficos das funções seno e cosseno estão na Figura 18.

(a) $f(x) = \text{sen}\, x$ (b) $g(x) = \cos x$

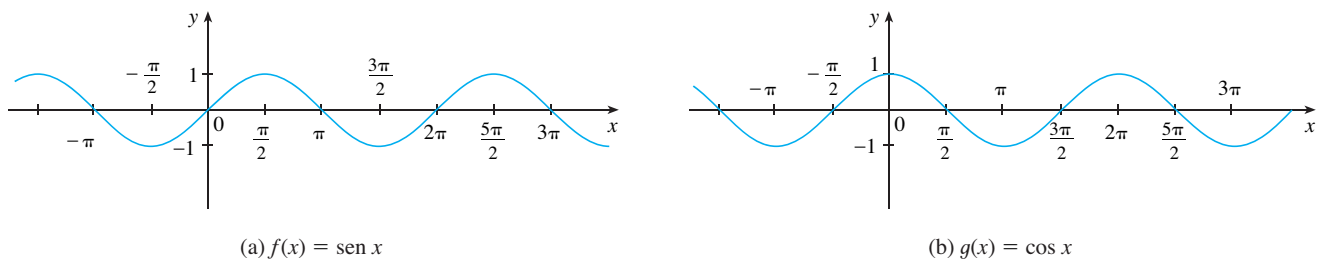



FIGURA 18

Observe que tanto para a função seno quanto para a função cosseno o domínio é $(-\infty, \infty)$, e a imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$. Dessa forma, para todos os valores de x temos

$$-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

ou, em termos de valores absolutos,

$$|\text{sen}\, x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

Além disso, os zeros da função seno ocorrem nos múltiplos inteiros de π; isto é,

$$\text{sen}\, x = 0 \quad \text{quando} \quad x = n\pi, \quad n \text{ é um número inteiro}$$

Uma propriedade importante das funções seno e cosseno é que elas são periódicas, com um período 2π. Isso significa que para todos os valores de x,

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}\, x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

A natureza periódica dessas funções torna-as adequadas à modelagem de fenômenos repetitivos, tais como marés, cordas vibrantes e ondas sonoras. Como ilustração, no Exem-

plo 4 da Seção 1.3 veremos que um modelo razoável para o número de horas de luz solar na Filadélfia t dias após 1º de janeiro é dado pela função

$$L(t) = 12 + 2{,}8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

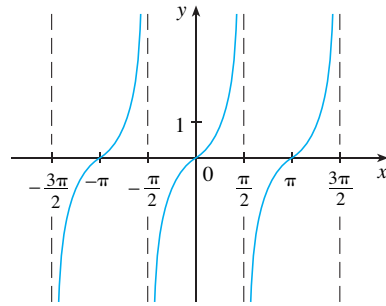
A função tangente relaciona-se com as funções seno e cosseno pela equação

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

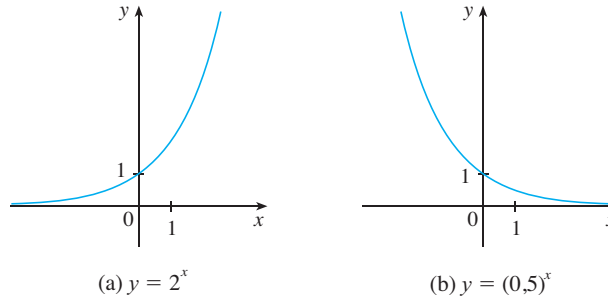
e seu gráfico está na Figura 19. Ela não está definida quando $\cos x = 0$, isto é, quando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$. Sua imagem é $(-\infty, \infty)$. Observe que a função tangente tem período π:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \qquad \text{para todo } x$$

FIGURA 19
$y = \operatorname{tg} x$

As três funções trigonométricas remanescentes (cossecante, secante e cotangente) são as recíprocas das funções seno, cosseno e tangente. Seus gráficos estão no Apêndice D.

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

As **funções exponenciais** são da forma $f(x) = a^x$, em que a base a é uma constante positiva. Os gráficos de $y = 2^x$ e $y = (0{,}5)^x$ estão na Figura 20. Em ambos os casos o domínio é $(-\infty, \infty)$ e a imagem é $(0, \infty)$.

FIGURA 20 (a) $y = 2^x$ (b) $y = (0{,}5)^x$

As funções exponenciais serão estudadas em detalhes na Seção 1.5 e veremos que elas são úteis na modelagem de muitos fenômenos naturais, como crescimento populacional (se $a > 1$) e decaimento radioativo (se $a < 1$).

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

As **funções logarítmicas** $f(x) = \log_a x$, onde a base a é uma constante positiva, são inversas das funções exponenciais e serão estudadas na Seção 1.6. A Figura 21 mostra os gráficos de quatro funções logarítmicas com várias bases. Em cada caso o domínio é $(0, \infty)$, a imagem é $(-\infty, \infty)$ e as funções crescem vagarosamente quando $x > 1$.

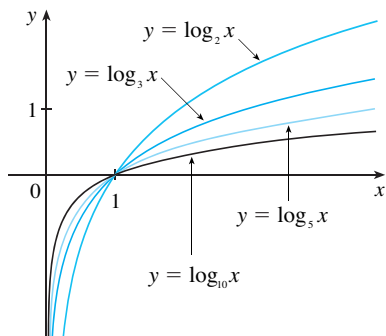



FIGURA 21

FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS

São as funções não algébricas. O conjunto das funções transcendentais inclui as funções trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciais e logarítmicas, mas também inclui

um vasto número de outras funções que não têm nome. No Capítulo 11, no Volume II, estudaremos funções transcendentais que são definidas como a soma de séries infinitas.

EXEMPLO 5 Classifique as funções a seguir como um dos tipos discutidos.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUÇÃO

(a) $f(x) = 5^x$ é uma função exponencial. (x é o expoente.)

(b) $g(x) = x^5$ é a função potência. (x é a base.) Podemos também considerá-la um polinômio de grau 5.

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ é uma função algébrica.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ é um polinômio de grau 4. □

1.2 EXERCÍCIOS

1–2 Classifique cada função como uma função potência, função raiz, função polinomial (estabeleça seu grau), função racional, função algébrica, função trigonométrica, função exponencial ou função logarítmica.

1. (a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ (b) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c) $h(x) = x^9 + x^4$ (d) $r(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x}$

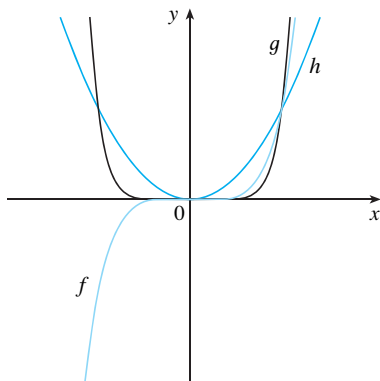
(e) $s(x) = \text{tg}\, 2x$ (f) $t(x) = \log_{10} x$

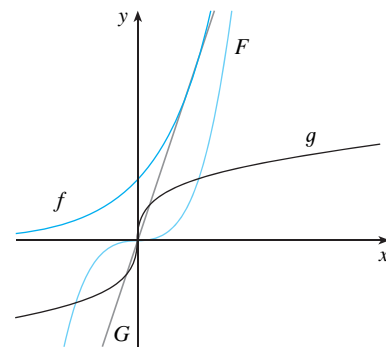
2. (a) $y = \dfrac{x - 6}{x + 6}$ (b) $y = x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x - 1}}$

(c) $y = 10^x$ (d) $y = x^{10}$

(e) $y = 2t^6 + t^4 - \pi$ (f) $y = \cos\theta + \text{sen}\,\theta$

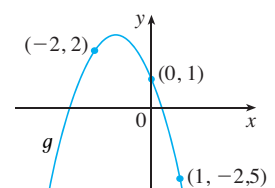
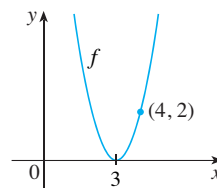
3–4 Associe cada equação a seu gráfico. Explique sua escolha. (Não use computador ou calculadora gráfica.)

3. (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$

4. (a) $y = 3x$ (b) $y = 3^x$

(c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$

5. (a) Encontre uma equação para a família de funções lineares com inclinação 2 e esboce os gráficos de vários membros da família.
(b) Encontre uma equação para a família de funções lineares tais que $f(2) = 1$ e esboce os gráficos de vários membros da família.
(c) Qual função pertence a ambas as famílias?

6. O que todos os membros da família de funções lineares $f(x) = 1 + m(x + 3)$ têm em comum? Esboce o gráfico de vários membros da família.

7. O que todos os membros da família de funções lineares $f(x) = c - x$ têm em comum? Esboce os gráficos de vários membros da família.

8. Encontre expressões para as funções quadráticas cujos gráficos são mostrados abaixo.

9. Encontre uma expressão para uma função cúbica f se $f(1) = 6$ e $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.

10. Estudos recentes indicam que a temperatura média da superfície da Terra vem aumentando continuamente. Alguns cientistas modelaram a temperatura pela função linear $T = 0{,}02t + 8{,}50$, em que T é a temperatura em ºC e t representa o número de anos desde 1900.
(a) O que a inclinação e a intersecção com o eixo T representam?
(b) Use a equação para prever a temperatura média global em 2100.

11. Se a dose recomendada para um adulto de uma medicação é D (em mg), então, para determinar a dosagem apropriada c para uma criança com a anos de idade, os farmacêuticos usam a equação $c = 0{,}0417D(a + 1)$. Suponha que a dosagem para um adulto seja 200 mg.
(a) Encontre a inclinação do gráfico de c. O que ela representa?
(b) Qual é a dosagem para um recém-nascido?

12. Um administrador de bazar de fim de semana sabe por experiência que se cobrar x dólares pelo aluguel de espaço no bazar o número y de espaços que ele conseguirá alugar é dado pela equação $y = 200 - 4x$.
(a) Esboce o gráfico dessa função linear. (Lembre-se de que o aluguel cobrado pelo espaço e o número de espaços alugados não podem ser quantidades negativas.)
(b) O que representam a inclinação, a intersecção com o eixo y e a intersecção com o eixo x?

13. A relação entre as escalas de temperatura Fahrenheit (F) e Celsius (C) é dada pela função linear $F = \frac{9}{5}C + 32$.
(a) Esboce o gráfico dessa função.
(b) O que representa nesse gráfico a inclinação? O que representa a intersecção com o eixo F do gráfico?

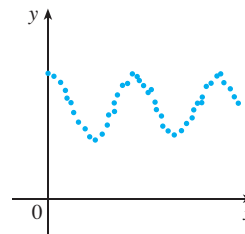
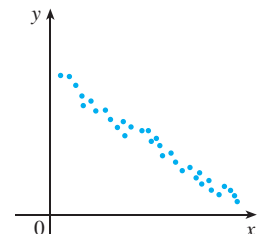
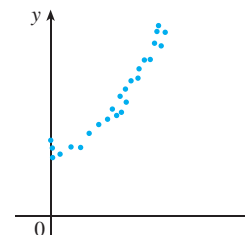
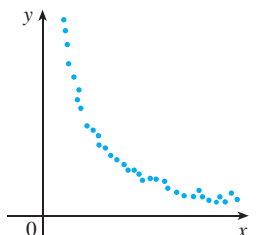
14. Kelly parte de Winnipeg às 14 h e dirige a uma velocidade constante para oeste na rodovia Trans-Canadá. Ela passa por Brandon, a 210 km de Winnipeg, às 16 h.
(a) Expresse a distância percorrida em função do tempo decorrido.
(b) Desenhe o gráfico da equação da parte (a).
(c) Qual é a inclinação desta reta? O que ela representa?

15. Biólogos notaram que a taxa de cricridos de uma certa espécie de grilo está relacionada com a temperatura de uma maneira que aparenta ser quase linear. Um grilo cricrila 112 vezes por minuto a 20 ºC e 180 vezes por minuto a 29 ºC.
(a) Encontre uma equação linear que modele a temperatura T como uma função do número de cricridos por minuto N.
(b) Qual é a inclinação do gráfico? O que ela representa?
(c) Se os grilos estiverem cricrilando 150 vezes por minuto, estime a temperatura.

16. Um administrador de uma fábrica de móveis descobre que custa \$ 2 200 para fabricar 100 cadeiras em um dia e \$ 4 800 para produzir 300 cadeiras em um dia.
(a) Expresse o custo como uma função do número de cadeiras produzidas, supondo que ela seja linear. Então, esboce o gráfico.
(b) Qual a inclinação do gráfico e o que ela representa?
(c) Qual a intersecção com o eixo y do gráfico e o que ela representa?

17. Na superfície do oceano, a pressão da água é igual à do ar acima da água, 1,05 kg/cm^2. Abaixo da superfície, a pressão da água cresce 0,10 kg/cm^2 para cada metro abaixo da superfície.
(a) Expresse a pressão da água como uma função da profundidade abaixo da superfície do oceano.
(b) A que profundidade a pressão é de 7 kg/cm^2?

18. O custo mensal do uso de um carro depende do número de quilômetros rodados. Lia descobriu que em maio ela gastou \$ 380 e guiou 768 km e, em junho, gastou \$ 460 e guiou 1 280 km.
(a) Expresse o custo mensal C como uma função da distância percorrida d, supondo que a relação linear forneça um modelo apropriado.
(b) Use a parte (a) para predizer o custo quando forem percorridos 2 400 km por mês.
(c) Esboce o gráfico da função. O que a inclinação representa?
(d) O que representa a intersecção com o eixo y?
(e) Por que uma função linear é um modelo apropriado nessa situação?

19–20 Para cada diagrama de dispersão, decida qual tipo de função você escolheria como um modelo para os dados. Explique sua escolha.

19. (a) (b)

20. (a) (b)

21. A tabela mostra as taxas de úlcera péptica (medida no decurso de toda vida) a cada 100 habitantes, de várias rendas familiares, conforme divulgado em 1989 pelo National Health Interview Survey.

Renda familiar	Taxa de úlcera (a cada 100 habitantes)
\$ 4 000	14,1
\$ 6 000	13,0
\$ 8 000	13,4
\$ 12 000	12,5
\$ 16 000	12,0
\$ 20 000	12,4
\$ 30 000	10,5
\$ 45 000	9,4
\$ 60 000	8,2

(a) Faça um diagrama de dispersão desses dados e decida se um modelo linear seria apropriado.
(b) Faça um gráfico de modelo linear usando o primeiro e o último pontos.
(c) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão por mínimos quadrados.
(d) Use o modelo linear de (c) para estimar a taxa de úlcera correspondente a uma renda de $ 25 000.
(e) De acordo com o modelo, qual a chance de alguém com uma renda de $ 80 000 sofrer de úlcera péptica?
(f) Você acha razoável aplicar o modelo a alguém com uma renda de $ 200 000?

22. Biólogos observaram que a taxa de cricrido dos grilos de uma certa espécie aparentemente está relacionada com a temperatura. A tabela mostra as taxas de canto para várias temperaturas.

Temperatura (°C)	Taxa de canto (cricrido/min)	Temperatura (°C)	Taxa de canto (cricrido/min)
20	113	30	188
22	128	32	203
24	143	34	218
26	158	36	233
28	173		

(a) Faça um diagrama de dispersão dos dados.
(b) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão.
(c) Use o modelo linear da parte (b) para estimar a taxa de cricridos a 40 ºC.

23. A tabela dá as alturas vencedoras do salto com vara nas Olimpíadas do século XX.

Ano	Altura (m)	Ano	Altura (m)
1900	3,30	1956	4,56
1904	3,50	1960	4,70
1908	3,71	1964	5,10
1912	3,95	1968	5,40
1920	4,09	1972	5,50
1924	3,95	1976	5,50
1928	4,20	1980	5,78
1932	4,31	1984	5,75
1936	4,35	1988	5,90
1948	4,30	1992	5,80
1952	4,55	1996	5,92

(a) Faça um diagrama de dispersão e decida se um modelo linear é apropriado.
(b) Encontre e faça um gráfico da reta de regressão.
(c) Use o modelo linear para predizer qual a altura vencedora nas Olimpíadas de 2000 e compare com a altura vencedora de 5,90 m.
(d) É razoável usar o modelo para predizer a altura vencedora para as Olimpíadas de 2100?

24. A tabela mostra a porcentagem da população da Argentina que vivia em áreas rurais de 1955 a 2000. Encontre um modelo para os dados e use-o para estimar a porcentagem de população rural em 1988 e 2002.

Ano	Porcentagem rural	Ano	Porcentagem rural
1955	30.4	1980	17.1
1960	26.4	1985	15.0
1965	23.6	1990	13.0
1970	21.1	1995	11.7
1975	19.0	2000	10.5

25. Use os dados da tabela para modelar a população mundial no século XX por uma função cúbica. Então, utilize seu modelo para estimar a população no ano de 1925.

Ano	População (milhões)	Ano	População (milhões)
1900	1 650	1960	3 040
1910	1 750	1970	3 710
1920	1.860	1980	4 450
1930	2 070	1990	5 280
1940	2 300	2000	6 080
1950	2 560		

26. A tabela mostra as distâncias médias d dos planetas ao Sol (tomando como unidade de medida a distância da Terra ao Sol) e seus períodos T (tempo de revolução em anos).

Planeta	d	T
Mercúrio	0,387	0,241
Vênus	0,723	0,615
Terra	1,000	1,000
Marte	1,523	1,881
Júpiter	5,203	11,861
Saturno	9,541	29,457
Urano	19,190	84,008
Netuno	30,086	164,784

(a) Ajuste um modelo de função potência aos dados.
(b) A Terceira Lei de Kepler para o Movimento Planetário afirma que

"O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol".

Seu modelo confirma a Terceira Lei de Kepler?

1.3 NOVAS FUNÇÕES A PARTIR DE ANTIGAS

Nesta seção, partimos das funções básicas definidas na Seção 1.2 e obtemos novas funções por deslocamento, expansão ou reflexão de seus gráficos. Vamos mostrar também como combinar pares de funções por meio de operações aritméticas ordinárias e por composição.

TRANSFORMAÇÕES DE FUNÇÕES

Aplicando certas transformações aos gráficos de uma função obtemos o gráfico de funções relacionadas, o que nos capacita a fazer o esboço de muitas funções à mão. Isto nos permite também escrever equações para gráficos dados. Vamos considerar inicialmente as **translações**. Se c for um número positivo, então o gráfico de $y = f(x) + c$ é tão-somente o gráfico de $y = f(x)$ deslocado para cima em c unidades (uma vez que cada coordenada y fica acrescida pelo mesmo número c). Da mesma forma, se fizermos $g(x) = f(x - c)$, onde $c > 0$, então o valor de g em x é igual ao valor de f em $x - c$ (c unidades à esquerda de x). Portanto o gráfico de $y = f(x - c)$ é precisamente o de $y = f(x)$ deslocado c unidades para a direita (veja a Figura 1).

DESLOCAMENTOS VERTICAIS E HORIZONTAIS Suponha que $c > 0$. Para obter o gráfico de

$y = f(x) + c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para cima
$y = f(x) - c$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para baixo
$y = f(x - c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a direita
$y = f(x + c)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades para a esquerda

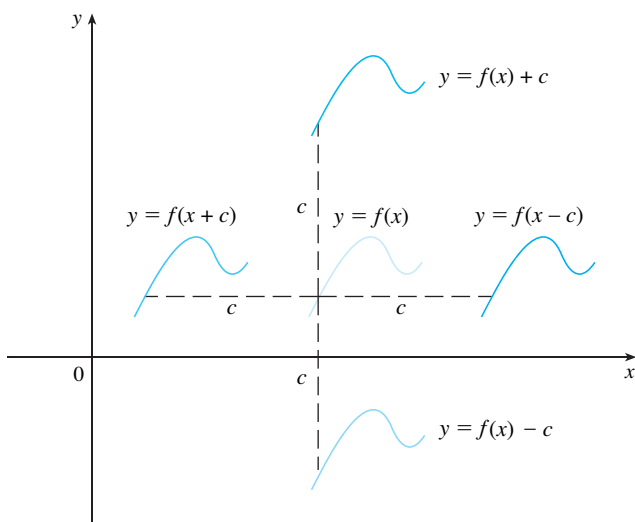



FIGURA 1
Translações do gráfico f

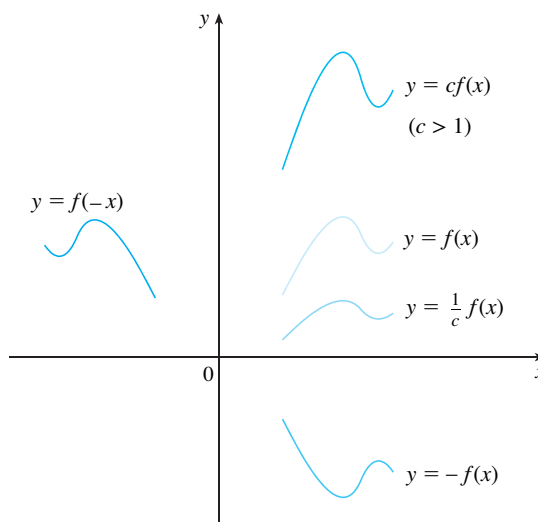



FIGURA 2
Expansões e reflexões do gráfico f

Vamos considerar agora as transformações de **expansão** e **reflexão**. Se $c > 1$, então o gráfico de $y = cf(x)$ é o gráfico de $y = f(x)$ expandido por um fator c na direção vertical (pois cada coordenada y fica multiplicada pelo mesmo número c). O gráfico de $y = -f(x)$ é o gráfico de $y = f(x)$ refletido em torno do eixo x, pois o ponto (x, y) será substituído pelo ponto $(x, -y)$. (Veja a Figura 2 e a tabela a seguir, onde estão os resultados de várias transformações de expansão, compressão e reflexão.)

REFLEXÕES E EXPANSÕES HORIZONTAIS E VERTICAIS Suponha que $c > 1$. Para obter o gráfico de

$y = cf(x)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
$y = (1/c)f(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
$y = f(cx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c
$y = f(x/c)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c
$y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x
$y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y

A Figura 3 ilustra transformações de expansão quando aplicadas à função cosseno com $c = 2$. Por exemplo, para obter o gráfico $y = 2 \cos x$, multiplicamos as coordenadas y de cada ponto do gráfico de $y = \cos x$ por 2. Isso significa que o gráfico de $y = \cos x$ fica expandido verticalmente por um fator de 2.

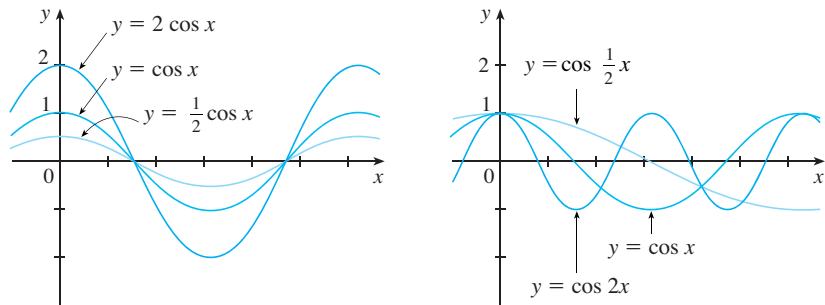



FIGURA 3

EXEMPLO 1 Dado o gráfico de $y = \sqrt{x}$, use transformações para obter os gráficos de $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ e $y = \sqrt{-x}$.

SOLUÇÃO O gráfico da função raiz quadrada $y = \sqrt{x}$, obtido da Figura 13(a) na Seção 1.2, está mostrado na Figura 4(a). Nas outras partes da figura esboçamos $y = \sqrt{x} - 2$ deslocando 2 unidades para baixo; $y = \sqrt{x - 2}$ deslocando 2 unidades para a direita; $y = -\sqrt{x}$ refletindo em torno do eixo x; $y = 2\sqrt{x}$ expandindo verticalmente por um fator de 2; e $y = \sqrt{-x}$ refletindo em torno do eixo y.

(a) $y=\sqrt{x}$ (b) $y=\sqrt{x} - 2$

(c) $y=\sqrt{x-2}$

(d) $y=-\sqrt{x}$

(e) $y=2\sqrt{x}$

(f) $y=\sqrt{-x}$

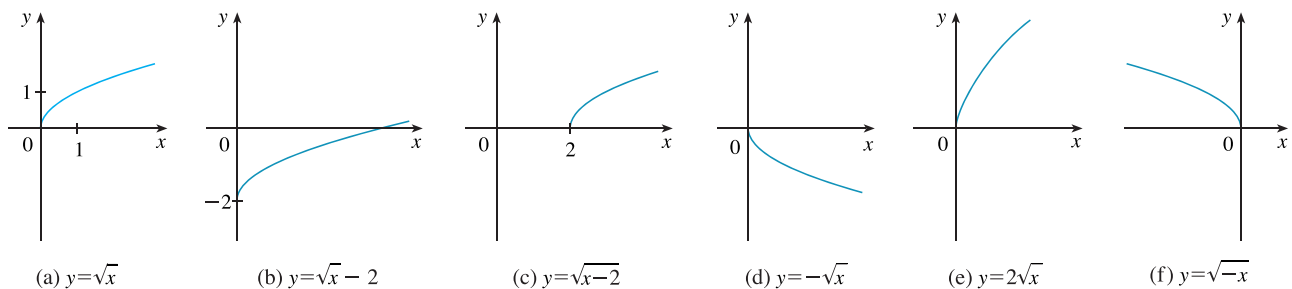



FIGURA 4

□

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUÇÃO Completando o quadrado, escrevemos a equação do gráfico como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Isso significa que obtemos o gráfico desejado começando com a parábola $y = x^2$ e deslocando-a 3 unidades para a esquerda e então 1 unidade para cima (veja a Figura 5).

(a) $y = x^2$

(b) $y = (x + 3)^2 + 1$

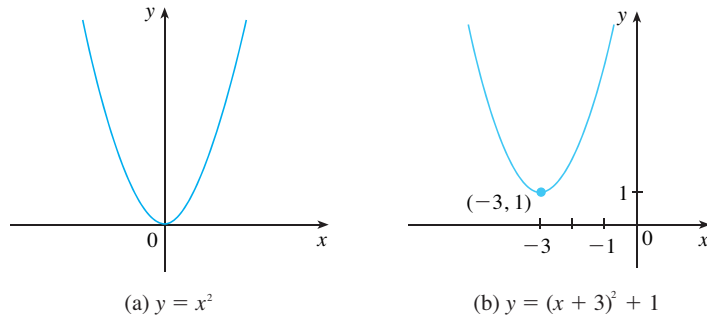



FIGURA 5

□

EXEMPLO 3 Esboce os gráficos das seguintes funções.

(a) $y = \text{sen } 2x$ (b) $y = 1 - \text{sen } x$

SOLUÇÃO

(a) Obtemos o gráfico $y = \text{sen } 2x$ a partir de $y = \text{sen } x$ comprimindo horizontalmente este último por um fator de 2 (veja as Figuras 6 e 7). Assim, enquanto o período de $y = \text{sen } x$ é 2π, o período de $y = \text{sen } 2x$ é $2\pi/2 = \pi$.

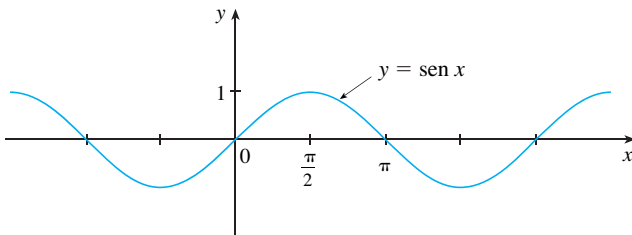



FIGURA 6

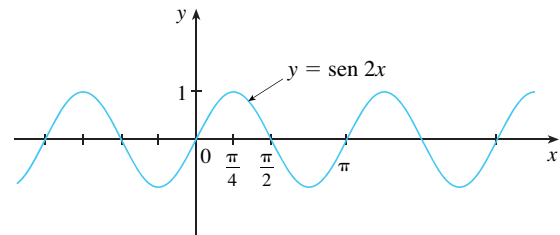
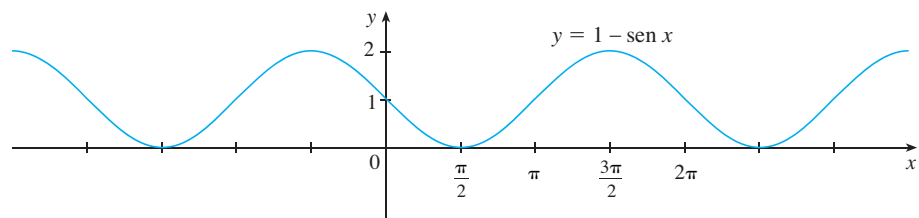



FIGURA 7

(b) Para obter o gráfico de $y = 1 - \text{sen } x$, começamos novamente com $y = \text{sen } x$. Refletimos em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -\text{sen } x$ e então deslocamos uma unidade para cima para obter $y = 1 - \text{sen } x$ (veja a Figura 8).

FIGURA 8

□

EXEMPLO 4 A Figura 9 mostra gráficos do número de horas de luz solar como função da época do ano em diversas latitudes. Dado que Ancara, na Turquia, está localizada a aproximadamente 40 ºN de latitude, encontre uma função que modele a duração da luz solar em Ancara.

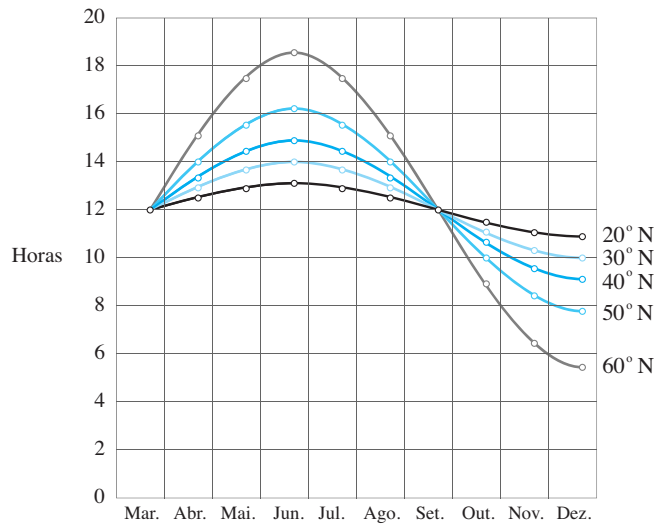



FIGURA 9
Gráfico da duração da luz solar de 21 de março a 21 de dezembro em várias latitudes

Fonte: Lucia C. Harrison. *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (Nova York: Silver, Burdett, 1935, p. 40.)

SOLUÇÃO Observe que cada curva se assemelha à função seno deslocada e expandida. Observando a curva azul, vemos que, na latitude de Ancara, a luz solar dura cerca de 14,8 horas em 21 de junho e 9,2 horas em 21 de dezembro; assim, a amplitude da curva (o fator pelo qual expandimos verticalmente a curva do seno) é $\frac{1}{2}(14{,}8 - 9{,}2) = 2{,}8$.

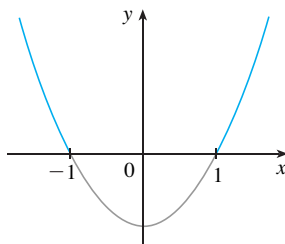
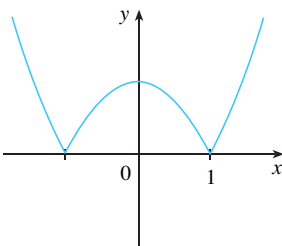
Por qual fator deveremos expandir horizontalmente a curva do seno se a medida do tempo t for em dias? Como temos cerca de 365 dias em um ano, o período de nosso modelo deve ser de 365 dias. Mas o período de $y = \text{sen}\, t$ é 2π; de modo que o fator de expansão horizontal é $c = 2\pi/365$.

Notamos também que a curva começa seu ciclo em 21 de março, 80º dia do ano, e então devemos deslocar a curva 80 unidades para a direita. Além disso, deslocamos 12 unidades para cima. Portanto, modelamos a duração da luz solar em Ancara no dia T do ano pela função

$$L(t) = 12 + 2{,}8\ \text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$ □

(a) $y = x^2 - 1$

(b) $y = |x^2 - 1|$

FIGURA 10

Outra transformação de algum interesse é tomar o valor absoluto de uma função. Se $y = |f(x)|$, então, de acordo com a definição de valor absoluto, $y = f(x)$ quando $f(x) \geqslant 0$ e $y = -f(x)$ quando $f(x) < 0$. Isso nos mostra como obter o gráfico de $y = |f(x)|$ a partir do gráfico de $y = f(x)$: a parte do gráfico que está acima do eixo x permanece a mesma, enquanto a parte que está abaixo do eixo x é refletida em torno do eixo x.

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico da função $y = |x^2 - 1|$.

SOLUÇÃO Primeiro fazemos o gráfico da parábola $y = x^2 - 1$ como na Figura 10(a), deslocando a parábola $y = x^2$ para baixo em uma unidade. Vemos que o gráfico está abaixo do eixo x quando $-1 < x < 1$; assim, refletimos essa parte do gráfico em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = |x^2 - 1|$ na Figura 10(b). □

COMBINAÇÕES DE FUNÇÕES

Duas funções f e g podem ser combinadas para formar novas funções $f + g$, $f - g$, fg e f/g, de forma similar àquela pela qual somamos, subtraímos, multiplicamos e dividimos números reais. As funções soma e diferença são assim definidas

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Se o domínio de f é A e o domínio de g é B, então o domínio de $(f + g)$ é a intersecção $A \cap B$, pois tanto $f(x)$ quanto $g(x)$ devem estar definidas. Por exemplo, o domínio de $f(x) = \sqrt{x}$ é $A = [0, \infty)$ e o domínio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ é $B = (-\infty, 2]$, de modo que o domínio de $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ é $A \cap B = [0, 2]$.

Analogamente, as funções produto e quociente são definidas por

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

O domínio de fg é $A \cap B$, mas não podemos dividir por zero e, assim, o domínio de f/g é $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$. Por exemplo, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 1$, então o domínio da função racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ é $\{x \mid x \neq 1\}$, ou $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Existe outra maneira de combinar duas funções para obter uma nova função. Por exemplo, suponha que $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$. Como y é uma função de u e u, por sua vez, é uma função de x, segue que, afinal de contas, y é uma função de x. Calculamos isto pela substituição:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Este procedimento é chamado *composição*, pois a nova função é *composta* das duas funções dadas f e g.

FIGURA 11

A máquina $f \circ g$ é composta pela máquina g (primeiro) e a seguir pela máquina f

Em geral, dadas quaisquer duas funções f e g, começamos com um número x no domínio de g e encontramos sua imagem $g(x)$. Se este número $g(x)$ estiver no domínio de f, então podemos calcular o valor de $f(g(x))$. O resultado é uma nova função $h(x) = f(g(x))$ obtida pela substituição de g em f. Ela é chamada de *composição* (ou *composta*) de f e g e é denotada por $f \circ g$ ("f bola g").

DEFINIÇÃO Dadas duas funções f e g, a **função composta** $f \circ g$ (também chamada de **composição** de f e g) é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os x no domínio de g tais que $g(x)$ está no domínio de f. Em outras palavras, $(f \circ g)(x)$ está definida sempre que tanto $g(x)$ quanto $f(g(x))$ estiverem definidas. A Figura 11 mostra como visualizar $f \circ g$ em termos de máquinas.

EXEMPLO 6 Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$, encontre as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

SOLUÇÃO Temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3)^2 = (x - 3)^2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

□

OBS. Você pode ver no Exemplo 6 que, em geral, $f \circ g \neq g \circ f$. Lembre-se de que a notação $f \circ g$ significa que a função g é aplicada primeiro, e depois f é aplicada. No Exemplo 6, $f \circ g$ é a função que *primeiro* subtrai 3 e *então* eleva ao quadrado; $g \circ f$ é a função que *primeiro* eleva ao quadrado e *então* subtrai 3.

EXEMPLO 7 Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encontre cada uma das funções e seus domínios.

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUÇÃO

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

O domínio de $f \circ g$ é $\{x \mid 2 - x \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 2\} = (-\infty, 2]$.

Se $0 \leqslant a \leqslant b$, então $a^2 \leqslant b^2$.

(b) $$(g \circ f) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Para $\sqrt{x}$ estar definida, devemos ter $x \geqslant 0$. Para $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ estar definida, devemos ter $2 - \sqrt{x} \geqslant 0$, isto é, $\sqrt{x} \leqslant 2$ ou $x \leqslant 4$. Assim, temos $0 \leqslant x \leqslant 4$, e o domínio de $g \circ f$ é o intervalo fechado $[0, 4]$.

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

O domínio de $f \circ f$ é $[0, \infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Para essa expressão estar definida, $2 - x \geqslant 0$, e $2 - \sqrt{2 - x} \geqslant 0$. A primeira desigualdade significa que $x \leqslant 2$, e a segunda é equivalente a $\sqrt{2 - x} \leqslant 2$ ou $2 - x \leqslant 4$ ou $x \geqslant -2$. Assim, $-2 \leqslant x \leqslant 2$; logo, o domínio de $g \circ g$ é o intervalo fechado $[-2, 2]$. □

É possível fazer a composição de três ou mais funções. Por exemplo, a função composta $f \circ g \circ h$ pode ser encontrada calculando-se primeiro h, então g e depois f, como a seguir:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EXEMPLO 8 Encontre $f \circ g \circ h$ se $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}\end{aligned}$$

Até aqui usamos a composição para construir funções complicadas a partir das mais simples. Mas, em cálculo, é frequentemente útil *decompor* uma função complicada em outras mais simples, como no exemplo a seguir. □

EXEMPLO 9 Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encontre as funções f, g e h tais que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUÇÃO Uma vez que $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, a fórmula para F dita que: primeiro adicionemos 9, então tomemos o cosseno do resultado e, finalmente, o quadrado. Assim, fazemos

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

Então

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$

□

1.3 EXERCÍCIOS

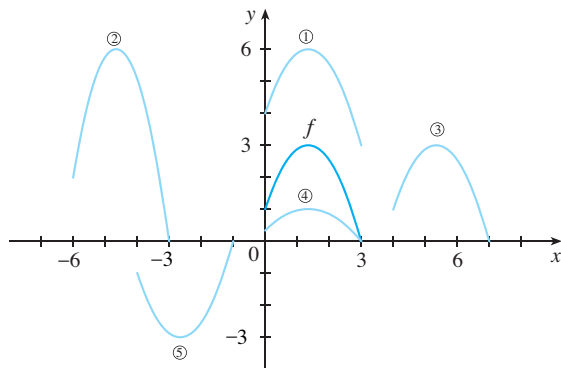
1. Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva as equações para os gráficos obtidos a partir do gráfico de f, da seguinte forma:
(a) Desloque 3 unidades para cima.
(b) Desloque 3 unidades para baixo.
(c) Desloque 3 unidades para a direita.
(d) Desloque 3 unidades para a esquerda.
(e) Faça uma reflexão em torno do eixo x.
(f) Faça uma reflexão em torno do eixo y.
(g) Expanda verticalmente por um fator de 3.
(h) Comprima verticalmente por um fator de 3.

2. Explique como obter, a partir do gráfico de $y = f(x)$, os gráficos a seguir:
(a) $y = 5f(x)$
(b) $y = f(x - 5)$
(c) $y = -f(x)$
(d) $y = -5f(x)$
(e) $y = f(5x)$
(f) $y = 5f(x) - 3$

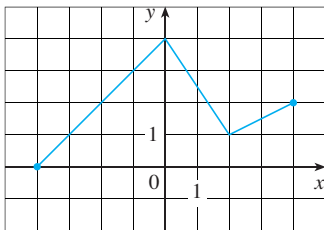
3. Dado o gráfico $y = f(x)$, associe cada equação com seu gráfico e justifique suas escolhas.

(a) $y = f(x - 4)$ (b) $y = f(x) + 3$

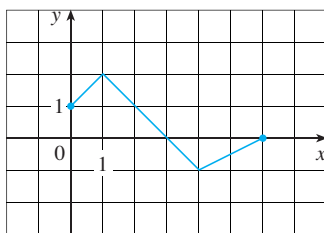
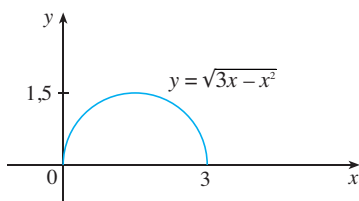
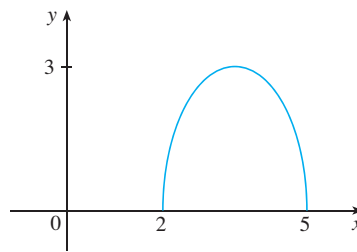
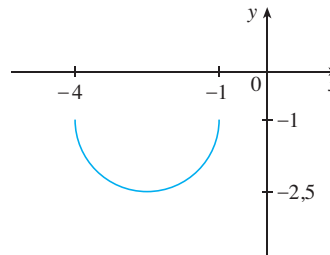
(c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ (d) $y = -f(x + 4)$

(e) $y = 2f(x + 6)$

4. O gráfico de f é dado. Esboce os gráficos das seguintes funções:

(a) $y = f(x + 4)$ (b) $y = f(x) + 4$

(c) $y = 2f(x)$ (d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$

5. O gráfico de f é dado. Use-o para fazer o gráfico das seguintes funções:

(a) $y = f(2x)$ (b) $y = f(\frac{1}{2}x)$

(c) $y = f(-x)$ (d) $y = -f(-x)$

6–7 O gráfico de $y = \sqrt{3x - x^2}$ é dado. Use transformações para criar a função cujo gráfico é mostrado.

6.

7.

8. (a) Como estão relacionados o gráfico de $y = 2 \text{ sen } x$ e o de $y = \text{sen } x$? Use sua resposta e a Figura 6 para esboçar o gráfico de $y = 2 \text{ sen } x$.

(b) Como estão relacionados o gráfico de $y = 1 + \sqrt{x}$ e o de $y = \sqrt{x}$? Utilize sua resposta e a Figura 4(a) para esboçar o gráfico de $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 Faça o gráfico de cada função, sem marcar pontos, mas começando com o gráfico de uma das funções básicas dadas na Seção 1.2 e então aplicando as transformações apropriadas.

9. $y = -x^3$

10. $y = 1 - x^2$

11. $y = (x + 1)^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3$

13. $y = 1 + 2 \cos x$

14. $y = 4 \text{ sen } 3x$

15. $y = \text{sen } (x/2)$

16. $y = \dfrac{1}{x - 4}$

17. $y = \sqrt{x + 3}$

18. $y = (x + 2)^4 + 3$

19. $y = \frac{1}{2}(x^2 + 8x)$

20. $y = 1 + \sqrt[3]{x - 1}$

21. $y = \dfrac{2}{x + 1}$

22. $y = \dfrac{1}{4} \text{ tg} \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

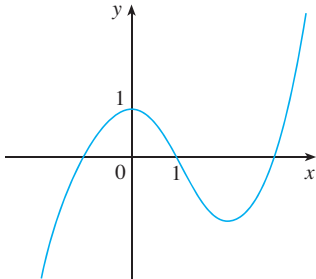
23. $y = |\text{sen } x|$

24. $y = |x^2 - 2x|$

25. A cidade de Nova Delhi, na Índia, está localizada a uma latitude de 30 ºN. Use a Figura 9 para encontrar uma função que modele o número de horas de luz solar em Nova Delhi como uma função da época do ano. Para verificar a precisão do seu modelo, use o fato de que nessa cidade, em 31 de março, o Sol surge às 6h13 da manhã e se põe às 18h39.

26. Uma estrela variável é aquela cujo brilho alternadamente cresce e decresce. Para a estrela variável mais visível, Delta Cephei, o período de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias, o brilho médio (ou magnitude) da estrela é 4,0, e seu brilho varia de $\pm 0{,}35$ em magnitude. Encontre uma função que modele o brilho de Delta Cephei como uma função do tempo.

27. (a) Como o gráfico de $y = f(|x|)$ está relacionado com o gráfico de f?
(b) Esboce o gráfico de $y = \text{sen}\,|x|$.
(c) Esboce o gráfico de $y = \sqrt{|x|}$.

28. Use o gráfico dado de f para esboçar o gráfico $y = 1/f(x)$. Quais aspectos de f são os mais importantes no esboço de $y = 1/f(x)$? Explique como eles são usados.

29–30 Encontre $f + g$, $f - g$, fg, e f/g e defina seus domínios.

29. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $\quad g(x) = 3x^2 - 1$

30. $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $\quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

31–32 Encontre as funções (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$ e (d) $g \circ g$, e seus domínios.

31. $f(x) = x^2 - 1$, $\quad g(x) = 2x + 1$

32. $f(x) = x - 2$, $\quad g(x) = x^2 + 3x + 4$

33. $f(x) = 1 - 3x$, $\quad g(x) = \cos x$

34. $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

35. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $\quad g(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, $\quad g(x) = \text{sen}\,2x$

37–40 Encontre $f \circ g \circ h$

37. $f(x) = x + 1$, $\quad g(x) = 2x$, $\quad h(x) = x - 1$

38. $f(x) = 2x - 1$, $\quad g(x) = x^2$, $\quad h(x) = 1 - x$

39. $f(x) = \sqrt{x - 3}$, $\quad g(x) = x^2$, $\quad h(x) = x^3 + 2$

40. $f(x) = \text{tg}\,x$, $\quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}$, $\quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

41–46 Expresse a função na forma $f \circ g$.

41. $F(x) = (x^2 + 1)^{10}$

42. $F(x) = \text{sen}\left(\sqrt{x}\right)$

43. $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

44. $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 + x}}$

45. $u(t) = \sqrt{\cos t}$

46. $u(t) = \dfrac{\text{tg}\,t}{1 + \text{tg}\,t}$

47–49 Expresse a função na forma $f \circ g \circ h$.

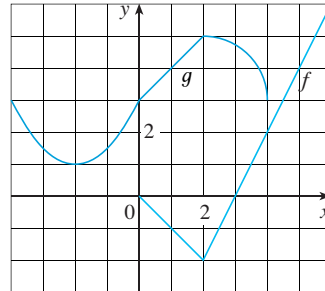
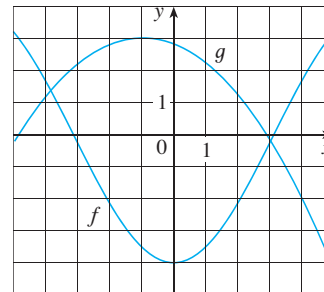
47. $H(x) = 1 - 3^{x^2}$

48. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

49. $H(x) = \sec^4\left(\sqrt{x}\right)$

50. Use a tabela para determinar o valor de cada expressão.
(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$
(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

51. Use os gráficos dados de f e g para determinar o valor de cada uma das expressões ou explique por que elas não estão definidas.
(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$
(d) $(f \circ g)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$

52. Use os gráficos dados de f e g para estimar o valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Use essas estimativas para esboçar o gráfico de $f \circ g$.

53. A queda de uma pedra em um lago gera ondas circulares que se espalham a uma velocidade de 60 cm/s.
(a) Expresse o raio desse círculo como uma função do tempo t (em segundos).
(b) Se A é a área do círculo como uma função do raio, encontre $A \circ r$ e interprete-a.

54. Um balão esférico é inflado e seu raio aumenta a uma taxa de 2 cm/s.
(a) Expresse o raio r do balão como uma função do tempo t (em segundos).
(b) Se V for o volume do balão como função do raio, encontre $V \circ r$ e interprete-a.

55. Um navio se move a uma velocidade de 30 km/h paralelo a uma costa retilínea. O navio está a 6 km da costa e passa por um farol ao meio-dia.
(a) Expresse a distância s entre o farol e o navio como uma função de d, a distância que o navio percorreu desde o meio-dia; ou seja, encontre f tal que $s = f(d)$.
(b) Expresse d como uma função de t, o tempo decorrido desde o meio-dia; ou seja, encontre g tal que $d = g(t)$.
(c) Encontre $f \circ g$. O que esta função representa?

56. Um avião voa a uma velocidade de 350 km/h, a uma altitude de 1 km e passa diretamente sobre uma estação de radar no instante $t = 0$.

(a) Expresse a distância horizontal de voo d (em quilômetros) como uma função de t.
(b) Expresse a distância s entre o avião e a estação de radar como uma função de d.
(c) Use composição para expressar s como uma função de t.

57. A **função de Heaviside** H é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Essa função é usada no estudo de circuitos elétricos para representar o surgimento repentino de corrente elétrica, ou voltagem, quando uma chave é instantaneamente ligada.
(a) Esboce o gráfico da função de Heaviside.
(b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e 120 volts forem aplicados instantaneamente no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$.
(c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ em um circuito quando é ligada uma chave em $t = 5$ segundos e 240 volts são aplicados instantaneamente no circuito. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$. (Observe que começar em $t = 5$ corresponde a uma translação.)

58. A função de Heaviside definida no Exercício 57 pode também ser usada para definir uma **função rampa** $y = ctH(t)$, que representa o crescimento gradual na voltagem ou corrente no circuito.
(a) Esboce o gráfico da função rampa $y = tH(t)$.
(b) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ no circuito se uma chave for ligada no instante $t = 0$ e a voltagem crescer gradualmente até 120 volts em um intervalo de 60 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leqslant 60$.
(c) Esboce o gráfico da voltagem $V(t)$ em um circuito se em $t = 7$ s for ligada uma chave e a voltagem crescer gradualmente até 100 volts em um período de 25 segundos. Escreva uma fórmula para $V(t)$ em termos de $H(t)$ para $t \leqslant 32$.

59. Sejam f e g funções lineares com equações $f(x) = m_1x + b_1$ e $g(x) = m_2x + b_2$. A função $f \circ g$ também é linear? Em caso afirmativo, qual é a inclinação de seu gráfico?

60. Se você investir x dólares a 4% de juros capitalizados anualmente, então o valor $A(x)$ do investimento depois de um ano é $A(x) = 1{,}04x$. Encontre $A \circ A$, $A \circ A \circ A$, e $A \circ A \circ A \circ A$. O que estas composições representam? Encontre uma fórmula para a composição de n cópias de A.

61. (a) Se $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encontre uma função f tal que $f \circ g = h$. (Pense em quais operações você teria que efetuar na fórmula de g para chegar na fórmula de h.)
(b) Se $f(x) = 3x + 5$ e $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encontre uma função g tal que $f \circ g = h$.

62. Se $f(x) = x + 4$ e $h(x) = 4x - 1$, encontre uma função g tal que $g \circ f = h$.

63. (a) Suponha que f e g sejam funções pares. O que você pode dizer sobre $f + g$ e fg?
(b) E se f e g forem ambas ímpares?

64. Suponha que f seja uma função par e que g seja ímpar. O que você pode dizer sobre fg?

65. Suponha que g seja uma função par e seja $h = f \circ g$. A função h é sempre uma função par?

66. Suponha que g seja uma função ímpar e seja $h = f \circ g$. A função h é sempre uma função ímpar? E se f for ímpar? E se f for par?

1.4 CALCULADORAS GRÁFICAS E COMPUTADORES

Nesta seção vamos assumir que você tem acesso a uma calculadora ou a um computador com um software gráfico. Veremos como o uso dessas ferramentas nos possibilita fazer o gráfico de funções mais complicadas e resolver problemas mais complexos, que de outra forma não poderiam ser resolvidos. Vamos salientar também mais algumas das armadilhas ocultas nessas máquinas.

As calculadoras gráficas e os computadores podem fazer gráficos bastante precisos de funções. Mas, como será visto no Capítulo 4, só por meio do cálculo podemos estar certos de ter descoberto todos os aspectos interessantes de um gráfico.

Tanto calculadoras quanto computadores exibem um recorte retangular do gráfico de uma função em uma **janela de exposição** ou **tela de inspeção**, que será chamada aqui de **janela retangular**. A visão-padrão frequentemente nos fornece uma imagem incompleta ou enganadora, portanto é importante escolher com cuidado a janela retangular. Se escolhermos a variação de x de $Xmin = a$ até $Xmax = b$ e os valores de y de $Ymin = c$ até $Ymax = d$, então a parte visível do gráfico está no retângulo

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

mostrada na Figura 1. Vamos nos referir a ela como *janela retangular* $[a, b]$ *por* $[c, d]$.

FIGURA 1
A janela retangular $[a, b]$ por $[c, d]$

A máquina faz o gráfico da função f da mesma forma que você faria. Ela marca pontos da forma $(x, f(x))$ para um certo número de valores igualmente espaçados de x entre a e b. Se determinado valor de x não estiver no domínio de f, ou se $f(x)$ estiver fora da janela retangular, ela vai para o próximo valor de x. A máquina conecta cada ponto com o precedente, formando assim uma representação do gráfico de f.

EXEMPLO 1 Em cada uma das janelas retangulares a seguir faça o gráfico de $f(x) = x^2 + 3$.

(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ (b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$ (d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1\,000]$

SOLUÇÃO Para a parte (a) escolhemos $Xmin = -2$, $Xmax = 2$, $Ymin = -2$ e $Ymax = 2$. O gráfico resultante está na Figura 2(a). A janela está em branco! Um instante de reflexão nos dá a explicação: observe que $x^2 \geqslant 0$ para todo x, logo $x^2 + 3 \geqslant 3$ para todo x. Assim a imagem da função $f(x) = x^2 + 3$ é $[3, \infty]$. Isso significa que o gráfico de f está inteiramente fora da janela retangular $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

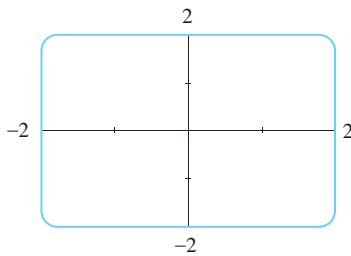
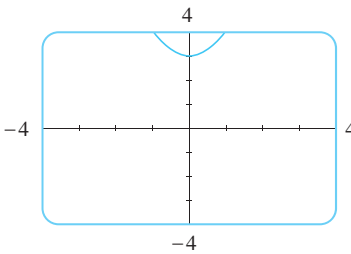
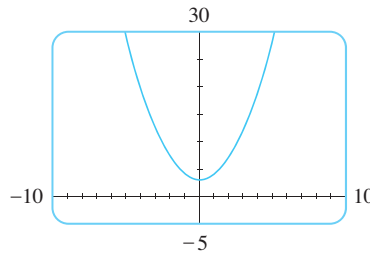
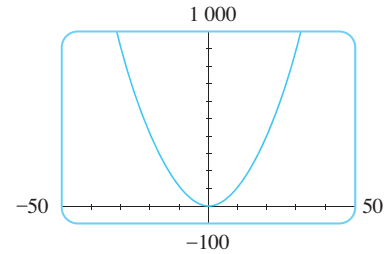
Os gráficos para as janelas retangulares das partes (b), (c) e (d) estão na Figura 2. Observe que em (c) e (d) a visão está mais completa, porém em (d) não fica claro que a intersecção com o eixo y é 3.

(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

(b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$

(d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1\,000]$ □

FIGURA 2
Gráficos de $f(x) = x^2 + 3$

A partir do Exemplo 1 vemos que a escolha da janela retangular faz uma grande diferença no aspecto do gráfico. Algumas vezes, para obter uma visão mais completa ou mais global do gráfico, é necessário ampliar a janela. No exemplo a seguir veremos que um conhecimento prévio do domínio e da imagem da função dá pistas de como selecionar a janela retangular.

EXEMPLO 2 Determine uma janela apropriada para a função $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ e use-a para fazer o gráfico de f.

SOLUÇÃO A expressão para $f(x)$ está definida quando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Portanto, o domínio de f é o intervalo $[-2, 2]$. Também,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

logo a imagem de f é o intervalo $[0, 2\sqrt{2}]$.

Escolhemos a janela retangular de forma que o intervalo sobre o eixo x fosse um pouco maior que o domínio e o intervalo sobre o eixo y fosse um pouco maior que a imagem. Tomando a janela retangular $[-3, 3]$ por $[-1, 4]$, obtemos o gráfico da Figura 3. □

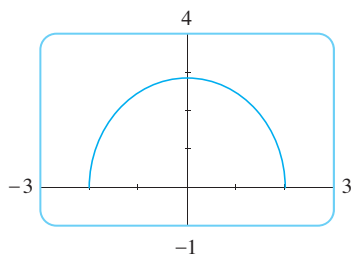



FIGURA 3

EXEMPLO 3 Faça o gráfico da função $y = x^3 - 150x$.

SOLUÇÃO Aqui o domínio é $\mathbb{R}$, o conjunto de todos os números reais. Isso não ajuda na escolha da janela. Vamos fazer algumas experiências. Se iniciarmos com a janela retangular

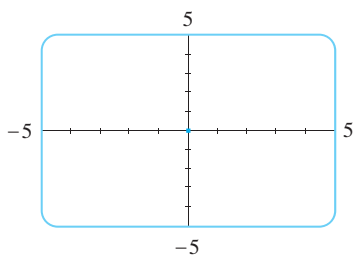



FIGURA 4

$[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obteremos o gráfico da Figura 4. Ele parece estar vazio, mas, na verdade, o gráfico está tão próximo de ser vertical que chega a se confundir com o eixo y.

Usando o recurso de *zoom* da calculadora gráfica para mudar a janela retangular para $[-20, 20]$ por $[-20, 20]$, obtemos a imagem da Figura 5(a). O gráfico parece ser formado por retas verticais, mas sabemos que isso não está correto. Observando cuidadosamente enquanto o gráfico está sendo feito, vemos que o gráfico desaparece da tela para depois reaparecer. Isso indica que é necessário olhar com mais detalhes na direção vertical da tela. Dessa forma, mudamos a janela retangular para $[-20, 20]$ por $[-500, 500]$. O gráfico resultante está na Figura 5(b). Todavia, ela ainda não revela bem todos os aspectos principais da função; assim, tentamos a janela $[-20, 20]$ por $[-1\,000, 1\,000]$ na Figura 5(c). Tudo indica que finalmente chegamos a uma janela apropriada. No Capítulo 4 veremos que realmente o gráfico da Figura 5(c) revela todos os principais aspectos da função. □

(a)

(b)

(c)

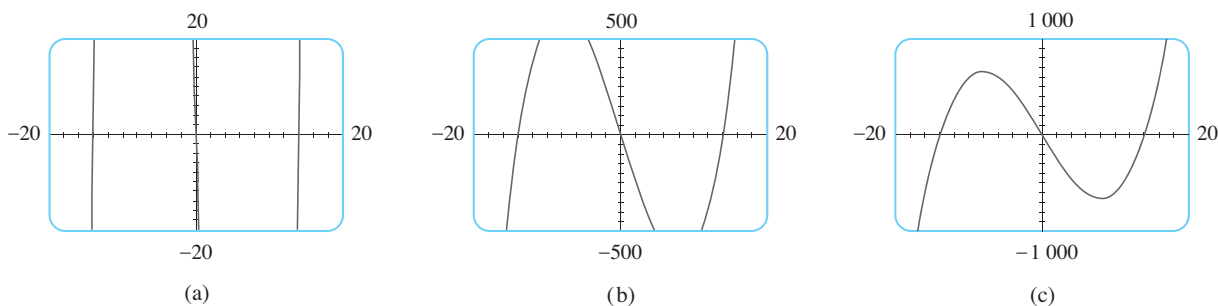



FIGURA 5
$y = x^3 - 150x$

EXEMPLO 4 Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen } 50x$ em uma janela apropriada.

SOLUÇÃO A Figura 6(a) mostra o gráfico de f produzido por uma calculadora gráfica usando uma janela retangular de $[-12, 12]$ por, $[-1{,}5, 1{,}5]$. À primeira vista o gráfico parece ser razoável. Porém, se mudarmos para as outras janelas da Figura 6, o gráfico mudará completamente. Algo estranho está acontecendo.

■ A aparência do gráfico na Figura 6 depende da máquina usada. Os gráficos que você obtiver em sua máquina podem não ser parecidos com os destas figuras, mas serão igualmente imprecisos.

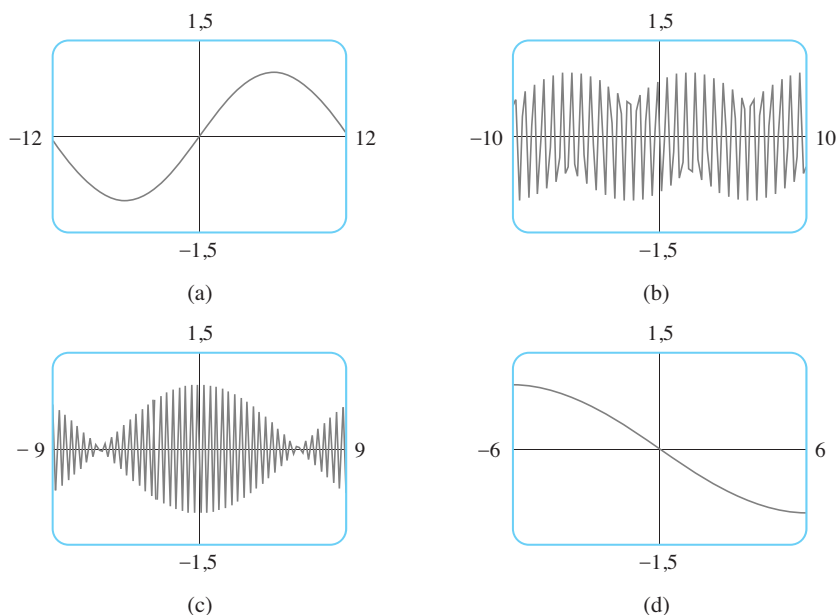



FIGURA 6
Gráficos de $f(x) = \text{sen } 50x$ em quatro janelas retangulares

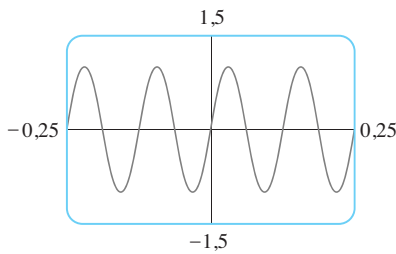



FIGURA 7
$f(x) = \text{sen } 50x$

A fim de explicar a grande diferença no aspecto desses gráficos e definir a janela mais apropriada, é necessário encontrar o período da função $y = \text{sen } 50x$. Sabemos que o período da função $y = \text{sen } x$ é de 2π e que o gráfico de $y = \text{sen } 50x$ é comprimido horizontalmente, assim, o período de $y = \text{sen } 50x$ é

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0{,}126$$

Isso sugere que devemos trabalhar com os valores pequenos de x para mostrar somente algumas das oscilações do gráfico. Se escolhermos a janela $[-0{,}25, 0{,}25]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$, obteremos o gráfico da Figura 7.

Vemos agora o erro cometido na Figura 6. As oscilações de $y = \text{sen } 50x$ são tão rápidas que, quando a calculadora marca pontos e os une, perde os pontos de máximo e de mínimo, dando assim uma impressão errada sobre o gráfico. □

Vimos que a escolha de uma janela pouco apropriada pode levar a uma visão errônea do gráfico de uma função. Nos Exemplos 1 e 3 resolvemos o problema ampliando a janela, ao passo que no Exemplo 4 a reduzimos. No próximo exemplo examinaremos uma função para a qual não existe qualquer janela satisfatória que revele a verdadeira forma do gráfico.

EXEMPLO 5 Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x + \frac{1}{100}\cos 100x$.

SOLUÇÃO A Figura 8 mostra o gráfico de f produzido por uma calculadora gráfica com uma janela retangular de $[-6{,}5, 6{,}5]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$. Ele se parece com o gráfico de $y = \text{sen } x$, talvez acrescido de algumas oscilações. Se dermos um *zoom* na janela $[-0{,}1, 0{,}1]$ por $[-0{,}1, 0{,}1]$ poderemos ver mais claramente a forma das oscilações acrescidas na Figura 9. A razão para esse comportamento está no fato de que o segundo termo, $\frac{1}{100}\cos 100x$, é muito pequeno em comparação com o primeiro, sen x. Assim, realmente precisamos de dois gráficos para ver a natureza verdadeira dessa função.

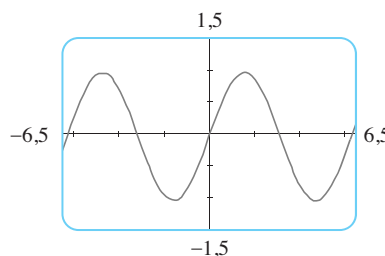



FIGURA 8

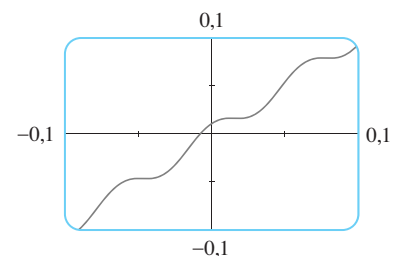



FIGURA 9 □

EXEMPLO 6 Faça o gráfico da função $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

■ Outra maneira de evitar a reta que não pertence ao gráfico é mudar o modo gráfico na calculadora, para que os pontos não sejam ligados.

SOLUÇÃO A Figura 10(a) mostra o gráfico produzido por uma calculadora com uma janela $[-9, 9]$ por $[-9, 9]$. Ao conectar os pontos sucessivos sobre o gráfico, a calculadora produz um segmento de reta íngreme do topo até a base da tela. Esse segmento de reta realmente não faz parte do gráfico. Observe que o domínio da função $y = 1/(1 - x)$ é $\{x \mid x \neq 1\}$. Podemos eliminar a reta quase vertical fazendo experiências com mudanças de escala. Quando mudamos para uma janela menor $[-4{,}7, 4{,}7]$ por $[-4{,}7, 4{,}7]$, obtemos um gráfico muito melhor, como mostrado na Figura 10(b).

FIGURA 10

EXEMPLO 7 Faça o gráfico da função $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUÇÃO Algumas ferramentas gráficas mostram o gráfico da Figura 11, enquanto outras produzem um gráfico como o da Figura 12. Sabemos da Seção 1.2 (Figura 13) que o gráfico na Figura 12 está correto; assim, o que aconteceu na Figura 11? A explicação disso é que, em algumas máquinas, a raiz cúbica de x é calculada por meio de um algoritmo, que não é definido se $x < 0$. Logo, somente a metade à direita do gráfico é produzida.

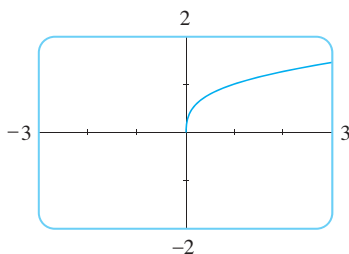



FIGURA 11

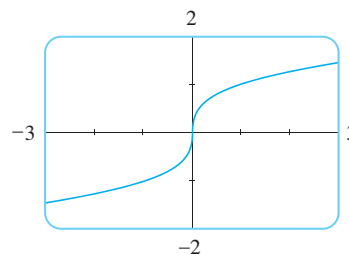



FIGURA 12

Você deve experimentar com sua máquina para ver qual desses dois gráficos será produzido. Se obtiver o gráfico da Figura 11, poderá obter a imagem correta fazendo o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

Observe que essa função é igual a $\sqrt[3]{x}$ (exceto quando $x = 0$).

Para entender como a expressão de uma função relaciona-se com seu gráfico, é útil fazer o gráfico de uma **família de funções**, isto é, uma coleção de funções cujas equações estão relacionadas. No exemplo a seguir, faremos os gráficos de membros de uma família de polinômios cúbicos.

EXEMPLO 8 Faça o gráfico da função $y = x^3 + cx$ para vários valores de c. Como mudará o gráfico quando fizermos c variar?

SOLUÇÃO A Figura 13 mostra os gráficos da função $y = x^3 + cx$ para $c = 2, 1, 0, -1$ e -2. Vemos que, para os valores positivos de c, o gráfico é crescente da esquerda para a direita sem pontos de máximo ou de mínimo (picos ou vales). Quando $c = 0$, a curva é achatada na origem. Quando c é negativo, a curva tem um ponto de máximo e um ponto de mínimo. À medida que c decresce, o ponto de máximo fica cada vez mais alto, e o ponto de mínimo, cada vez mais baixo.

(a) $y=x^3+2x$

(b) $y=x^3+x$

(c) $y=x^3$

(d) $y=x^3-x$

(e) $y=x^3-2x$

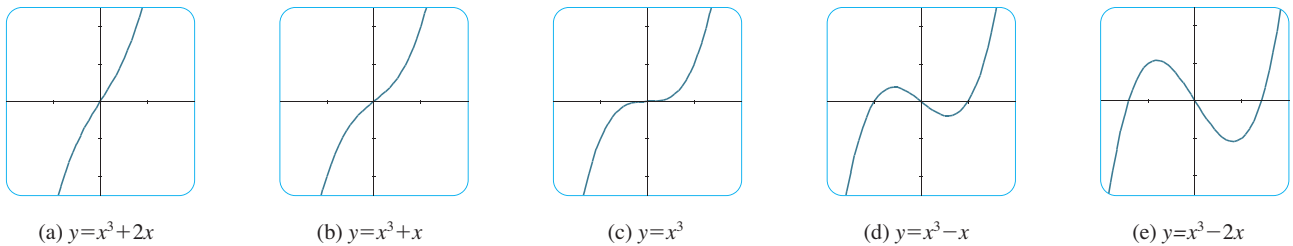



FIGURA 13
Vários membros da família de funções $y = x^3 + cx$ têm seus gráficos na janela retangular $[-2, 2]$ por $[-2{,}5, 2{,}5]$

EXEMPLO 9 Encontre as soluções da equação $\cos x = x$ com duas casas decimais de precisão.

SOLUÇÃO As soluções da equação $\cos x = x$ são as coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas $y = \cos x$ e $y = x$. Da Figura 14(a) vemos que há uma única solução e ela está entre 0 e 1. Dando um *zoom* na janela [0, 1] por [0, 1], vemos, da Figura 14(b), que a solução está entre 0,7 e 0,8. Assim damos mais um *zoom* para a janela [0,7, 0,8] por [0,7, 0,8] na Figura 14(c). Movendo o cursor para o ponto de intersecção das duas curvas, ou por verificação e pelo fato de que a escala em x é 0,01, vemos que a solução da equação é cerca de 0,74. (Muitas calculadoras possuem dispositivos que fornecem pontos de intersecção.)

(a) $[-5, 5]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$
escala $x=1$

(b) [0, 1] por [0, 1]
escala $x=0{,}1$

(c) [0,7, 0,8] por [0,7, 0,8]
escala $x=0{,}01$

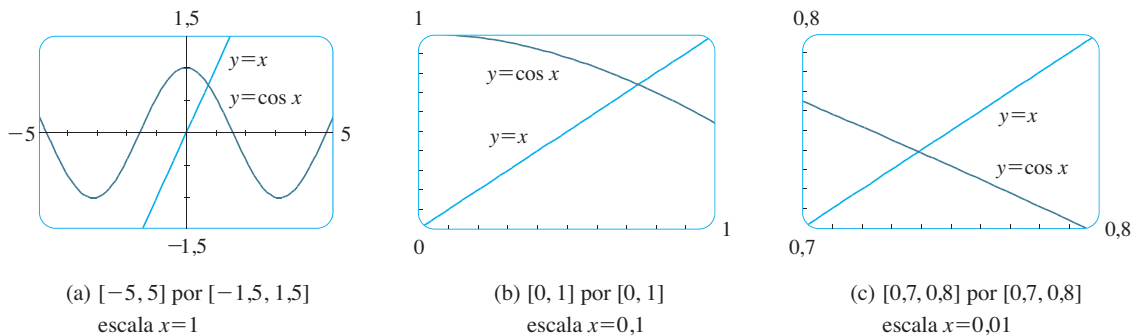



FIGURA 14
Localização das soluções de $\cos x = x$

1.4 EXERCÍCIOS

1. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2}$.
(a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$ (b) [0, 10] por [0, 2]
(c) [0, 10] por [0, 10]

2. Use uma calculadora gráfica ou um computador para determinar qual das janelas retangulares dadas produz o gráfico mais apropriado da função $f(x) = x^4 - 16x^2 + 20$.
(a) $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$ (b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-50, 50]$ por $[-50, 50]$ (d) $[-5, 5]$ por $[-50, 50]$

3–14 Determine uma janela retangular apropriada para a função dada e use-a para fazer o gráfico da função.

3. $f(x) = 5 + 20x - x^2$ **4.** $f(x) = x^3 + 30x^2 + 200x$

5. $f(x) = \sqrt[4]{81 - x^4}$ **6.** $f(x) = \sqrt{0{,}1x + 20}$

7. $f(x) = x^3 - 225x$ **8.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 100}$

9. $f(x) = \operatorname{sen}^2(1\,000x)$ **10.** $f(x) = \cos(0{,}001x)$

11. $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$ **12.** $f(x) = \sec(20\pi x)$

13. $y = 10 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 100x$ **14.** $y = x^2 + 0{,}02 \operatorname{sen} 50x$

15. Faça o gráfico da elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$ por meio dos gráficos das funções que são a metade superior e inferior da elipse.

16. Faça o gráfico da hipérbole $y^2 - 9x^2 = 1$ por meio dos gráficos das funções que são os ramos superior e inferior da hipérbole.

17–18 Os gráficos se interceptam na janela retangular dada? Se eles se interceptarem, quantos pontos de intersecção existem?

17. $y = 3x^2 - 6x + 1$, $y = 0{,}23x - 2{,}25$; $[-1, 3]$ por $[-2{,}5, 1{,}5]$

18. $y = 6 - 4x - x^2$, $y = 3x + 18$; $[-6, 2]$ por $[-5, 20]$

19–21 Encontre todas as soluções da equação, com duas casas decimais de precisão.

19. $x^3 - 9x^2 - 4 = 0$ **20.** $x^3 = 4x - 1$

21. $x^2 = \text{sen}\, x$

22. Vimos, no Exemplo 9, que a equação $\cos x = x$ tem exatamente uma solução.

(a) Use um gráfico para mostrar que a equação $\cos x = 0{,}3$ tem três soluções e encontre-as com duas casas decimais de precisão.

(b) Encontre um valor aproximado m tal que a equação $\cos x = mx$ tenha exatamente duas soluções.

23. Use os gráficos para determinar qual das funções $f(x) = 10x^2$ e $g(x) = x^3/10$ é, eventualmente, maior (isto é, maior quando x for muito grande).

24. Use os gráficos para determinar qual dentre as funções $f(x) = x^4 - 100x^3$ e $g(x) = x^3$ é, eventualmente, maior.

25. Para quais valores de x é válido que $|\text{sen}\, x - x| < 0{,}1$?

26. Faça o gráfico dos polinômios $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ e $Qx = 3x^5$ na mesma tela, usando primeiro a janela retangular $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e então mudando para $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$. O que você pode observar a partir desses gráficos?

27. Neste exercício consideramos a família de funções $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onde n é um inteiro positivo.

(a) Faça os gráficos das funções $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, e $y = \sqrt[6]{x}$, na mesma tela usando a janela retangular $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$.

(b) Faça os gráficos das funções $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$, e $y = \sqrt[5]{x}$, na mesma tela usando a janela retangular $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (Veja o Exemplo 7.)

(c) Faça os gráficos das funções $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ e $y = \sqrt[5]{x}$ na mesma tela usando a janela retangular $[-1, 3]$ por $[-1, 2]$.

(d) Que conclusões você pode tirar desses gráficos?

28. Neste exercício consideramos a família de funções $f(x) = 1/x^n$, onde n é um inteiro positivo.

(a) Faça o gráfico das funções $y = 1/x$ e $y = 1/x^3$ na mesma tela usando a janela retangular $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$.

(b) Faça o gráfico das funções $y = 1/x^2$ e $y = 1/x^4$ na mesma tela usando a janela retangular dada na parte (a).

(c) Faça o gráfico de todas as funções das partes (a) e (b) na mesma tela usando a janela retangular $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$.

(d) Que conclusões você pode tirar desses gráficos?

29. Faça o gráfico da função $f(x) = x^4 + cx^2 + x$ para vários valores de c. Como mudará o gráfico quando c variar?

30. Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$ para vários valores de c. Descreva como a variação de c afeta o gráfico.

31. Faça o gráfico da função $y = x^n 2^{-x}$, $x \geqslant 0$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6. Como varia o gráfico com o crescimento de n?

32. As curvas com equações

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$

são chamadas **curvas ponta de bala**. Faça o gráfico de algumas dessas curvas para entender o porquê de seu nome. O que acontece quando c cresce?

33. O que acontece com o gráfico da equação $y^2 = cx^3 + x^2$ à medida que c varia?

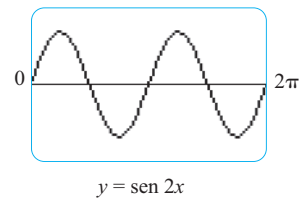
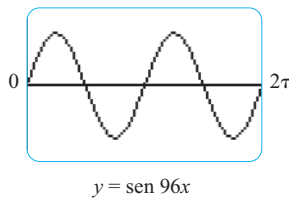
34. Este exercício explora o efeito da função interior g sobre a função composta $y = f(g(x))$.

(a) Faça o gráfico da função $y = \text{sen}(\sqrt{x})$ usando a janela $[0, 400]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$. Qual a diferença entre esse gráfico e o da função seno?

(b) Faça o gráfico da função $y = \text{sen}(x^2)$ usando a janela $[-5, 5]$ por $[-1{,}5, 1{,}5]$. Qual a diferença com esse gráfico e o da função seno?

35. As figuras a seguir mostram os gráficos de $y = \text{sen}\, 96x$ e de $y = \text{sen}\, 2x$, conforme são exibidos por uma calculadora gráfica TI-83.

$y = \text{sen}\, 96x$

$y = \text{sen}\, 2x$

O primeiro gráfico é inexato. Explique por que os dois gráficos parecem ser idênticos. [*Sugestão*: A janela gráfica da TI-83 é de 95 pixels de largura. Quais pontos específicos a calculadora marca?]

36. O primeiro gráfico da figura a seguir é aquele que uma calculadora gráfica TI-83 exibe como função $y = \text{sen}\, 45x$. Ele está incorreto e, portanto, para ajudar a explicar sua aparência, redesenhamos a curva em questão no modo pontual da calculadora, obtendo o segundo gráfico.

Que duas curvas senoidais a calculadora parece estar desenhando? Mostre que cada ponto do gráfico de $y = \text{sen}\, 45x$ que a TI-83 escolhe para desenhar está, de fato, em uma dessas duas curvas. (A janela gráfica da TI-83 é de 95 pixels de largura.)

1.5 FUNÇÕES EXPONENCIAIS

A função $f(x) = 2^x$ é chamada *função exponencial,* pois a variável, x, é o expoente. Ela não deve ser confundida com a função potência $g(x) = x^2$, na qual a variável é a base.

Em geral, uma **função exponencial** é uma função da forma

$$f(x) = a^x$$

onde a é uma constante positiva. Vamos recordar o que isso significa.

Se $x = n$, um inteiro positivo, então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

■ No Apêndice D apresentamos uma abordagem alternativa para as funções exponencial e logarítmica, usando o cálculo integral.

Se $x = 0$, então $a^0 = 1$, e se $x = -n$, onde n é um inteiro positivo, então

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Se x for um número racional, $x = p/q$, onde p e q são inteiros e $q > 0$, então

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Mas qual o significado de a^x se x for um número irracional? Por exemplo, qual o significado de $2^{\sqrt{3}}$ ou 5^{π}?

Para ajudá-lo a responder a essa questão, olhemos primeiro o gráfico da função $y = 2^x$, nos pontos em que x é racional. Uma representação desse gráfico encontra-se na Figura 1. Queremos aumentar o domínio de $y = 2^x$ para incluir tanto os números racionais quanto os irracionais.

FIGURA 1
Representação de $y = 2^x$, x racional

No gráfico da Figura 1, existem buracos correspondentes aos valores irracionais de x. Queremos preencher os buracos definindo $f(x) = 2^x$, onde $x \in \mathbb{R}$, de modo que f seja uma função crescente. Em particular, uma vez que o número irracional $\sqrt{3}$ satisfaz

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

devemos ter

$$2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8}$$

■ Uma demonstração dessa afirmação é dada em J. Marsden e A. Weinstein, *Calculus Unlimited* (Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1981).

e sabemos o que $2^{1{,}7}$ e $2^{1{,}8}$ significam, pois 1,7 e 1,8 são números racionais. Analogamente, usando melhores aproximações para $\sqrt{3}$, obtemos melhores aproximações para $2^{\sqrt{3}}$:

$$\begin{array}{rcl}
1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 & \Rightarrow & 2^{1{,}73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}74} \\
1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 & \Rightarrow & 2^{1{,}732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}733} \\
1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321 & \Rightarrow & 2^{1{,}7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}7321} \\
1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206 & \Rightarrow & 2^{1{,}73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}73206} \\
\vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots
\end{array}$$

Pode ser mostrado que há exatamente um número maior que todos os números

$$2^{1{,}7},\quad 2^{1{,}73},\quad 2^{1{,}732},\quad 2^{1{,}7320},\quad 2^{1{,}73205},\quad \ldots$$

e menor que todos os números

$$2^{1{,}8},\quad 2^{1{,}74},\quad 2^{1{,}733},\quad 2^{1{,}7321},\quad 2^{1{,}73206},\quad \ldots$$

FIGURA 2
$y = 2^x$, x real

Definimos $2^{\sqrt{3}}$ como esse número. Usando o processo de aproximação precedente podemos calculá-lo corretamente com seis casas decimais:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997$$

Analogamente, podemos definir 2^x (ou a^x, se $a > 0$), onde x é um número irracional qualquer. A Figura 2 mostra como todos os buracos da Figura 1 foram preenchidos para completar o gráfico da função $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Os gráficos dos membros da família de funções $y = a^x$ estão na Figura 3, para vários valores da base a. Observe que todos esses gráficos passam pelo mesmo ponto (0, 1), pois $a^0 = 1$, para $a \neq 0$. Observe que a função exponencial cresce mais rapidamente à medida que a fica maior (para $x > 0$).

■ Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de 0 à medida que x cresce. Se $a > 1$, então a^x tende a 0 conforme x decresce por valores negativos. Em ambos os casos, o eixo x é uma assíntota horizontal. Esses assuntos serão discutidos na Seção 2.6.

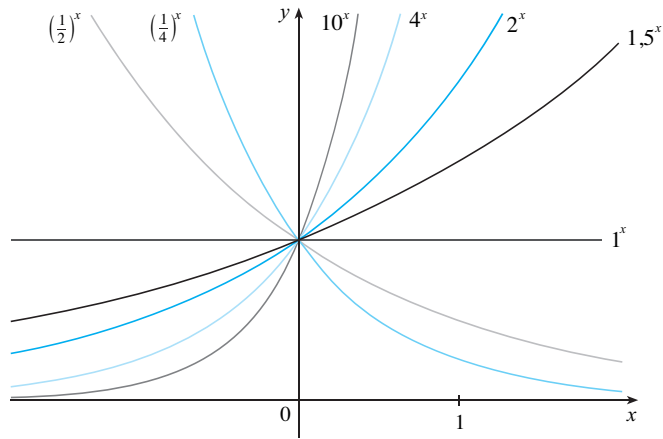



FIGURA 3

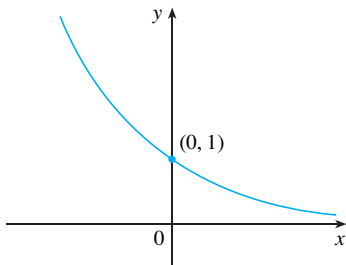
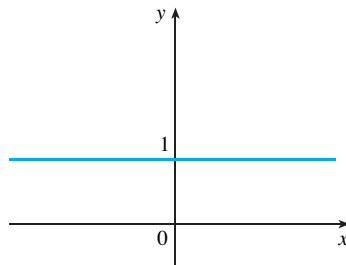
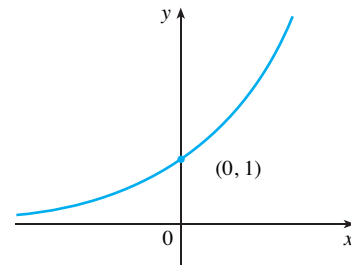
Você pode ver na Figura 3 que basicamente existem três tipos de função exponencial $y = a^x$. Se $0 < a < 1$, a função exponencial decresce; se $a = 1$, ela é uma constante; e se $a > 1$, ela cresce. Esses três casos estão na Figura 4. Observe que se $a \neq 1$, então a função exponencial $y = a^x$ tem o domínio $\mathbb{R}$ e a imagem $(0, \infty)$. Além disso, uma vez que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, o gráfico de $y = (1/a)^x$ é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno do eixo y.

(a) $y = a^x, 0 < a < 1$

(b) $y = 1^x$

(c) $y = a^x, a > 1$

FIGURA 4

Uma razão para a importância da função exponencial está nas propriedades a seguir. Se x e y forem números racionais, então essas propriedades são bem conhecidas da álgebra elementar. Pode-se demonstrar que elas permanecem verdadeiras para números reais arbitrários x e y. (Veja o Apêndice G.)

PROPRIEDADE DOS EXPOENTES Se a e b forem números positivos e x e y, números reais quaisquer, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

■ Para uma revisão sobre as reflexões e translações de gráficos, veja a Seção 1.3.

EXEMPLO 1 Esboce o gráfico da função $y = 3 - 2^x$ e determine seu domínio e imagem.

SOLUÇÃO Primeiro refletimos o gráfico de $y = 2^x$ [mostrado na Figura 2 e 5(a)] em torno do eixo x para obter o gráfico de $y = -2^x$ na Figura 5(b). A seguir deslocamos o gráfico de $y = -2^x$ em 3 unidades para cima, para obter o gráfico de $y = 3 - 2^x$ na Figura 5(c). O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem, $(-\infty, 3)$.

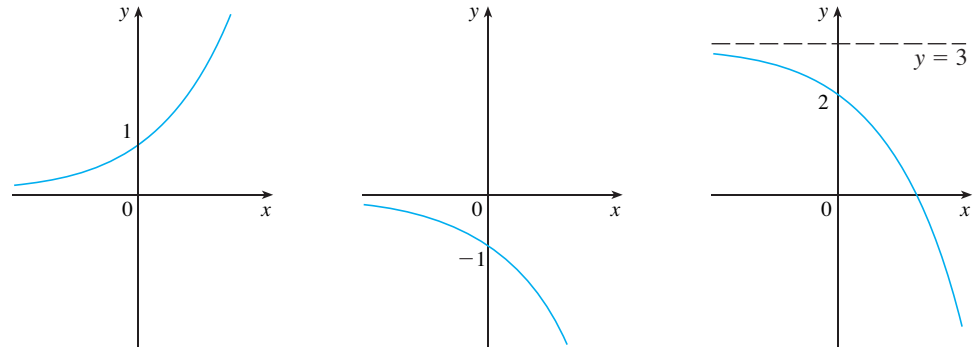



FIGURA 5 (a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$ □

■ O Exemplo 2 mostra que $y = 2^x$ aumenta mais rapidamente que $y = x^2$. Para verificar quão rapidamente $f(x) = 2^x$ cresce, vamos fazer a seguinte experiência mental. Começaremos com um pedaço de papel com uma espessura de 1 milésimo de polegada e vamos dobrá-lo pela metade 50 vezes. Cada vez que dobramos o papel pela metade, a sua espessura se duplica; assim, a sua espessura resultante seria de $2^{50}/1\,000$ polegadas. Que espessura você acha que isso representa? De fato, mais que cem milhões de quilômetros!

EXEMPLO 2 Use uma ferramenta gráfica para comparar a função exponencial $f(x) = 2^x$ e a função potência $g(x) = x^2$. Qual função crescerá mais rapidamente quando x for grande?

SOLUÇÃO A Figura 6 mostra os gráficos das duas funções na janela retangular $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Vemos que os gráficos se interceptam três vezes, mas, para $x > 4$, o gráfico de $f(x) = 2^x$ fica acima do gráfico de $g(x) = x^2$. A Figura 7 dá uma visão mais abrangente e mostra que, para grandes valores de x, a função exponencial $y = 2^x$ cresce muito mais rapidamente que a função potência $y = x^2$.

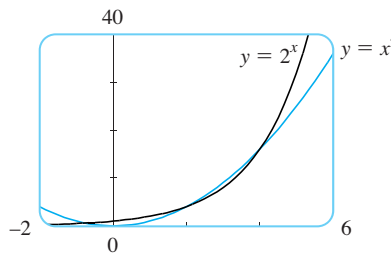
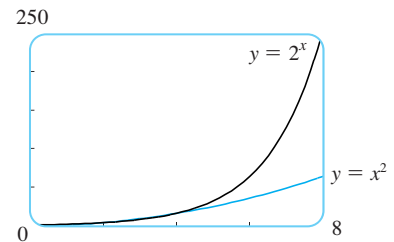



FIGURA 6 **FIGURA 7** □

APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

A função exponencial ocorre frequentemente em modelos matemáticos da natureza e da sociedade. Vamos indicar brevemente aqui como eles surgem na descrição do crescimento populacional e do decaimento radioativo. No Capítulo 3 vamos explorar estas e outras aplicações em mais detalhes.

Vamos considerar primeiro uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Suponhamos que tomando amostras da população em certos intervalos de tempo fique determinado que a população dobra a cada hora. Se o número de bactérias no instante t for $p(t)$, onde t é medido em horas, e a população inicial for $p(0) = 1\,000$, então

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1\,000$$
$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1\,000$$
$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1\,000$$

TABELA 1

Ano	População (milhões)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080

Desse padrão parece que, em geral,

$$p(t) = 2^t \times 1\,000 = (1\,000)2^t$$

A função população é um múltiplo constante da função exponencial $y = 2^t$; logo, ela exibe o rápido crescimento que observamos nas Figuras 2 e 7. Sob condições ideais (espaço e alimentos ilimitados e ausência de doenças) esse crescimento exponencial é típico do que ocorre realmente na natureza.

O que pode ser dito sobre a população humana? A Tabela 1 mostra os dados da população mundial do século XX, e a Figura 8 mostra o correspondente diagrama de dispersão.

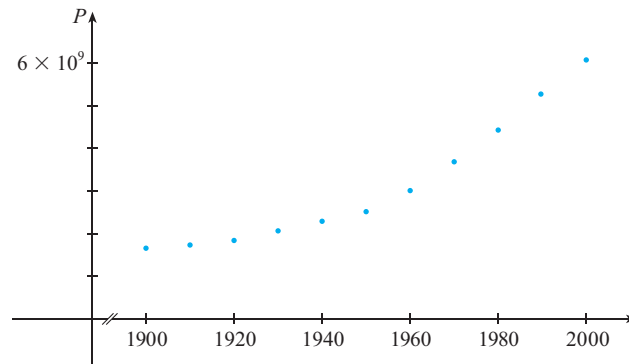



FIGURA 8 Diagrama de dispersão para o crescimento populacional mundial

O padrão dos dados da Figura 8 sugere um crescimento exponencial; assim, se usarmos uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial por mínimos quadrados, obteremos o seguinte modelo exponencial:

$$P = (0{,}008079266) \cdot (1{,}013731)^t$$

A Figura 9 mostra o gráfico dessa função exponencial junto com os pontos originais. Podemos ver que a curva exponencial se ajusta razoavelmente aos dados. Os períodos de crescimento populacional lento podem ser explicados pelas duas guerras mundiais e pela depressão dos anos 1930.

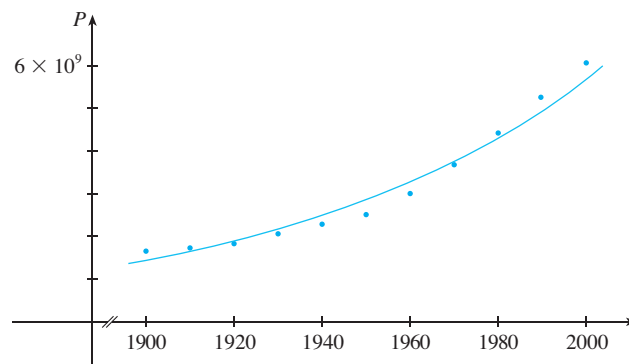



FIGURA 9 Modelo exponencial para o crescimento populacional

O NÚMERO *e*

Dentre todas as bases possíveis para uma função exponencial, há uma que é mais conveniente para os propósitos do cálculo. Na escolha de uma base a pesa muito a forma como a função $y = a^x$ cruza o eixo y. As Figuras 10 e 11 mostram as retas tangentes ao gráfico de $y = 2^x$ e $y = 3^x$ no ponto $(0, 1)$. (As retas tangentes serão precisamente definidas na Seção 2.7; por ora vamos pensar na reta tangente ao gráfico da exponencial em um ponto como a reta que toca o gráfico em um único ponto.) Se medirmos as inclinações das retas tangentes em $(0, 1)$, encontraremos $m \approx 0{,}7$ para $y = 2^x$ e $m \approx 1{,}1$ para $y = 3^x$.

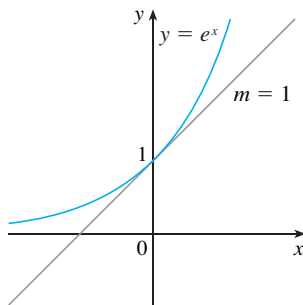
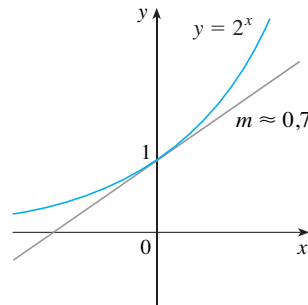
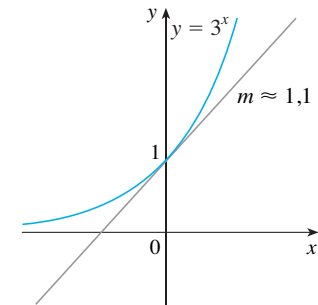



FIGURA 10

FIGURA 11

FIGURA 12
A função exponencial natural que cruza o eixo y com inclinação 1

Conforme será visto no Capítulo 3, as fórmulas do cálculo ficam muito simplificadas quando escolhemos como base a aquela para a qual resulta uma reta tangente a $y = a^x$ em $(0, 1)$ com uma inclinação de *exatamente* 1 (veja a Figura 12). De fato, existe um número assim e ele é denotado pela letra e. (Essa notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1727, provavelmente por ser a primeira letra da palavra *exponencial*.) Vendo as Figuras 10 e 11, não nos surpreende que o número e esteja entre 2 e 3 e o gráfico de $y = e^x$, entre $y = 2^x$ e $y = 3^x$ (veja a Figura 13). No Capítulo 3 veremos que o valor de e, correto até a quinta casa decimal, é

$$e \approx 2{,}71828$$

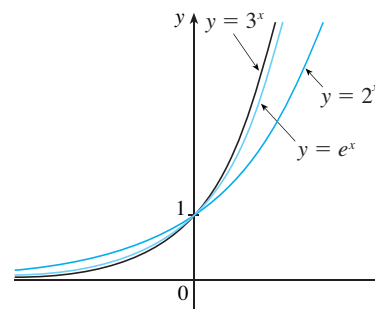



FIGURA 13

EXEMPLO 3 Faça o gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ e diga qual o domínio e a imagem.

SOLUÇÃO Começamos com o gráfico de $y = e^x$ das Figuras 12 e 14(a) e o refletimos em torno do eixo y para obter o gráfico de $y = e^{-x}$ ilustrado na Figura 14(b). (Observe que essa curva cruza o eixo y com uma inclinação de -1.) Então comprimimos verticalmente o gráfico por um fator de 2 para obter o gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ mostrado na Figura 14(c). Finalmente deslocamos o gráfico para baixo uma unidade, para obter o que foi pedido na Figura 14(d). O domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem é $(-1, \infty)$.

(a) $y=e^x$

(b) $y=e^{-x}$

(c) $y=\frac{1}{2}e^{-x}$

(d) $y=\frac{1}{2}e^{-x}-1$ □

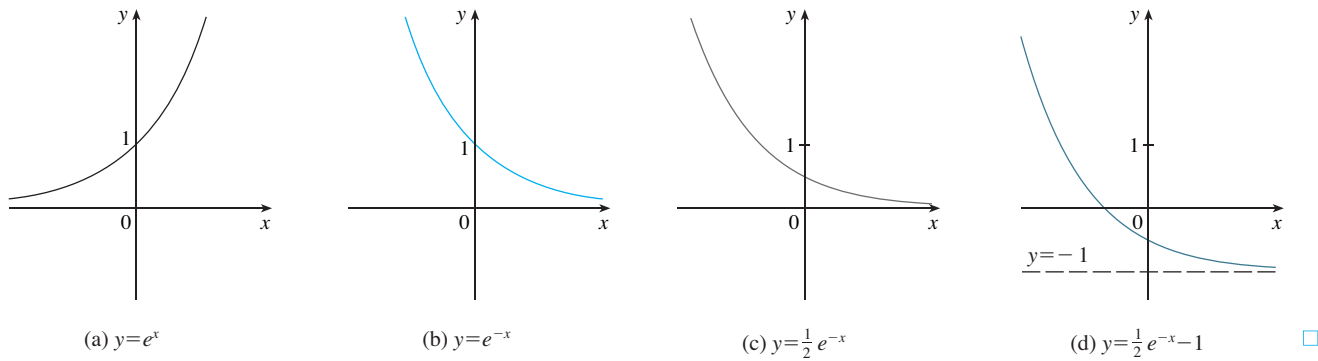



FIGURA 14

A que distância à direita da origem você estará quando o gráfico de $y = e^x$ ultrapassar 1 milhão? O próximo exemplo mostra a rapidez do crescimento dessa função, dando uma resposta a essa pergunta que poderá surpreendê-lo.

EXEMPLO 4 Use uma ferramenta gráfica para encontrar os valores de x para os quais $e^x > 1\,000\,000$.

SOLUÇÃO Na Figura 15 fizemos os gráficos de $y = e^x$ e da reta horizontal $y = 1\,000\,000$. Vemos que essas curvas se interceptam quando $x \approx 13{,}8$. Assim, $e^x > 10^6$ quando $x > 13{,}8$. Talvez seja surpreendente que os valores da função exponencial já ultrapassem 1 milhão quando x é somente 14.

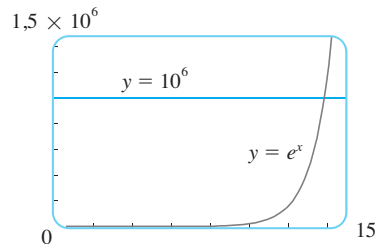



FIGURA 15 □

1.5 EXERCÍCIOS

1. (a) Escreva uma equação que defina a função exponencial com base $a > 0$.
(b) Qual é o domínio dessa função?
(c) Se $a \neq 1$, qual a imagem dessa função?
(d) Esboce a forma geral do gráfico da função exponencial nos seguintes casos.
(i) $a > 1$ (ii) $a = 1$ (iii) $0 < a < 1$

2. (a) Como é definido o número e?
(b) Qual o valor aproximado de e?
(c) Qual a função exponencial natural?

3–6 Faça em uma mesma tela os gráficos das funções dadas. Como estão relacionados esses gráficos?

3. $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$

4. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$

5. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

6. $y = 0{,}9^x$, $y = 0{,}6^x$, $y = 0{,}3^x$, $y = 0{,}1^x$

7–12 Faça um esboço do gráfico de cada função. Não use calculadora. Utilize somente os gráficos dados nas Figuras 3 e 12 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

7. $y = 4^x - 3$

8. $y = 4^{x-3}$

9. $y = -2^{-x}$

10. $y = 1 + 2e^x$

11. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

12. $y = 2(1 - e^x)$

13. Começando com o gráfico de $y = e^x$, escreva as equações correspondentes aos gráficos que resultam ao
(a) deslocar 2 unidades para baixo
(b) deslocar 2 unidades para a direita
(c) refletir em torno do eixo x
(d) refletir em torno do eixo y
(e) refletir em torno do eixo x e, depois, em torno do eixo y

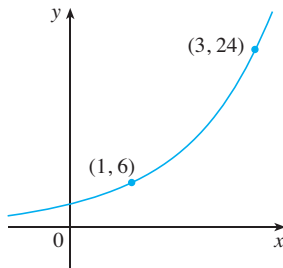
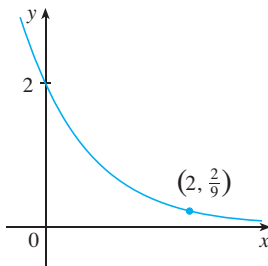
14. Começando com o gráfico de $y = e^x$, encontre as equações dos gráficos que resultam ao
(a) refletir em torno da reta $y = 4$
(b) refletir em torno da reta $x = 2$

15–16 Encontre o domínio de cada função

15. (a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

16. (a) $g(t) = \text{sen}(e^{-t})$ (b) $g(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

17–18 Encontre a função exponencial $f(x) = Ca^x$ cujo gráfico é dado.

17.

18.

19. Se $f(x) = 5^x$, mostre que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

20. Suponha que você receba uma oferta para trabalhar por apenas um mês. Qual das seguintes formas de pagamento você prefere?
I. Um milhão de dólares no fim do mês.
II. Um centavo de dólar no primeiro dia do mês, dois centavos no segundo dia, quatro centavos no terceiro dia, e, em geral, 2^{n-1} centavos de dólar no n-ésimo dia.

21. Suponha que os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ foram traçados sobre uma malha coordenada com 1 cm. Mostre que, a uma distância de 1 m à direita da origem, a altura do gráfico de f é de 100 m, enquanto a altura do gráfico de g é cerca de 10^{25} km.

22. Compare as funções $f(x) = x^5$ e $g(x) = 5^x$ por meio de seus gráficos em várias janelas retangulares. Encontre todos os pontos de intersecção dos gráficos corretos até uma casa decimal. Para grandes valores de x, qual função cresce mais rapidamente?

23. Compare as funções $f(x) = x^{10}$ e $g(x) = e^x$ traçando f e g em várias janelas retangulares. Quando o gráfico de g ultrapassa o de f?

24. Use um gráfico para estimar os valores de x tais que $e^x > 1\,000\,000\,000$.

25. Sob condições ideais sabe-se que uma certa população de bactérias dobra a cada 3 horas. Supondo que inicialmente existam 100 bactérias:
(a) Qual o tamanho da população após 15 horas?
(b) Qual o tamanho da população após t horas?
(c) Qual o tamanho da população após 20 horas?
(d) Trace o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 50 000 bactérias.

26. Uma cultura de bactérias começa com 500 indivíduos e dobra de tamanho a cada meia hora.
(a) Quantas bactérias existem após 3 horas?
(b) Quantas bactérias existem após t horas?
(c) Quantas bactérias existem após 40 minutos?
(d) Trace o gráfico da função população e estime o tempo para a população atingir 100 000 bactérias.

27. Utilize uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial para modelar a população mundial com os dados de 1950 a 2000 da Tabela 1 da página 46. Use o modelo para estimar a população em 1993 e para predizer a população em 2010.

28. A tabela fornece a população da Malásia, em milhões, para os anos 1950-2000. Use uma calculadora gráfica com capacidade para regressão exponencial para modelar a população do país desde 1950. Utilize o modelo para estimar a população em 1975 e para predizer a população em 2010 e 2020.

Ano	População	Ano	População
1950	6,1	1980	13,8
1955	7,0	1985	15,7
1960	8,1	1990	17,8
1965	9,5	1995	20,4
1970	10,9	2000	23,0
1975	12,3		

29. Se você traçar o gráfico da função

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

verá que f parece ser uma função ímpar. Demonstre isso.

30. Trace o gráfico de diversos membros da família de funções

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

em que $a > 0$. Como o gráfico muda conforme b varia? Como ele muda conforme a varia?

1.6 FUNÇÕES INVERSAS E LOGARITMOS

A Tabela 1 fornece os dados de uma experiência na qual uma cultura começou com 100 bactérias em um meio limitado em nutrientes; o tamanho da população foi registrado em intervalos de uma hora. O número N de bactérias é uma função do tempo t: $N = f(t)$.

Suponha, todavia, que o biólogo mude seu ponto de vista e passe a se interessar pelo tempo necessário para a população alcançar vários níveis. Em outras palavras, ele está pensando em t como uma função de N. Essa função, chamada *função inversa* de f, é denotada por f^{-1}, e deve ser lida assim: "inversa de f". Logo, $t = f^{-1}(N)$ é o tempo necessário para o nível da população atingir N. Os valores de f^{-1} podem ser encontrados olhando a Tabela 1 ao contrário ou consultando a Tabela 2. Por exemplo, $f^{-1}(550) = 6$, pois $f(6) = 550$.

TABELA 1 N como uma função de t

t (horas)	$N = f(t)$ = população no instante t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABELA 2 t como uma função de N

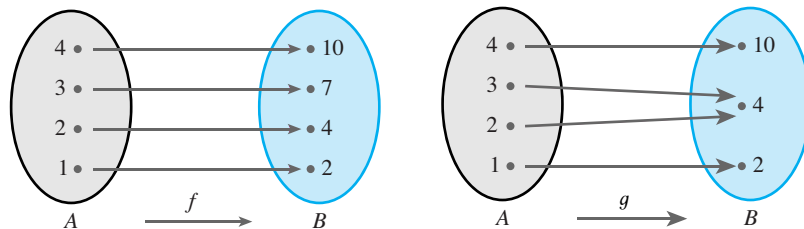
N	$t = f^{-1}(N)$ = tempo para atingir N bactérias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

Nem todas as funções possuem inversas. Vamos comparar as funções f e g cujo diagrama de flechas está na Figura 1. Observe que f nunca assume duas vezes o mesmo valor (duas entradas quaisquer em A têm saídas diferentes), enquanto g assume o mesmo valor duas vezes (2 e 3 têm a mesma saída, 4). Em símbolos,

$$g(2) = g(3)$$

mas $\qquad f(x_1) \neq f(x_2) \qquad$ sempre que $x_1 \neq x_2$

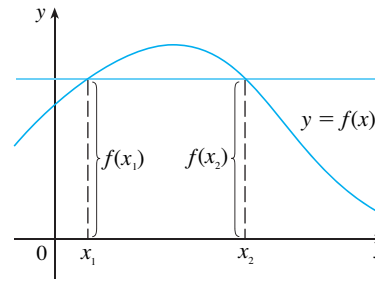
Funções que têm essa última propriedade são chamadas *funções injetoras*.

FIGURA 1
f é injetora; g não é

■ Na linguagem de entradas e saídas, essa definição diz que f é injetora se cada *saída* corresponde a uma única *entrada*.

1 DEFINIÇÃO Uma função f é chamada **função injetora** se ela nunca assume o mesmo valor duas vezes; isto é,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{sempre que } x_1 \neq x_2$$

Se uma reta horizontal intercepta o gráfico de f em mais de um ponto, então vemos da Figura 2 que existem números x_1 e x_2 tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Isso significa que f não é uma função injetora. Portanto, temos o seguinte método geométrico para determinar se a função é injetora.

FIGURA 2
Esta função não é injetora, pois $f(x_1) = f(x_2)$

TESTE DA RETA HORIZONTAL Uma função é injetora se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico em mais de um ponto.

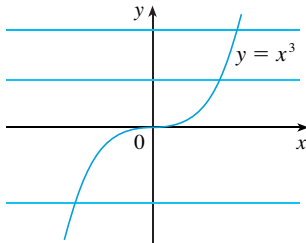



FIGURA 3
$f(x) = x^3$ é injetora

EXEMPLO 1 A função $f(x) = x^3$ é injetora?

SOLUÇÃO 1 Se $x_1 \neq x_2$, então $x_1^3 \neq x_2^3$ (dois números diferentes não podem ter o mesmo cubo). Portanto, pela Definição 1, $f(x) = x^3$ é injetora.

SOLUÇÃO 2 Da Figura 3 vemos que nenhuma reta horizontal intercepta o gráfico de $f(x) = x^3$ em mais de um ponto. Logo, pelo Teste da Reta Horizontal, f é injetora. □

EXEMPLO 2 A função $g(x) = x^2$ é injetora?

SOLUÇÃO 1 A função não é injetora, pois, por exemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

e, portanto, 1 e -1 têm a mesma saída.

SOLUÇÃO 2 Da Figura 4 vemos que existem retas horizontais que interceptam o gráfico de g mais de uma vez. Assim, pelo Teste da Reta Horizontal, g não é injetora. □

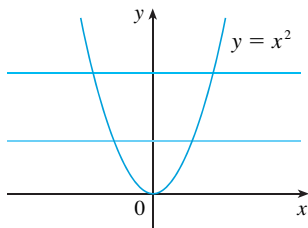



FIGURA 4
$g(x) = x^2$ não é injetora

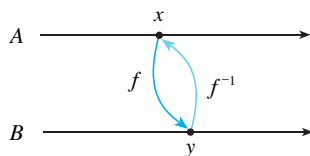
As funções injetoras são importantes, pois são precisamente as que possuem funções inversas, de acordo com a seguinte definição:

2 DEFINIÇÃO Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B. Então sua **função inversa** f^{-1} tem domínio B e imagem A, sendo definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

para todo y em B.

FIGURA 5

Essa definição afirma que se f transforma x em y, então f^{-1} transforma y de volta em x. (Se f não fosse injetora, então f^{-1} não seria definida de forma única.) O diagrama de flechas da Figura 5 mostra que f^{-1} reverte o efeito de f. Observe que

domínio de f^{-1} = imagem de f
imagem de f^{-1} = domínio de f

Por exemplo, a função inversa de $f(x) = x^3$ é $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ porque se $y = x^3$, então

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

ATENÇÃO Não confunda -1 de f^{-1} com um expoente. Assim

$$f^{-1}(x) \quad \textit{não} \text{ significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

O recíproco $1/f(x)$ pode, todavia, ser escrito como $[f(x)]^{-1}$.

EXEMPLO 3 Se $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ e $f(8) = -10$, encontre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(-10)$.

SOLUÇÃO Da definição de temos f^{-1}

$$\begin{aligned} f^{-1}(7) &= 3 \qquad \text{porque} \qquad f(3) = 7 \\ f^{-1}(5) &= 1 \qquad \text{porque} \qquad f(1) = 5 \\ f^{-1}(-10) &= 8 \qquad \text{porque} \qquad f(8) = -10 \end{aligned}$$

O diagrama na Figura 6 torna claro que f^{-1} reverte o efeito de f nesses casos.

A letra x é usada tradicionalmente como a variável independente; logo, quando nos concentramos em f^{-1} em vez de f, geralmente reverteremos os papéis de x e y na Definição 2 e escreveremos

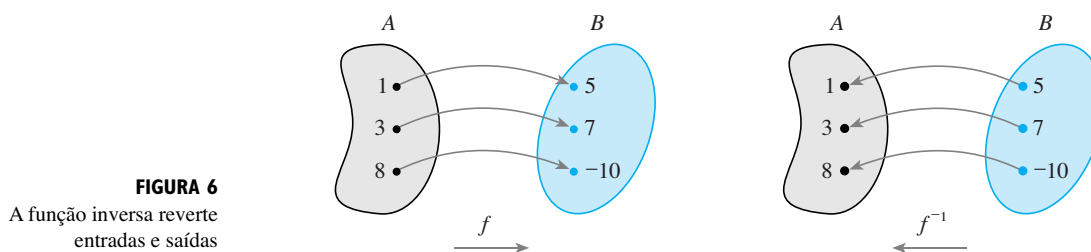



FIGURA 6
A função inversa reverte entradas e saídas

$$\boxed{3} \qquad \boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x}$$

Substituindo y na Definição 2 e x na (3), obtemos as seguintes **equações de cancelamento**:

$$\boxed{4} \qquad \begin{array}{|ll|} f^{-1}(f(x)) = x & \text{para todo } x \text{ em } A \\ f(f^{-1}(x)) = x & \text{para todo } x \text{ em } B \end{array}$$

A primeira lei do cancelamento diz que se começarmos em x, aplicarmos f e, em seguida, f^{-1}, obteremos de volta x, de onde começamos (veja o diagrama de máquina na Figura 7). Assim, f^{-1} desfaz o que f faz. A segunda equação diz que f desfaz o que f^{-1} faz.

Por exemplo, se $f(x) = x^3$, então $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ as equações de cancelamento ficam

$x \rightarrow f \rightarrow f(x) \rightarrow f^{-1} \rightarrow x$

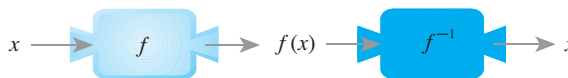



FIGURA 7

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= (x^3)^{1/3} = x \\ f(f^{-1}(x)) &= (x^{1/3})^3 = x \end{aligned}$$

Essas equações simplesmente dizem que a função cubo e a função raiz cúbica cancelam-se uma com a outra quando aplicadas sucessivamente.

Vamos ver agora como calcular as funções inversas. Se tivermos uma função $y = f(x)$ e formos capazes de isolar x nessa equação escrevendo-o em termos de y, então, de acordo com a Definição 2, devemos ter $x = f^{-1}(y)$. Se quisermos chamar a variável independente de x, trocamos x por y e chegamos à equação $y = f^{-1}(x)$.

5 COMO ACHAR A FUNÇÃO INVERSA DE UMA FUNÇÃO f INJETORA

Passo 1 Escreva $y = f(x)$.

Passo 2 Isole x nessa equação, escrevendo-o em termos de y (se possível).

Passo 3 Para expressar f^{-1} como uma função de x, troque x por y.
A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$.

EXEMPLO 4 Encontre a função inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUÇÃO De acordo com (5) escrevemos

$$y = x^3 + 2$$

Então, isolamos x nessa equação:

$$x^3 = y - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Finalmente, trocando x por y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

Portanto, a função inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$. □

■ No Exemplo 4, perceba que f^{-1} reverte o efeito de f. A função f é dada pela regra "eleve ao cubo e então adicione 2"; f^{-1} é dada pela regra "subtraia 2 e então tome a raiz cúbica".

O princípio de trocar x por y para encontrar a função inversa também nos dá um método de obter o gráfico f^{-1} a partir de f. Uma vez que $f(a) = b$ se e somente se $f^{-1}(b) = a$, o ponto (a, b) está no gráfico de f se e somente se o ponto (b, a) estiver sobre o gráfico de f^{-1}. Mas obtemos o ponto (b, a) de (a, b) refletindo-o em torno da reta $y = x$ (veja a Figura 8).

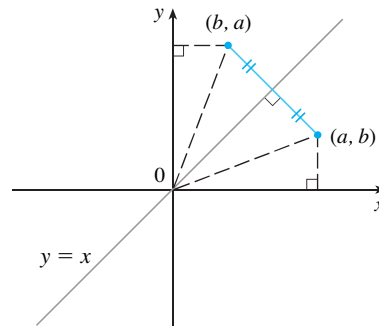



FIGURA 8

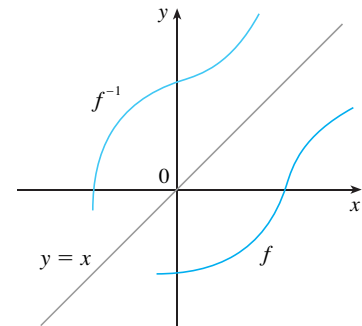
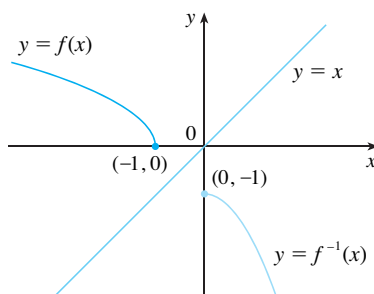



FIGURA 9

Portanto, conforme ilustrado na Figura 9:

O gráfico de f^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico de f em torno da reta $y = x$.

EXEMPLO 5 Esboce os gráficos de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ e de sua função inversa usando o mesmo sistema de coordenadas.

SOLUÇÃO Esboçamos primeiro a curva $y = \sqrt{-1 - x}$ (a metade superior da parábola $y^2 = -1 - x$ ou $x = -y^2 - 1$), e então, refletindo em torno da reta $y = x$, obtemos o gráfico de f^{-1} (veja a Figura 10). Como uma verificação de nosso gráfico, observe que a expressão para f^{-1} é $f^{-1}(x) = -x^2 - 1$, $x \geqslant 0$. Assim, o gráfico de f^{-1} é a metade à direita da parábola $y = -x^2 - 1$, e isso parece razoável pela Figura 10. □

FIGURA 10

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente ou decrescente, e, portanto, injetora pelo Teste da Reta Horizontal. Assim, existe uma função inversa f^{-1}, chamada **função logarítmica com base *a*** denotada por $\log_a$. Se usarmos a formulação de função inversa dada por (3)

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

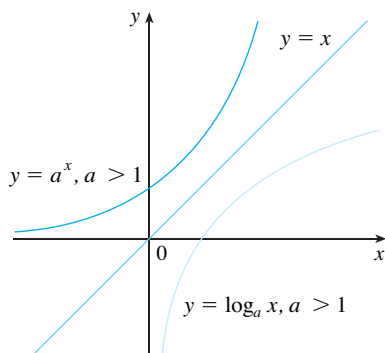
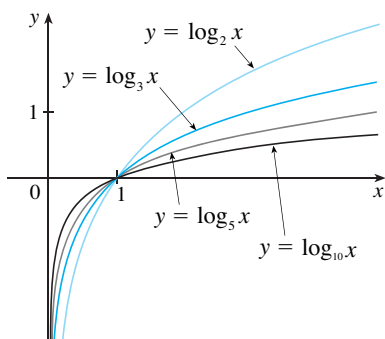
teremos

FIGURA 11

6
$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Dessa forma, se $x > 0$, então $\log_a x$ é o expoente ao qual deve se elevar a base a para se obter x. Por exemplo, $\log_{10} 0{,}001 = -3$ porque $10^{-3} = 0{,}001$.

As equações de cancelamento (4), quando aplicadas a $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, ficam assim:

7
$$\log_a(a^x) = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a x} = x \quad \text{para todo } x > 0$$

A função logarítmica $\log_a$ tem o domínio $(0, \infty)$ e a imagem $\mathbb{R}$. Seu gráfico é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno da reta $y = x$.

A Figura 11 mostra o caso em que $a > 1$. (As funções logarítmicas mais importantes têm base $a > 1$.) O fato de que $y = a^x$ é uma função que cresce muito rapidamente para $x > 0$ está refletido no fato de que $y = \log_a x$ é uma função de crescimento muito lento para $x > 1$.

A Figura 12 mostra os gráficos de $y = \log_a x$ com vários valores da base $a > 1$. Uma vez que $\log_a 1 = 0$, os gráficos de todas as funções logarítmicas passam pelo ponto $(1, 0)$.

As seguintes propriedades das funções logarítmicas resultam das propriedades correspondentes das funções exponenciais dadas na Seção 1.5.

FIGURA 12

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS Se x e y forem números positivos, então

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (onde r é qualquer número real)

EXEMPLO 6 Use as propriedades dos logaritmos para calcular $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUÇÃO Usando a Propriedade 2, temos

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

porque $2^4 = 16$. □

■ **Notação para Logaritmos**
Na maioria dos livros de cálculo e ciências, bem como nas calculadoras, a notação usada para o logaritmo natural é $\ln x$, enquanto a de $\log x$ é utilizada para "logaritmo comum", $\log_{10} x$. Em textos mais avançados de matemática e literatura científica, e em linguagens de computação, porém, a notação $\log x$ geralmente denota o logaritmo natural.

LOGARITMOS NATURAIS

De todas as possíveis bases a para os logaritmos, veremos no Capítulo 3 que a escolha mais conveniente para uma base é e, definido na Seção 1.5. O logaritmo na base e é chamado **logaritmo natural** e tem uma notação especial:

$$\log_e x = \ln x$$

Se fizermos $a = e$ e substituirmos $\log_e$ por "ln" em (6) e (7), então as propriedades que definem a função logaritmo natural ficam

8 $$\ln x = y \iff e^y = x$$

9 $$\begin{aligned} \ln(e^x) &= x \qquad x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} &= x \qquad x > 0 \end{aligned}$$

Em particular, se fizermos $x = 1$, obteremos

$$\ln e = 1$$

EXEMPLO 7 Encontre x se $\ln x = 5$.

SOLUÇÃO 1 De (8) vemos que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Portanto, $x = e^5$.

(Se você tiver problemas com a notação "ln", substitua-a por $\log_e$. Então a equação torna-se $\log_e x = 5$; portanto, pela definição de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUÇÃO 2 Comece com a equação

$$\ln x = 5$$

e então aplique a função exponencial a ambos os lados da equação:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Mas a segunda equação do cancelamento em (9) afirma que $e^{\ln x} = x$. Portanto, $x = e^5$. □

EXEMPLO 8 Resolva a equação $e^{5-3x} = 10$.

SOLUÇÃO Tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados da equação e usando (9):

$$\begin{aligned} \ln(e^{5-3x}) &= 10 \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10) \end{aligned}$$

Uma vez que o logaritmo natural é encontrado em calculadoras científicas, podemos aproximar a solução: até quatro casas decimais, $x \approx 0{,}8991$. □

EXEMPLO 9 Expresse $\ln a + \frac{1}{2} \ln b$ como um único logaritmo.

SOLUÇÃO Usando as Propriedades 3 e 1 dos logaritmos, temos

$$\begin{aligned} \ln a + \tfrac{1}{2} \ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\ &= \ln a + \ln \sqrt{b} \\ &= \ln\left(a\sqrt{b}\right) \end{aligned}$$

□

A fórmula a seguir mostra que os logaritmos com qualquer base podem ser expressos em termos de logaritmos naturais.

10 **FÓRMULA DE MUDANÇA DE BASE** Para todo o número positivo a ($a \neq 1$), temos

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $y = \log_a x$. Então, de (6), temos $a^y = x$. Tomando-se os logaritmos naturais de ambos os lados da equação, obtemos $y \ln a = \ln x$. Portanto

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$ □

As calculadoras científicas têm uma tecla para os logaritmos naturais; assim, a Fórmula 10 nos capacita a usar a calculadora para calcular o logaritmo em qualquer base (conforme mostra o próximo exemplo). Analogamente, a Fórmula 10 nos permite fazer o gráfico de qualquer função logarítmica em calculadoras e computadores (veja os Exercícios 41 e 42).

EXEMPLO 10 Calcule $\log_8 5$, até a sexta casa decimal.

SOLUÇÃO A Fórmula 10 nos dá

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0{,}773976$$ □

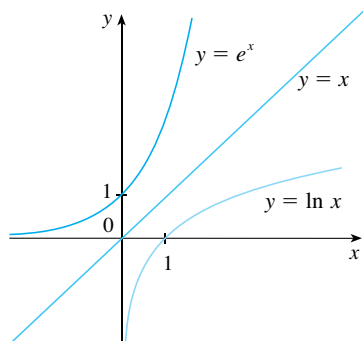



FIGURA 13

Os gráficos da função exponencial $y = e^x$ e de sua função inversa, o logaritmo natural, estão na Figura 13. Uma vez que a curva $y = e^x$ cruza o eixo y com uma inclinação 1, segue que a curva $y = \ln x$ cruza o eixo x com uma inclinação 1.

Assim como todas as outras funções logarítmicas com base maior que 1, o logaritmo natural é uma função crescente definida em $(0, \infty)$ e com o eixo y como assíntota vertical. (Ou seja, os valores de $\ln x$ se tornam números negativos muito grandes quando x tende a 0.)

EXEMPLO 11 Esboce o gráfico da função $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUÇÃO Começamos pelo gráfico $y = \ln x$ dado na Figura 13. Usando as transformações da Seção 1.3, o deslocamos duas unidades para a direita, obtendo o gráfico de $y = \ln(x - 2)$ e então o deslocamos uma unidade para cima, para obter o gráfico de $\ln(x - 2) - 1$ (veja a Figura 14).

□

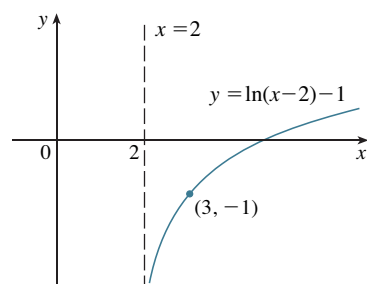
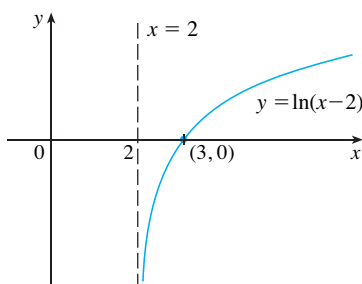
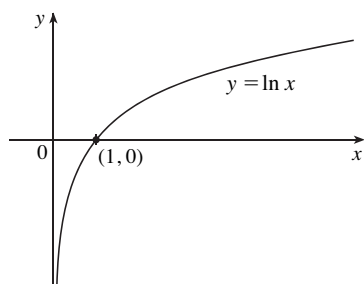



FIGURA 14

Embora $\ln x$ seja uma função crescente, seu crescimento é *muito* lento quando $x > 1$. De fato, $\ln x$ cresce mais lentamente que qualquer potência de x. Para ilustrar esse fato, vamos comparar os valores aproximados das funções $y = \ln x$ e $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ na tabela a seguir, bem como em seus gráficos nas Figuras 15 e 16. Você pode ver que inicialmente os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = \ln x$ crescem a taxas comparáveis, mas, com o tempo, a função raiz ultrapassa em muito o logaritmo.

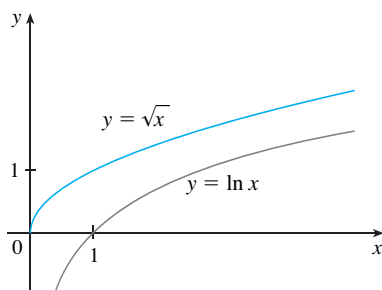



FIGURA 15

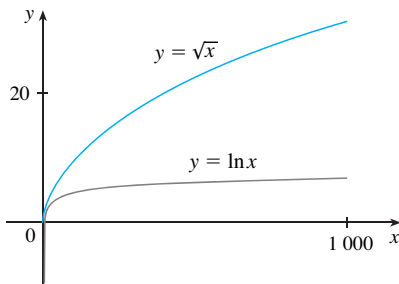



FIGURA 16

x	1	2	5	10	50	100	500	1 000	10 000	100 000
$\ln x$	0	0,69	1,61	2,30	3,91	4,6	6,2	6,9	9,2	11,5
$\sqrt{x}$	1	1,41	2,24	3,16	7,07	10,0	22,4	31,6	100	316
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0,49	0,72	0,73	0,55	0,46	0,28	0,22	0,09	0,04

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Quando tentamos encontrar as funções trigonométricas inversas, temos uma pequena dificuldade. Como as funções trigonométricas não são funções injetoras, elas não têm funções inversas. A dificuldade é superada restringindo-se os domínios dessas funções de forma a torná-las injetoras.

Você pode ver na Figura 17 que a função $y = \operatorname{sen} x$ não é injetora (use o Teste da Reta Horizontal). Mas a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ (veja a Figura 18) *é* injetora. A função inversa dessa função seno restrita f existe e é denotada por sen^{-1}, ou arcsen. Ela é chamada **inversa da função seno**, ou **função arco-seno**.

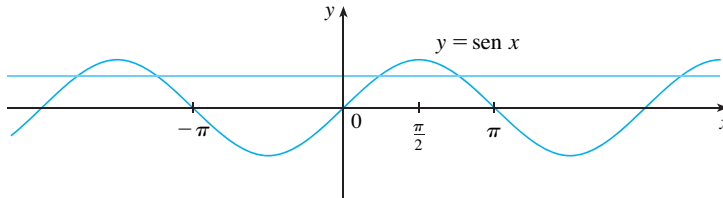



FIGURA 17

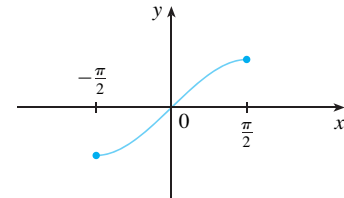



FIGURA 18 $y = \operatorname{sen} x,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Uma vez que a definição de uma função inversa diz que

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

temos

$$\boxed{\operatorname{sen}^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

Assim, se $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\operatorname{sen}^{-1} x$ é o número entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ cujo seno é x.

EXEMPLO 12 Calcule (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ e (b) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{3}\right)$.

SOLUÇÃO

(a) Temos

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

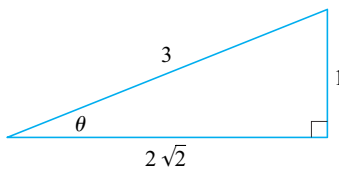
porque $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ e $\pi/6$ situa-se entre $-\pi/2$ e $\pi/2$.

(b) Seja $\theta = \operatorname{arcsen} \frac{1}{3}$, logo $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}$. Podemos desenhar um triângulo retângulo com o ângulo θ, como na Figura 19 e deduzir do Teorema de Pitágoras que o terceiro lado tem comprimento $\sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$. Isso nos possibilita interpretar a partir do triângulo que

FIGURA 19

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen} \tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

□

As equações de cancelamento para as funções inversas tornam-se, nesse caso,

$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x \text{ para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

A função inversa do seno, sen^{-1}, tem domínio $[-1, 1]$ e imagem $[-\pi/2, \pi/2]$, e seu gráfico, mostrado na Figura 20, é obtido daquela restrição da função seno (Figura 18) por reflexão em torno da reta $y = x$.

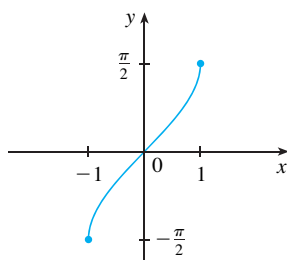



FIGURA 20
$y = \text{sen}^{-1}x = \text{arcsen}\, x$

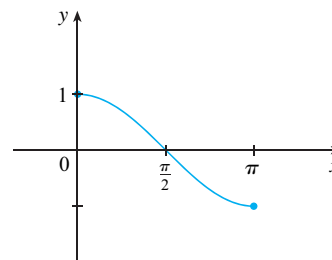



FIGURA 21
$y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

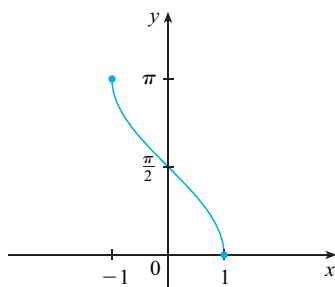
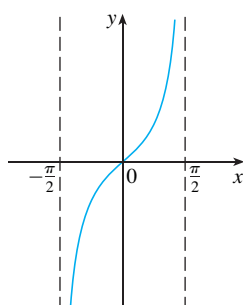
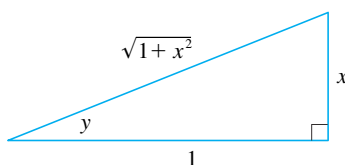



FIGURA 22
$y = \cos^{-1}x = \arccos x$

A **função inversa do cosseno** é tratada de modo similar. A função cosseno restrita $f(x) = \cos x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$, é injetora (veja a Figura 21); logo, ela tem uma função inversa denotada por $\cos^{-1}$ ou arccos.

$$\cos^{-1}x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \cos y = x \text{ e } 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

As equações de cancelamento são

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$
$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{para} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

A função inversa do cosseno, $\cos^{-1}$, tem domínio $[-1, 1]$ e imagem $[0, \pi]$. Seu gráfico está mostrado na Figura 22.

A função tangente se torna injetora quando restrita ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Assim, a **função inversa da tangente** é definida como a inversa da função $f(x) = \text{tg}\, x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ (veja a Figura 23). Ela é denotada por tg^{-1}, ou arctg.

FIGURA 23
$y = \text{tg}\, x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$\text{tg}^{-1}x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \text{tg}\, y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

EXEMPLO 13 Simplifique a expressão $\cos(\text{tg}^{-1} x)$.

SOLUÇÃO 1 Seja $y = \text{tg}^{-1} x$. Então $\text{tg}\, y = x$ e $-\pi/2 < y < \pi/2$. Queremos determinar $\cos y$, mas, uma vez que $\text{tg}\, y$ é conhecida, é mais fácil determinar $\sec y$ primeiro:

$$\sec^2 y = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2$$
$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad \text{(uma vez que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2)$$

Assim

$$\cos(\text{tg}^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

FIGURA 24

SOLUÇÃO 2 Em vez de usar as identidades trigonométricas como na Solução 1, talvez seja mais fácil fazer um diagrama. Se $y = \text{tg}^{-1} x$, então $\text{tg}\, y = x$, e podemos concluir da Figura 24 (que ilustra o caso $y > 0$) que

$$\cos(\text{tg}^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
□

A função inversa da tangente, $\text{tg}^{-1} = \text{arctg}$, tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(-\pi/2, \pi/2)$. O gráfico está mostrado na Figura 25.

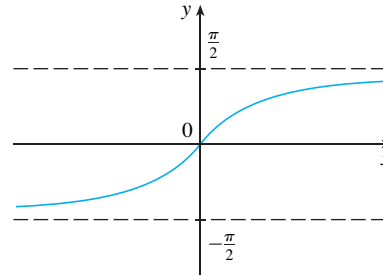



FIGURA 25
$y = \text{tg}^{-1} x = \text{arctg}\, x$

Sabemos que as retas $x = \pm\pi/2$ são assíntotas verticais do gráfico da tangente. Uma vez que o gráfico da tg^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico da função tangente restrita em torno da reta $y = x$, segue que as retas $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$ são assíntotas horizontais do gráfico de tg^{-1}.

As funções inversas trigonométricas restantes não são usadas com tanta frequência e estão resumidas aqui.

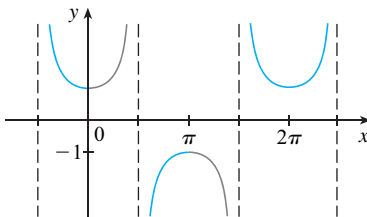
11

$y = \text{cossec}^{-1} x \; (\lvert x \rvert \geqslant 1)$	$\Leftrightarrow$	$\text{cossec}\, y = x$ e $y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$
$y = \sec^{-1} x \; (\lvert x \rvert \geqslant 1)$	$\Leftrightarrow$	$\sec y = x$ e $y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$
$y = \text{cotg}^{-1} x \; (x \in \mathbb{R})$	$\Leftrightarrow$	$\cot y = x$ e $y \in (0, \pi)$

FIGURA 26
$y = \sec x$

A escolha dos intervalos para y nas definições de cossec^{-1} e $\sec^{-1}$ não são de aceitação universal. Por exemplo, alguns autores usam $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ na definição de $\sec^{-1}$. (Você pode ver no gráfico da função secante da Figura 26 que ambas as escolhas são válidas.)

1.6 EXERCÍCIOS

1. (a) O que é uma função injetora?
(b) A partir do gráfico, como dizer se uma função é injetora?

2. (a) Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B. Como é definida a função inversa f^{-1}? Qual o domínio de f^{-1}? Qual a imagem de f^{-1}?
(b) Se for dada uma fórmula para f, como você encontrará uma fórmula para f^{-1}?
(c) Se for dado o gráfico de f, como você encontrará o gráfico de f^{-1}?

3–14 Uma função f é dada por uma tabela de valores, um gráfico, uma fórmula ou por meio de descrição verbal. Determine se f é injetora.

3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,5	2,0	3,6	5,3	2,8	2,0

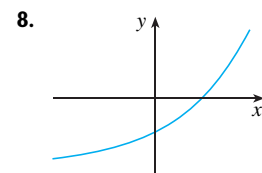
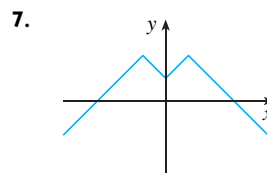
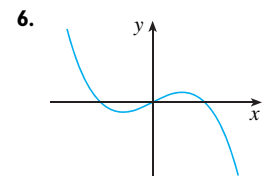
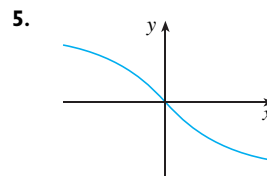
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	4	8	16	32

5.

6.

7.

8.

9. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$

10. $f(x) = 1 + 4x - x^2$

11. $g(x) = \lvert x \rvert$

12. $g(x) = \sqrt{x}$

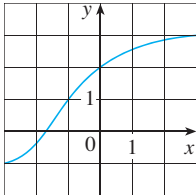
13. $f(t)$ é a altura de uma bola t segundos após ser chutada.

14. $f(t)$ é sua altura com t anos de idade.

15. Se f for uma função injetora tal que $f(2) = 9$, quanto é $f^{-1}(9)$?

16. Se $f(x) = 3 + x^2 + \text{tg}(\pi x/2)$, onde $-1 < x < 1$.
(a) Encontre $f^{-1}(3)$.
(b) Encontre $f(f^{-1}(5))$.

17. Se $g(x) = 3 + x + e^x$, ache $g^{-1}(4)$.

18. É dado o gráfico de f.
(a) Por que f é injetora?
(b) Determine o domínio e a imagem de f^{-1}.
(c) Qual o valor de $f^{-1}(2)$?
(d) Obtenha uma estimativa para o valor de $f^{-1}(0)$

19. A fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde $F \geqslant -459{,}67$, expressa a temperatura C em graus Celsius como uma função da temperatura F em graus Fahrenheit. Encontre uma fórmula para a função inversa e interprete-a. Qual o domínio da função inversa?

20. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula no repouso e c é a velocidade da luz no vácuo. Encontre a função inversa de f e explique seu significado.

21–26 Encontre uma fórmula para a função inversa.

21. $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$ **22.** $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{x^3}$ **24.** $y = 2x^3 + 3$

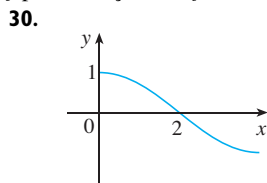
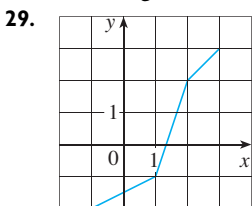
25. $y = \ln(x + 3)$ **26.** $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

27–28 Encontre uma fórmula explícita para f^{-1} e use-a para fazer na mesma tela os gráficos de f^{-1}, f e da reta $y = x$. Para verificar seu trabalho, veja se seus gráficos de f e f^{-1} são reflexões em torno da reta.

27. $f(x) = x^4 + 1, x \geqslant 0$ **28.** $f(x) = 2 - e^x$

29–30 Use o gráfico dado de f para esboçar o de f^{-1}.

29.

30.

31. (a) Como está definida a função logarítmica $y = \log_a x$?
(b) Qual o domínio dessa função?
(c) Qual a imagem dessa função?
(d) Esboce a forma geral do gráfico da função $y = \log_a x$ se $a > 1$.

32. (a) O que é o logaritmo natural?
(b) O que é o logaritmo comum?
(c) Esboce os gráficos, no mesmo sistema de coordenadas, das funções logaritmo natural e exponencial natural.

33–36 Encontre o valor exato de cada expressão.

33. (a) $\log_5 125$ (b) $\log_3 \frac{1}{27}$

34. (a) $\ln(1/e)$ (b) $\log_{10} \sqrt{10}$

35. (a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
(b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

36. (a) $e^{-2\ln 5}$ (b) $\ln\left(\ln e^{e^{10}}\right)$

37–38 Expresse a quantidade dada como um único logaritmo.

37. $\ln 5 + 5 \ln 3$

38. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2 \ln c$

39. $\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} \ln x - \ln \text{sen}\, x$

40. Use a Fórmula 10 para calcular cada logaritmo, correto até a sexta casa decimal.
(a) $\log_{12} 10$ (b) $\log_2 8{,}4$

41–42 Use a Fórmula 10 para fazer o gráfico das funções dadas em uma mesma tela. Como se relacionam esses gráficos?

41. $y = \log_{1,5} x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{50} x$

42. $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = e^x$, $y = 10^x$

43. Suponha que o gráfico de $y = \log_2 x$ seja feito sobre uma malha coordenada onde a unidade de comprimento seja 1 centímetro. Quantos quilômetros à direita da origem devemos percorrer antes de a altura da curva atingir 1 m?

44. Compare as funções $f(x) = x^{0,1}$ e $g(x) = \ln x$ traçando os gráficos de f e g em várias janelas retangulares. Quando finalmente o gráfico de f ultrapassa o de g?

45–46 Faça o esboço do gráfico de cada função. Não use a calculadora. Use somente os gráficos dados nas Figuras 12 e 13 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

45. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

46. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln |x|$

47–50 Resolva cada equação em x.

47. (a) $2 \ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

48. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

49. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

50. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde $a \neq b$

51–52 Resolva as equações em x.

51. (a) $e^x < 10$ (b) $\ln x > -1$

52. (a) $2 < \ln x < 9$ (b) $e^{2-3x} > 4$

53–54 Determine (a) o domínio de f e (b) f^{-1} e seu domínio.

53. $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$ **54.** $f(x) = \ln(2 + \ln x)$

SCA **55.** Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ e explique por que ela é injetora. Use então um sistema de computação algébrica (SCA) para encontrar uma expressão explícita para $f^{-1}(x)$. (Seu SCA vai produzir três expressões possíveis. Explique por que duas delas são irrelevantes neste contexto.)

SCA **56.** (a) Se $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geqslant 0$, use um sistema de computação algébrica para encontrar uma expressão para $g^{-1}(x)$.
(b) Use a expressão da parte (a) para fazer na mesma tela um gráfico de $y = g(x)$, $y = x$ e $y = g^{-1}(x)$.

57. Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$ (veja o Exercício 25 na Seção 1.5).
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quando a população atingirá 50 000 bactérias?

58. Após acionado o *flash* de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do *flash*, que armazena uma carga elétrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(A capacidade máxima de carga é Q_0, e t é medida em segundos.)
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quanto tempo levará para recarregar o capacitor 90% da capacidade, se $a = 2$?

59–64 Encontre o valor exato de cada expressão.

59. (a) $\text{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$

60. (a) $\text{tg}^{-1}(1/\sqrt{3})$ (b) $\sec^{-1} 2$

61. (a) arctg 1 (b) $\text{sen}^{-1}(1/\sqrt{2})$

62. (a) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

63. (a) tg(arctg 10) (b) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}(7\pi/3))$

64. (a) $\text{tg}(\sec^{-1} 4)$ (b) $\text{sen}\left(2\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

65. Demonstre que $\cos(\text{sen}^{-1}) = \sqrt{1 - x^2}$

66–68 Simplifique a expressão.

66. $\text{tg}(\text{sen}^{-1} x)$

67. $\text{sen}(\text{tg}^{-1} x)$

68. $\cos(2\,\text{tg}^{-1} x)$

69–70 Obtenha os gráficos das funções dadas em uma mesma tela. Como esses gráficos estão relacionados?

69. $y = \text{sen}\, x$; $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $y = \text{sen}^{-1} x$, $y = x$

70. $y = \text{tg}\, x$; $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y = \text{tg}^{-1} x$, $y = x$

71. Determine o domínio e a imagem da função

$$g(x) = \text{sen}^{-1}(3x + 1)$$

72. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(\text{sen}^{-1} x)$ e explique sua aparência.
(b) Faça o gráfico da função $g(x) = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x)$. Como você pode explicar a aparência desse gráfico?

73. (a) Se transladamos uma curva para a esquerda, o que acontece com sua reflexão em torno da reta $y = x$? Em vista deste princípio geométrico, encontre uma expressão para a inversa de $g(x) = f(x + c)$, em que f é uma função injetora.
(b) Encontre uma expressão para a inversa de $h(x) = f(cx)$, em que $c \neq 0$.

1 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) O que é uma função? O que são domínio e imagem da função?
(b) O que é o gráfico de uma função?
(c) Como podemos dizer se uma dada curva é o gráfico de uma função?

2. Discuta as quatro maneiras de representar uma função. Ilustre com exemplos.

3. (a) O que é uma função par? Como saber a partir do gráfico se uma função é par ou não?
(b) O que é uma função ímpar? Como saber a partir do gráfico se uma função é ímpar ou não?

4. O que é uma função crescente?

5. O que é um modelo matemático?

6. Dê um exemplo de cada tipo de função.
(a) Função linear (b) Função potência
(c) Função exponencial (d) Função quadrática
(e) Função polinomial de grau 5 (f) Função racional

7. Esboce à mão no mesmo sistema de coordenadas os gráficos das seguintes funções.
(a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$

8. Esboce à mão o gráfico de cada função.
(a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = \operatorname{tg} x$
(c) $y = e^x$ (d) $y = \ln x$
(e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
(g) $y = \sqrt{x}$ (h) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$

9. Suponha que os domínios de f e g sejam A e B, respectivamente.
(a) Qual o domínio de $f + g$?
(b) Qual o domínio de fg?
(c) Qual o domínio de f/g?

10. Como é definida a função composta $f \circ g$? Qual seu domínio?

11. Suponha que seja dado o gráfico de f. Escreva a equação para cada um dos seguintes gráficos obtidos a partir do gráfico de f:
(a) Deslocado 2 unidades para cima.
(b) Deslocado 2 unidades para baixo.
(c) Deslocado 2 unidades para a direita.
(d) Deslocado 2 unidades para a esquerda.
(e) Refletido em torno do eixo x.
(f) Refletido em torno do eixo y.
(g) Expandido verticalmente por um fator de 2.
(h) Contraído verticalmente por um fator de 2.
(i) Expandido horizontalmente por um fator de 2.
(j) Contraído horizontalmente por um fator de 2.

12. (a) O que é uma função injetora? Como decidir a partir de seu gráfico se uma função é injetora?
(b) Seja f uma função injetora. Como é definida sua função inversa f^{-1}? Como obter o gráfico de f^{-1} a partir do de f?

13. (a) Como a inversa da função seno, $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$, é definida? Qual é o seu domínio e qual é a sua imagem?
(b) Como a inversa da função cosseno, $f(x) = \cos^{-1} x$, é definida? Qual é o seu domínio e qual é a sua imagem?
(c) Como a inversa da função tangente, $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$, é definida? Qual é o seu domínio e qual é a sua imagem?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se f for uma função, então $f(s + t) = f(s) + f(t)$.

2. Se $f(s) = f(t)$, então $s = t$.

3. Se f for uma função, então $f(3x) = 3f(x)$.

4. Se $x_1 < x_2$ e f for uma função decrescente, então $f(x_1) > f(x_2)$.

5. Uma reta vertical intercepta o gráfico de uma função no máximo uma vez.

6. Se f e g são funções, então $f \circ g = g \circ f$.

7. Se f for injetora, então $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

8. É sempre possível dividir por e^x.

9. Se $0 < a < b$, então $\ln a < \ln b$.

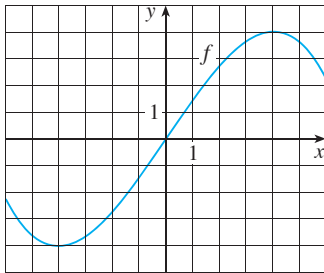
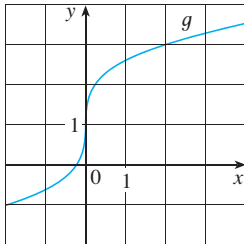
10. Se $x > 0$, então $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.

11. Se $x > 0$ e $a > 1$, então $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.

12. $\operatorname{tg}^{-1}(-1) = 3\pi/4$

13. $\operatorname{tg}^{-1} x = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\cos^{-1} x}$

EXERCÍCIOS

1. Seja f a função cujo gráfico é dado.
(a) Estime o valor de $f(2)$.
(b) Estime os valores de x tais que $f(x) = 3$.
(c) Diga qual é o domínio de f.
(d) Diga qual é a imagem de f.
(e) Em qual intervalo a função f está crescendo?
(f) f é injetora? Explique.
(g) f é par, ímpar ou nenhum dos dois? Explique.

2. É dado o gráfico de g.
(a) Diga o valor de $g(2)$.
(b) Por que g é injetora?
(c) Estime o valor de $g^{-1}(2)$.
(d) Estime o domínio de g^{-1}.
(e) Esboce o gráfico de g^{-1}.

3. Se $f(x) = x^2 - 2x + 3$, calcule o quociente das diferenças

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

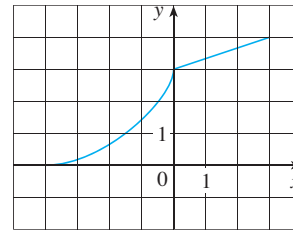
4. Esboce o gráfico do rendimento de uma colheita como uma função da quantidade de fertilizante usada.

5-8 Encontre o domínio e a imagem das funções.

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$ **6.** $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$

7. $h(x) = \ln(x + 6)$ **8.** $F(t) = 3 + \cos 2t$

9. Suponha que seja dado o gráfico de f. Descreva como os gráficos das seguintes funções podem ser obtidos a partir do gráfico de f.
(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x + 8)$
(c) $y = 1 + 2f(x)$ (d) $y = f(x - 2) - 2$
(e) $y = -f(x)$ (f) $y = f^{-1}(x)$

10. Dado o gráfico de f, desenhe os gráficos das seguintes funções.
(a) $y = f(x - 8)$ (b) $y = -f(x)$
(c) $y = 2 - f(x)$ (d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
(e) $y = f^{-1}(x)$ (f) $y = f^{-1}(x + 3)$

11–16 Use transformações para esboçar o gráfico da função.

11. $y = -\text{sen}\, 2x$ **12.** $y = 3\ln(x - 2)$

13. $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$ **14.** $y = 2 - \sqrt{x}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ **16.** $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

17. Determine se f é par, ímpar ou nenhum dos dois.
(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$ (b) $f(x) = x^3 - x^7$
(c) $f(x) = e^{-x^2}$ (d) $f(x) = 1 + \text{sen}\, x$

18. Encontre uma expressão para a função cujo gráfico consiste no segmento de reta ligando o ponto $(-2, 2)$ ao ponto $(-1, 0)$ junto com a parte de cima do círculo com centro na origem e raio 1.

19. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - 9$, encontre as funções (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, (d) $g \circ g$, e seus domínios.

20. Expresse a função $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como uma composição de três funções.

21. A tabela fornece a população da Indonésia (em milhões) para os anos de 1950 a 2000. Decida que tipo de modelo é adequado e use-o para prever a população da Indonésia em 2010.

Ano	População	Ano	População
1950	80	1980	150
1955	86	1985	166
1960	96	1990	182
1965	107	1995	197
1970	120	2000	212
1975	134		

22. Um pequeno fabricante descobre que custa \$ 9 000 para produzir 1 000 torradeiras elétricas em uma semana e \$ 12 000 para produzir 1 500 torradeiras em uma semana.
(a) Expresse o custo como uma função do número de torradeiras produzidas, supondo que ele é linear. A seguir, esboce o gráfico.
(b) Qual a inclinação do gráfico e o que ela representa?
(c) Qual a intersecção com o eixo y do gráfico e o que ela representa?

23. Se $f(x) = 2x + \ln x$, encontre $f^{-1}(2)$.

24. Encontre a função inversa de

$$f(x) = \frac{x + 1}{2x + 1}$$

25. Encontre o valor exato de cada expressão.
(a) $e^{2\ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$
(c) $\text{tg}\,(\text{arcsen}\,\frac{1}{2})$ (d) $\text{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

26. Resolva cada equação para x.
(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$
(c) $e^{e^x} = 2$ (d) $\text{tg}^{-1} x = 1$

27. A população de uma certa espécie em um ambiente limitado, com a população inicial igual a 100 e capacidade para comportar 1 000 indivíduos, é

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}}$$

em que t é medido em anos.

(a) Faça o gráfico dessa função e estime quanto tempo levará para a população atingir 900 indivíduos.
(b) Encontre a inversa dessa função e explique seu significado.
(c) Use a função inversa para encontrar o tempo necessário para a população atingir 900 indivíduos. Compare o resultado com o da parte (a).

28. Faça o gráfico das três funções $y = x^a$, $y = a^x$ e $y = \log_a x$ na mesma tela para dois ou três valores de $a > 1$. Para grandes valores de x, quais dessas funções terão os maiores valores e quais terão os menores valores?

PRINCÍPIOS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Não existem regras rígidas que garantam sucesso na resolução de problemas. Porém, é possível esboçar alguns passos gerais no processo de resolver problemas e fornecer alguns princípios que poderão ser úteis ao resolver certos problemas. Estes passos e princípios são tão-somente o senso comum tornado explícito. Eles foram adaptados do livro de George Polya, *How to Solve It*.

1 Entendendo o problema

O primeiro passo é ler o problema e assegurar-se de que o entendeu claramente. Faça a si mesmo as seguintes perguntas:

Qual é a incógnita?
Quais são as quantidades dadas?
Quais são as condições dadas?

Para muitos problemas é proveitoso

fazer um diagrama

e identificar nele as quantidades dadas e pedidas.

Geralmente é necessário

introduzir uma notação apropriada

Ao escolher os símbolos para as incógnitas, frequentemente utilizamos letras tais como a, b, c, m, n, x e y, mas, em alguns casos, é proveitoso usar as iniciais como símbolos sugestivos; por exemplo, V para o volume ou t para o tempo.

2 Planejando

Encontre uma conexão entre a informação dada e a pedida que o ajude a encontrar a incógnita. Em geral, ajuda perguntar-se explicitamente: "Como posso relacionar o que foi dado com o que foi pedido?". Se não for possível visualizar imediatamente a conexão, as seguintes ideias podem ser úteis para delinear um plano.

Tente Reconhecer Algo Familiar Relacione a situação dada com seu conhecimento anterior. Olhe para a incógnita e tente se lembrar de um problema familiar que a envolva.

Tente Reconhecer os Padrões Alguns problemas são resolvidos reconhecendo-se o tipo de padrão no qual ocorrem. O padrão pode ser geométrico, numérico ou algébrico. Você pode ver a regularidade ou a repetição em um problema ou ser capaz de conjecturar sobre o padrão de seu desenvolvimento para depois demonstrá-lo.

Use Analogias Tente pensar sobre problemas análogos, isto é, um problema similar, um problema relacionado, mas que seja mais simples que o problema original. Se você puder resolver o problema similar mais simples, isso poderá lhe dar pistas para a solução do problema mais difícil. Por exemplo, se um problema envolver números muito grandes, você poderá primeiro tentar um problema similar com números menores. Caso o problema envolva a geometria tridimensional, você poderá tentar primeiro um problema similar bidimensional. Se seu problema for genérico, tente primeiro um caso especial.

Introduza Algo Mais Às vezes pode ser necessário introduzir algo novo, um auxílio extra, para que você faça a conexão entre o que foi dado e o que foi pedido. Por exemplo, em um problema no qual o diagrama é fundamental, a ajuda extra pode ser o traçado de uma nova reta nele. Em problemas mais algébricos, pode ser a introdução de uma nova incógnita, relacionada com a original.

Divida em Casos Algumas vezes temos de dividir o problema em vários casos e usar para cada um deles um argumento diferente. Por exemplo, empregamos essa estratégia quando tratamos com valores absolutos.

Trabalhe Retroativamente Às vezes é proveitoso imaginar o problema já resolvido e trabalhar passo a passo retroativamente até chegar ao que foi dado. Então você poderá reverter seus passos e, portanto, construir uma solução para o problema original. Esse procedimento é usado frequentemente na solução de equações. Por exemplo, ao resolver a equação $3x - 5 = 7$, supomos que x seja um número que satisfaça $3x - 5 = 7$ e trabalhamos retroativamente. Adicionamos 5 a ambos os lados da equação e então dividimos cada lado por 3 para obter $x = 4$. Como cada um desses passos pode ser revertido, resolvemos o problema.

Estabeleça Submetas Em um problema complexo é frequentemente útil estabelecer submetas (nas quais a situação desejada é apenas parcialmente satisfeita). Você pode atingir primeiro essas submetas e, depois, a partir delas, chegar à meta final.

Raciocínio Indireto Algumas vezes é apropriado lidar com o problema indiretamente. Para demonstrar, por contradição, que P implica Q, supomos que P seja verdadeira e Q seja falsa e tentamos ver por que isso não pode acontecer. De certa forma temos de usar essa informação e chegar a uma contradição do que sabemos com certeza ser verdadeiro.

Indução Matemática Para demonstrar afirmações que envolvem um número inteiro positivo n, é frequentemente útil usar o seguinte princípio:

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA (OU DA INDUÇÃO FINITA) Seja S_n uma afirmação sobre o número inteiro n.
Suponha que

1. S_1 seja verdadeira.

2. S_{k+1} seja verdadeira sempre que S_k for verdadeira.

Então S_n é verdadeira para todo inteiro positivo n.

Isso é razoável, pois uma vez que S_1 é verdadeira, segue, da condição 2 (com $k = 1$), que S_2 é também verdadeira. Então, utilizando a condição 2 com $k = 2$, vemos que S_3 é verdadeira. E novamente usando a condição 2 e, dessa vez, com $k = 3$, temos S_4 como verdadeira. Esse procedimento pode ser seguido indefinidamente.

3 Cumprindo o Plano

Na etapa 2 um plano foi delineado. Para cumpri-lo, devemos verificar cada etapa do plano e escrever os detalhes que demonstram que cada etapa está correta.

4 Revendo

Tendo completado nossa solução, é prudente revisá-la, em parte para ver se foram cometidos erros, e em parte para ver se podemos descobrir uma forma mais fácil de resolver o problema. Outra razão para a revisão é nos familiarizarmos com o método de resolução que pode ser útil na solução de futuros problemas. Descartes disse: "Todo problema que resolvi acabou se tornando uma regra que serviu posteriormente para resolver outros problemas".

Esses princípios da resolução de problemas serão ilustrados nos exemplos a seguir. Antes de ver as soluções, tente resolvê-los usando os princípios aqui estudados. Pode ser útil consultar de tempos em tempos esta seção, quando você estiver resolvendo os exercícios nos demais capítulos do livro.

EXEMPLO 1 Expresse a hipotenusa h do triângulo retângulo com uma área de 25 m^2 como uma função do seu perímetro P.

■ Entendendo o problema

SOLUÇÃO Classifique primeiro as informações identificando a quantidade desconhecida e os dados:

Incógnita: hipotenusa h
Quantidades dadas: perímetro P, área 25 m^2

■ Desenhando um diagrama

É útil fazer um diagrama; assim, fizemos isto na Figura 1.

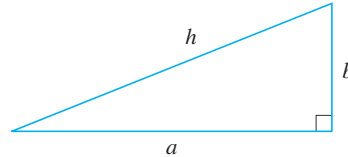



FIGURA 1

■ Ligando os dados com a incógnita
■ Introduzindo algo mais

A fim de conectar o que foi dado à incógnita, introduzimos duas variáveis extras, a e b, que são os comprimentos dos outros dois lados do triângulo. Isso nos possibilitará expressar a condição dada, de o triângulo ser retângulo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

As outras conexões entre as variáveis surgem escrevendo-se as expressões para a área e o perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Uma vez que P é dado, observe que temos agora três equações em três incógnitas a, b e h:

$$\boxed{1} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{2} \qquad 25 = \tfrac{1}{2}ab$$

$$\boxed{3} \qquad P = a + b + h$$

■ Relacionando com algo familiar

Embora tenhamos um número correto de equações, elas não são fáceis de resolver diretamente. Porém, se usarmos as estratégias de resolução de problemas para tentar reconhecer algo familiar, então poderemos resolver essas equações de forma mais fácil. Olhando os segundos membros das Equações 1, 2 e 3, eles não são familiares? Observe que eles contêm os ingredientes de uma fórmula familiar:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Usando essa ideia, vamos expressar $(a + b)^2$ de duas maneiras. Das Equações 1 e 2 temos

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

Da Equação 3 temos

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

Assim
$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$
$$2Ph = P^2 - 100$$
$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Essa é a expressão pedida de h como uma função de P. □

Como o exemplo a seguir ilustra, é frequentemente necessário usar o princípio de *dividir em casos* quando lidamos com valores absolutos.

EXEMPLO 2 Resolva a inequação $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

Solução Lembre-se da definição de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Segue que

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Analogamente

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x + 2 \geq 0 \\ -(x + 2) & \text{se } x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

■ Dividindo em casos

Essas expressões mostram que devemos considerar três casos:

$$x < -2 \qquad -2 \leq x < 3 \qquad x \geq 3$$

CASO I Se $x < -2$, temos

$$|x - 3| + |x + 2| < 11$$
$$-x + 3 - x - 2 < 11$$
$$-2x < 10$$
$$x > -5$$

CASO II Se $-2 \leq x < 3$, a desigualdade dada torna-se

$$-x + 3 + x + 2 < 11$$
$$5 < 11 \qquad \text{(sempre é verdadeiro)}$$

CASO III Se $x \geq 3$, a desigualdade torna-se

$$x - 3 + x + 2 < 11$$
$$2x < 12$$
$$x < 6$$

Combinando os casos I, II e III, vemos que a inequação está satisfeita quando $-5 < x < 6$. Logo a solução é o intervalo $(-5, 6)$. □

No exemplo a seguir, tentaremos conjecturar a resposta examinando casos especiais e reconhecendo um padrão. A seguir vamos demonstrá-la por indução matemática.

Ao usar o Princípio da Indução Matemática, vamos seguir as três etapas:

Passo 1 Demonstrar que S_n é verdadeira quando $n = 1$.

Passo 2 Supor que S_n é verdadeira quando $n = k$ e deduzir que S_n é verdadeira quando $n = k + 1$.

Passo 3 Concluir que S_n é verdadeira para todo n pelo Princípio da Indução Matemática.

■ Analogia: tentando um problema parecido, mais simples

EXEMPLO 3 Se $f_0(x) = x/(x + 1)$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre uma fórmula para $f_n(x)$.

SOLUÇÃO Começamos por encontrar fórmulas para $f_n(x)$ nos casos especiais $n = 1, 2$ e 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0\,(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0\,(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0\,(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

■ Procurando por um padrão

Observamos um padrão: o coeficiente de x no denominador de $f_n(x)$ é $n + 1$ nos três casos calculados. Assim sendo, fazemos a seguinte conjectura, no caso geral,

4
$$f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x+1}$$

Para demonstrar, usamos o Princípio da Indução Matemática. Já vimos que (4) é verdadeira para $n = 1$. Suponha que ela é verdadeira para $n = k$, isto é,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x+1}$$

Então $f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\left(\dfrac{x}{(k+1)x+1}\right)$

$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}$$

Essa expressão mostra que (4) é verdadeira para $n = k + 1$. Portanto, por indução matemática, é verdadeira para todo n inteiro positivo. □

PROBLEMAS

1. Um dos lados de um triângulo retângulo tem 4 cm de comprimento. Expresse o comprimento da altura perpendicular à hipotenusa como uma função do comprimento da hipotenusa.

2. A altura perpendicular à hipotenusa de um triângulo retângulo mede 12 cm. Expresse o comprimento da hipotenusa como uma função do perímetro.

3. Resolva a equação $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.

4. Resolva a inequação $|x - 1| - |x - 3| \geqslant 5$.

5. Esboce o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.

6. Esboce o gráfico da função $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$.

7. Faça o gráfico da equação $x + |x| = y + |y|$.

8. Faça o gráfico da equação $x^4 - 4x^2 - x^2y^2 + 4y^2 = 0$.

9. Esboce a região do plano que consiste de todos os pontos (x, y) tais que $|x| + |y| \leqslant 1$.

10. Esboce a região do plano que consiste de todos os pontos (x, y) tais que

$$|x - y| + |x| - |y| \leqslant 2$$

11. Cacule $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5) \cdots (\log_{31} 32)$.

12. (a) Mostre que a função $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ é ímpar.
(b) Encontre a função inversa de f.

13. Resolva a inequação $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$.

14. Use um raciocínio indireto para demonstrar que $\log_2 5$ é um número irracional.

15. Uma pessoa inicia uma viagem. Na primeira metade do percurso ela dirige sossegadamente a 60 km/h; na segunda, ela vai a 120 km/h. Qual sua velocidade média na viagem?

16. É verdadeiro que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?

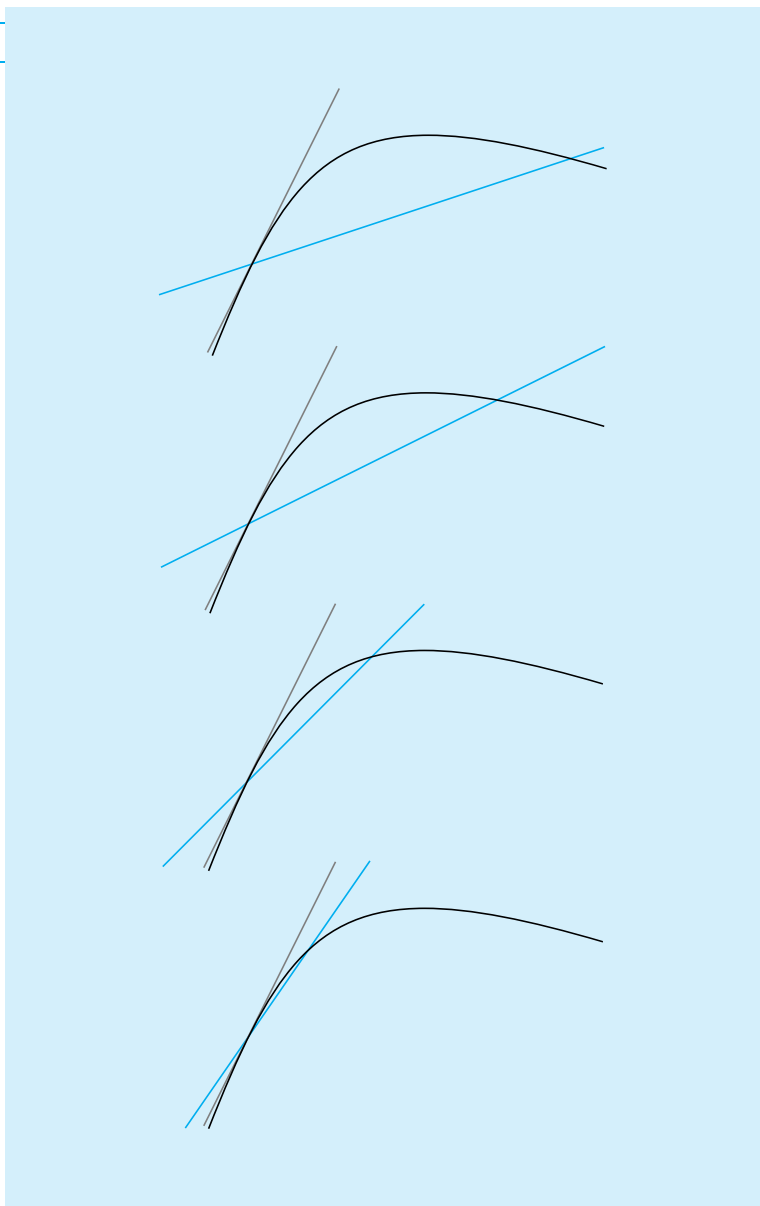
17. Demonstre que, se n for um inteiro positivo, então $7^n - 1$ é divisível por 6.

18. Demonstre que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

19. Se $f_0(x) = x^2$ e $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre uma fórmula para $f_n(x)$.

20. (a) Se $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ e $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encontre uma expressão para $f_n(x)$ e use a indução matemática para demonstrá-la.
(b) Faça na mesma tela os gráficos de f_0, f_1, f_2, f_3 e descreva os efeitos da composição repetida.

2

LIMITES E DERIVADAS

A ideia de limite é ilustrada por retas secantes tendendo a uma reta tangente

Em *Uma Apresentação do Cálculo* vimos como a ideia de limite é a base dos vários ramos do cálculo. Por isso, é apropriado começar nosso estudo de cálculo examinando os limites e suas propriedades. O tipo especial de limite usado para encontrar as tangentes e as velocidades dá origem à ideia central do cálculo diferencial – a derivada.

2.1 OS PROBLEMAS DA TANGENTE E DA VELOCIDADE

Nesta seção vamos ver como surgem os limites quando tentamos encontrar a tangente a uma curva ou a velocidade de um objeto.

O PROBLEMA DA TANGENTE

A palavra *tangente* vem do latim *tangens*, que significa "tocando". Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Ou seja, uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato. Como tornar precisa essa ideia?

Para um círculo, poderíamos simplesmente, como Euclides, dizer que a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez, conforme a Figura 1(a). Para as curvas mais complicadas essa definição é inadequada. A Figura 1(b) mostra duas retas, l e t, passando por um ponto P sobre uma curva C. A reta l intercepta C somente uma vez, mas certamente não se parece com o que pensamos ser uma reta tangente. A reta t, por outro lado, parece ser uma tangente, mas intercepta C duas vezes.

(a)

(b)

FIGURA 1

Para sermos objetivos, vamos examinar no exemplo a seguir o problema de encontrar uma reta t tangente à parábola $y = x^2$.

EXEMPLO 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Se soubermos como encontrar a inclinação m seremos capazes de achar uma equação para a reta tangente t. A dificuldade está em termos somente um ponto, P, sobre t, ao passo que para calcular a inclinação são necessários dois pontos. Observe, porém, que podemos calcular uma aproximação de m escolhendo um ponto próximo $Q(x, x^2)$ sobre a parábola (como na Figura 2) e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ.

Escolhendo $x \neq 1$ de forma que $Q \neq P$, temos

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por exemplo, para o ponto $Q(1{,}5, 2{,}25)$, temos

$$m_{PQ} = \frac{2{,}25 - 1}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$$

FIGURA 2

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

As tabelas mostram os valores de m_{PQ} para vários valores de x próximos de 1. Quanto mais próximo Q estiver de P, mais próximo x estará de 1, e a tabela parece indicar que m_{PQ} estará mais próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente t deve ser $m = 2$.

Dizemos que a inclinação da reta tangente é o *limite* das inclinações das retas secantes e expressamos isso simbolicamente escrevendo que

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Supondo que a inclinação da reta tangente seja realmente 2, podemos usar a forma ponto-inclinação da equação de uma reta (veja o Apêndice B) para escrever a equação da tangente no ponto $(1, 1)$ como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1$$

A Figura 3 ilustra o processo de limite que ocorre neste exemplo. À medida que Q tende a P ao longo da parábola, as retas secantes correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente t.

Q tende a P pela direita

Q tende a P pela esquerda

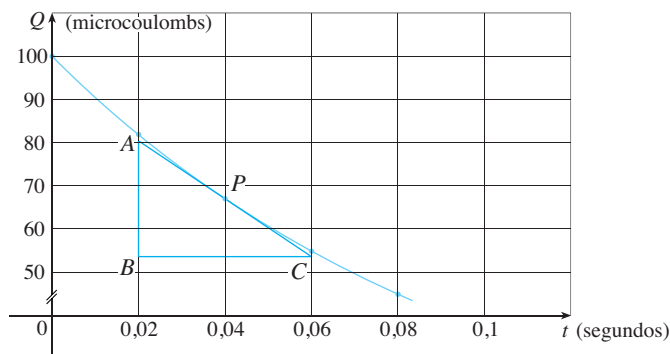
FIGURA 3

Em ciências, muitas funções não são descritas por equações explícitas; elas são definidas por dados experimentais. O exemplo a seguir mostra como estimar a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma dessas funções.

EXEMPLO 2 O *flash* de uma câmera opera armazenando carga em um capacitor e liberando-a instantaneamente ao ser disparado. Os dados na tabela à esquerda descrevem a carga Q armazenada no capacitor (medida em microcoulombs) no instante t (medido em segundos após o *flash* ter sido disparado). Use os dados para fazer o gráfico dessa função e estime a inclinação da reta tangente no ponto onde $t = 0{,}04$. [*Observação*: A inclinação da reta tangente representa o fluxo de corrente elétrica do capacitor para o *flash* (medido em microamperes).]

t	Q
0,00	100,00
0,02	81,87
0,04	67,03
0,06	54,88
0,08	44,93
0,10	36,76

SOLUÇÃO Na Figura 4 marcamos os pontos dados e os usamos para esboçar uma curva que aproxima o gráfico da função.

FIGURA 4

Dados os pontos $P(0{,}04, 67{,}03)$ e $R(0{,}00, 100{,}00)$ sobre o gráfico, descobrimos que a inclinação da reta secante PR é

R	m_{PR}
(0,00, 100,00)	−824,25
(0,02, 81,87)	−742,00
(0,06, 54,88)	−607,50
(0,08, 44,93)	−552,50
(0,10, 36,76)	−504,50

$$m_{PR} = \frac{100{,}00 - 67{,}03}{0{,}00 - 0{,}04} = -824{,}25$$

A tabela à esquerda mostra os resultados de cálculos semelhantes para as inclinações de outras retas secantes. A partir dela podemos esperar que a inclinação da reta tangente em $t = 0{,}04$ esteja em algum ponto entre -742 e $-607{,}5$. De fato, a média das inclinações das duas retas secantes mais próximas é

$$\frac{1}{2}(-742 - 607{,}5) = -674{,}75$$

Assim, por esse método, estimamos que a inclinação da reta tangente é -675.

Outro método é traçar uma aproximação da reta tangente em P e medir os lados do triângulo ABC, como na Figura 4. Isso dá uma estimativa da inclinação da reta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80{,}4 - 53{,}6}{0{,}06 - 0{,}02} = -670$$ □

■ O significado físico da resposta do Exemplo 2 é que a corrente que flui do capacitor para o *flash* após 0,04 s é cerca de −670 microamperes.

O PROBLEMA DA VELOCIDADE

Se você observar o velocímetro de um carro no tráfego urbano, verá que o ponteiro não fica parado por muito tempo; isto é, a velocidade do carro não é constante (não estamos considerando os congestionamentos). Podemos supor da observação do velocímetro que o carro tenha uma velocidade definida em cada momento. Mas como definir essa velocidade "instantânea"? Vamos esmiuçar o exemplo da bola caindo.

EXEMPLO 3 Suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

SOLUÇÃO Por meio de experimentos feitos séculos atrás, Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo em que ele esteve caindo (esse modelo para a queda livre despreza a resistência do ar). Se a distância percorrida após t segundos for chamada $s(t)$ e medida em metros, então a Lei de Galileu pode ser expressa pela equação

$$s(t) = 4{,}9t^2$$

A dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo ($t = 5$), ou seja, não temos um intervalo de tempo. Porém, podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um décimo de segundo, de $t = 5$ até $t = 5{,}1$:

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{mudança na posição}}{\text{tempo decorrido}}$$

$$= \frac{s(5{,}1) - s(5)}{0{,}1}$$

$$= \frac{4{,}9(5{,}1)^2 - 4{,}9(5)^2}{0{,}1} = 49{,}49 \text{ m/s}$$

A tabela a seguir mostra os resultados de cálculos similares da velocidade média em períodos de tempo cada vez menores.

Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53,9
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}1$	49,49
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}05$	49,245
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}01$	49,049
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}001$	49,0049

Parece que, à medida que encurtamos o período do tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima de 49 m/s. A **velocidade instantânea** quando $t = 5$ é definida como o valor limite dessas velocidades médias em períodos de tempo cada vez menores, começando em $t = 5$. Assim, a velocidade (instantânea) após 5 segundos é

$$v = 49 \text{ m/s}$$ □

Você deve ter percebido que os cálculos usados na solução desse problema são muito semelhantes àqueles usados anteriormente nesta seção para encontrar as tangentes. Na realidade, há uma estreita relação entre os problemas da tangente e do cálculo de velocidades. Se traçarmos o gráfico da função distância percorrida pela bola (como na Figura 5) e considerarmos os pontos $P(a, 4{,}9\, a^2)$ e $Q(a + h, 4{,}9(a + h)^2)$ sobre o gráfico, então a inclinação da reta secante PQ será

$$m_{PQ} = \frac{4{,}9(a + h)^2 - 4{,}9a^2}{(a + h) - a}$$

que é igual à velocidade média no intervalo de tempo $[a, a + h]$. Logo, a velocidade no instante $t = a$ (o limite dessas velocidades médias quando h tende a 0) deve ser igual à inclinação da reta tangente em P (o limite das inclinações das retas secantes).

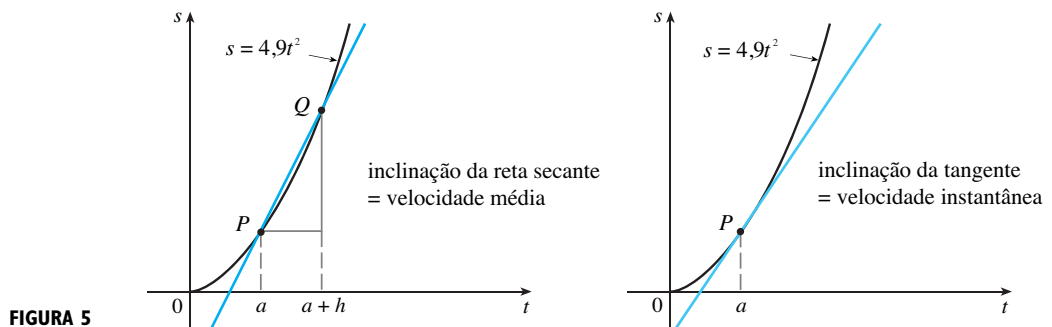



FIGURA 5

Os Exemplos 1 e 3 mostram que para resolver problemas de velocidade e de tangente precisamos encontrar limites. Após estudarmos métodos para o cálculo de limites nas próximas quatro seções, retornaremos aos problemas de encontrar tangentes e velocidades na Seção 2.7.

2.1 EXERCÍCIOS

1. Um tanque com capacidade para 1 000 litros de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em litros) após t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (L)	694	444	250	111	28	0

(a) Se P é o ponto $(15, 250)$ sobre o gráfico de V, encontre as inclinações das retas secantes PQ, onde Q é o ponto sobre o gráfico correspondente a $t = 5, 10, 20, 25$ e 30.

(b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.

(c) Use o gráfico da função para estimar a inclinação da reta tangente em P. (Essa inclinação representa a taxa segundo a qual a água escoa do tanque após 15 minutos.)

2. Um monitor é usado para medir os batimentos cardíacos de um paciente após uma cirurgia. Ele fornece um número de batimentos cardíacos após t minutos. Quando os dados na tabela são colocados em um gráfico, a inclinação da reta tangente representa a taxa de batimentos cardíacos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Batimentos cardíacos	2 530	2 661	2 806	2 948	3 080

O monitor estima esse valor calculando a inclinação de uma reta secante. Use os dados para estimar a taxa de batimentos cardíacos após 42 minutos, utilizando a reta secante entre os pontos para os valores de t dados.

(a) $t = 36$ e $t = 42$ (b) $t = 38$ e $t = 42$

(c) $t = 40$ e $t = 42$ (d) $t = 42$ e $t = 44$

Quais são suas conclusões?

3. O ponto $P(1, \frac{1}{2})$ pertence à curva $y = x/(1 + x)$.

(a) Se Q é o ponto $(x, x/(1 + x))$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ, com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x:

(i) 0,5 (ii) 0,9 (iii) 0,99 (iv) 0,999

(v) 1,5 (vi) 1,1 (vii) 1,01 (viii) 1,001

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(1, \frac{1}{2})$.

(c) Utilize a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(1, \frac{1}{2})$.

4. O ponto $P(3, 1)$ pertence à curva $y = \sqrt{x - 2}$.

(a) Se Q é o ponto $(x, \sqrt{x - 2})$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ, com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x:

(i) 2,5 (ii) 2,9 (iii) 2,99 (iv) 2,999

(v) 3,5 (vi) 3,1 (vii) 3,01 (viii) 3,001

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(3, 1)$.

(c) Use a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(3, 1)$.

(d) Esboce a curva, duas das retas secantes e a reta tangente.

5. Uma bola é atirada no ar com velocidade de 10 m/s. Sua altura em metros após t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$.

(a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1{,}5$ e dura

(i) 0,5 s (ii) 0,1 s

(iii) 0,05 s (iv) 0,01 s

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1{,}5$.

6. Se uma pedra for jogada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) t segundos mais tarde é dada por $y = 10t - 1{,}86t^2$.

(a) Encontre a velocidade média entre os intervalos de tempo dados:

(i) $[1, 2]$ (ii) $[1, 1{,}5]$ (iii) $[1, 1{,}1]$

(iv) $[1, 1{,}01]$ (v) $[1, 1{,}001]$

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1$.

7. A tabela mostra a posição de um ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1,4	5,1	10,7	17,7	25,8

(a) Encontre a velocidade média nos períodos de tempo a seguir:

(i) $[1, 3]$ (ii) $[2, 3]$ (iii) $[3, 5]$ (iv) $[3, 4]$

(b) Use o gráfico de s como uma função de t para estimar a velocidade instantânea quando $t = 3$.

8. O deslocamento (em centímetros) de uma partícula se movendo para frente e para trás ao longo de uma reta é dado pela equação de movimento $s = 2 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$, em que t é medido em segundos.

(a) Encontre a velocidade média em cada período de tempo:

(i) $[1, 2]$ (ii) $[1, 1{,}1]$

(iii) $[1, 1{,}01]$ (iv) $[1, 1{,}001]$

(b) Estime a velocidade instantânea da partícula quando $t = 1$.

9. O ponto $P(1, 0)$ está sobre a curva $y = \operatorname{sen}(10\pi/x)$.

(a) Se Q for o ponto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, encontre a inclinação da reta secante PQ (correta até a quarta casa decimal) para $x = 2, 1{,}5, 1{,}4, 1{,}3, 1{,}2, 1{,}1, 0{,}5, 0{,}6, 0{,}7, 0{,}8$ e $0{,}9$. As inclinações parecem tender a um limite?

(b) Use um gráfico da curva para explicar por que as inclinações das retas secantes da parte (a) não estão próximas da inclinação da reta tangente em P.

(c) Escolhendo as retas secantes apropriadas, estime a inclinação da reta tangente em P.

2.2 O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

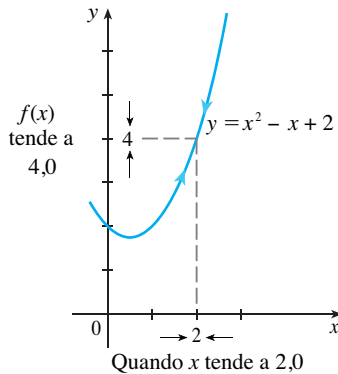



FIGURA 1

Tendo visto na seção anterior como surgem os limites quando queremos encontrar as tangentes a uma curva ou a velocidade de um objeto, vamos voltar nossa atenção para os limites em geral e para os métodos de calculá-los.

Vamos analisar o comportamento da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2. A tabela a seguir fornece os valores de $f(x)$ para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Da tabela e do gráfico de f (uma parábola) mostrado na Figura 1 vemos que quando x estiver próximo de 2 (de qualquer lado de 2), $f(x)$ tenderá a 4. De fato, parece que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos tornando x suficientemente próximo de 2. Expressamos isso dizendo que "o limite da função $f(x) = x^2 - x + 2$ quando x tende a 2 é igual a 4". A notação para isso é

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Em geral, usamos a seguinte notação.

1 DEFINIÇÃO Escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L",

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tomando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

Grosso modo, isso significa que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$. Uma definição mais precisa será dada na Seção 2.4.

Uma notação alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

é
$$f(x) \to L \quad \text{quando} \quad x \to a$$

que deve ser lida assim: "$f(x)$ tende a L quando x tende a a".

Preste atenção na frase "mas $x \neq a$" na definição de limite. Isso significa que ao procurar o limite de $f(x)$ quando x tende a a nunca consideramos $x = a$. Na realidade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = a$. A única coisa que importa é como f está definida *próximo de a*.

A Figura 2 mostra os gráficos de três funções. Note que, na parte (c), $f(a)$ não está definida e, na parte (b), $f(a) \neq L$. Mas em cada caso, não importando o que acontece em a, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

(a)

(b)

(c)

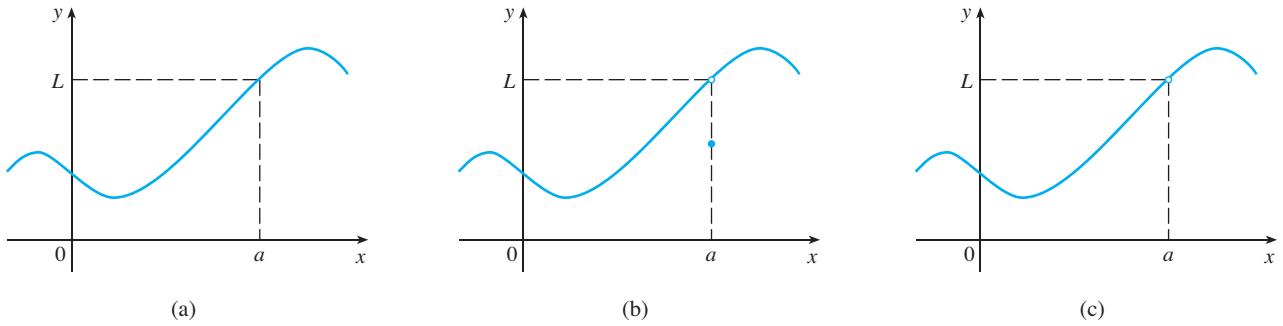



FIGURA 2

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ nos três casos

EXEMPLO 1 Estime o valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

SOLUÇÃO Observe que a função $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ não está definida quando $x = 1$. Mas isso não importa, pois a definição de $\lim_{x \to a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a, mas não iguais a a.

As tabelas dão os valores de $f(x)$ (corretos até a sexta casa decimal) para os valores de x que tendem a 1 (mas não são iguais a 1). Com base nesses valores podemos conjecturar que

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0.999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0,5 \qquad \square$$

O Exemplo 1 está ilustrado pelo gráfico de f na Figura 3. Vamos agora mudar ligeiramente f definindo seu valor como 2 quando $x = 1$ e chamando a função resultante de g:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Essa nova função g tem o mesmo limite quando x tende a 1 (veja a Figura 4).

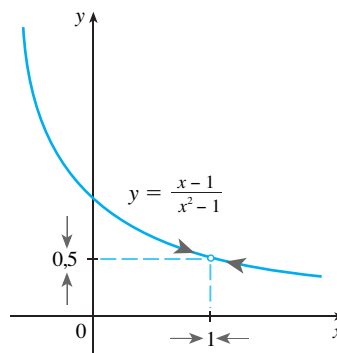
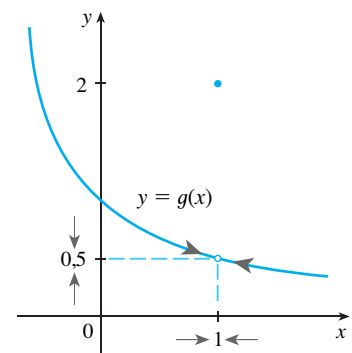



FIGURA 3

FIGURA 4

EXEMPLO 2 Estime o valor de $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUÇÃO A tabela fornece uma lista de valores da função para vários valores de t próximos de 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm 1{,}0$	0,16228
$\pm 0{,}5$	0,16553
$\pm 0{,}1$	0,16662
$\pm 0{,}05$	0,16666
$\pm 0{,}01$	0,16667

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

À medida que t tende a 0, os valores da função parecem se aproximar de 0,1666666... Assim, podemos conjecturar que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$ □

O que aconteceria no Exemplo 2 se tivéssemos tomado valores ainda menores para t? A tabela mostra os resultados obtidos em uma calculadora; você pode observar que algo estranho acontece.

Se você tentar fazer esses cálculos em sua calculadora, poderá obter valores diferentes, mas finalmente vai obter o valor 0 para um t suficientemente pequeno. Isso significa que a resposta é realmente 0 e não $\frac{1}{6}$? Não, o valor do limite é $\frac{1}{6}$, como veremos na próxima seção. O problema é que a calculadora dá valores falsos, pois $\sqrt{t^2+9}$ fica muito próximo de 3 quando t é pequeno. (Na realidade, quando t é suficientemente pequeno, o valor obtido na calculadora para $\sqrt{t^2+9}$ é 3,000 . . . , com tantas casas decimais quanto a calculadora for capaz de fornecer.)

Algo muito parecido acontece ao tentarmos fazer o gráfico da função

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$$

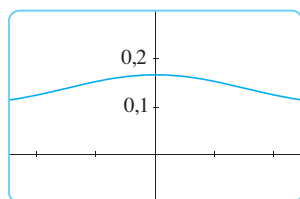
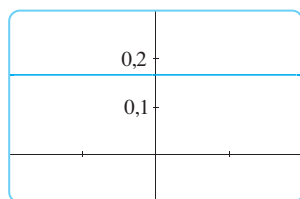
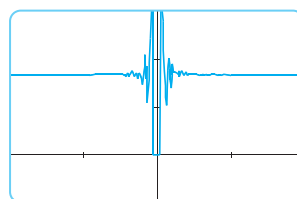
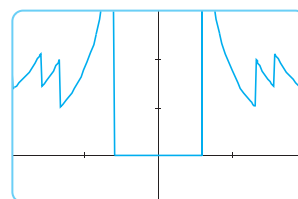
do Exemplo 2 em uma calculadora gráfica ou computador. As partes (a) e (b) da Figura 5 mostram gráficos bem precisos de f e, quando usamos *trace mode* (se disponível), podemos facilmente estimar que o limite é cerca de $\frac{1}{6}$. Porém, se dermos um *zoom*, como em (c) e (d), obteremos gráficos imprecisos, novamente em virtude de problemas com a subtração.

(a) $[-5, 5]$ por $[-0{,}1, 0{,}3]$

(b) $[-0{,}1, 0{,}1]$ por $[-0{,}1, 0{,}3]$

(c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0{,}1, 0{,}3]$

(d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0{,}1, 0{,}3]$

FIGURA 5

EXEMPLO 3 Faça uma estimativa do $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

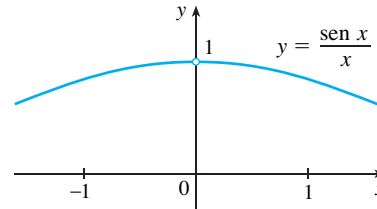
SOLUÇÃO Novamente a função $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ não está definida quando $x = 0$. Usando uma calculadora (e lembrando que se $x \in \mathbb{R}$, sen x indica o seno de um ângulo cuja medida é x *radianos*), construímos a tabela a seguir com valores corretos até a oitava casa decimal. Da tabela e do gráfico da Figura 6 temos que

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
$\pm 1{,}0$	0,84147098
$\pm 0{,}5$	0,95885108
$\pm 0{,}4$	0,97354586
$\pm 0{,}3$	0,98506736
$\pm 0{,}2$	0,99334665
$\pm 0{,}1$	0,99833417
$\pm 0{,}05$	0,99958339
$\pm 0{,}01$	0,99998333
$\pm 0{,}005$	0,99999583
$\pm 0{,}001$	0,99999983

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Essa conjectura é de fato correta, como será demonstrado no Capítulo 3 usando argumentos geométricos.

FIGURA 6 □

EXEMPLO 4 Analise $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

■ Computer Algebra Systems (CAS)
Os sistemas de computação algébrica (SCA) têm comandos para calcular limites. A fim de evitar falhas como as ilustradas nos Exemplos 2, 4 e 5, eles não encontram os limites por experimentação numérica. Em vez disso, usam técnicas mais sofisticadas, como o cálculo de séries infinitas. Se você tiver acesso a um SCA, use o comando de limite para calcular os limites nos exemplos desta seção e verificar suas respostas para os exercícios deste capítulo.

SOLUÇÃO Mais uma vez a função $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ não está definida em $x = 0$. Calculando a função para alguns valores pequenos de x, temos

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$
$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$
$$f(0{,}1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0{,}01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

Da mesma forma, $f(0{,}001) = f(0{,}0001) = 0$. Com base nessa informação ficaríamos tentados a conjecturar que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

⊘ Dessa vez, no entanto, nossa conjectura está errada. Observe que embora $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para todo número inteiro n, é também verdadeiro que $f(x) = 1$ para infinitos valores de x que tendem a 0. O gráfico de f é dado na Figura 7.

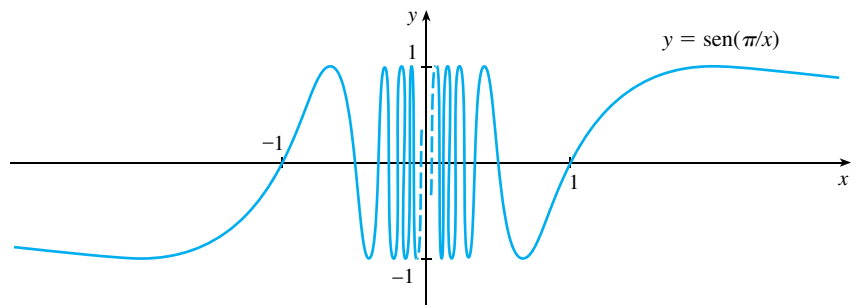



FIGURA 7

As curvas tracejadas perto do eixo de y indicam que os valores de $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscilam entre 1 e -1 infinitas vezes quando x tende a 0 (veja o Exercício 39).

Uma vez que os valores de $f(x)$ não tendem a um número fixo quando x tende a 0,

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \text{não existe}$$

□

EXEMPLO 5 Encontre $\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right)$.

x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}$
1	1,000028
0,5	0,124920
0,1	0,001088
0,05	0,000222
0,01	0,000101

x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}$
0,005	0,00010009
0,001	0,00010000

SOLUÇÃO Como antes, construímos uma tabela de valores. Da tabela parece que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0$$

Mas, se continuarmos com os valores ainda menores de x, a segunda tabela sugere que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0{,}000100 = \frac{1}{10\,000}$$

Mais tarde, veremos que $\lim_{x \to 0} \cos 5x = 1$, e então segue que o limite é 0,0001.

Os Exemplos 4 e 5 ilustram algumas das armadilhas na conjectura sobre o valor de um limite. É fácil conjecturar um valor falso se usarmos os valores não apropriados de x, mas é difícil saber quando parar de calcular valores. E, como mostra a discussão após o Exemplo 2, algumas vezes as calculadoras e os computadores dão valores falsos. Nas duas próximas seções, porém, vamos desenvolver métodos infalíveis no cálculo de limites.

EXEMPLO 6 A função de Heaviside, H, é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

[Essa função, cujo nome homenageia o engenheiro elétrico Oliver Heaviside (1850–1925), pode ser usada para descrever uma corrente elétrica que é ligada em $t = 0$.] Seu gráfico está na Figura 8.

FIGURA 8

Quando t tende a 0 pela esquerda, $H(t)$ tende a 0. Quando t tende a 0 pela direita, $H(t)$ tende a 1. Não há um número único para o qual $H(t)$ tende quando t tende a 0. Portanto, $\lim_{t \to 0} H(t)$ não existe. □

LIMITES LATERAIS

Vimos no Exemplo 6 que $H(t)$ tende a 0 quando t tende a 0 pela esquerda, e tende a 1 quando t tende a 0 pela direita. Indicamos essa situação simbolicamente escrevendo

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

O símbolo "$t \to 0^-$" indica que estamos considerando somente valores de t menores que 0. Da mesma forma, "$t \to 0^+$" indica que estamos considerando somente valores de t maiores que 0.

2 DEFINIÇÃO Escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

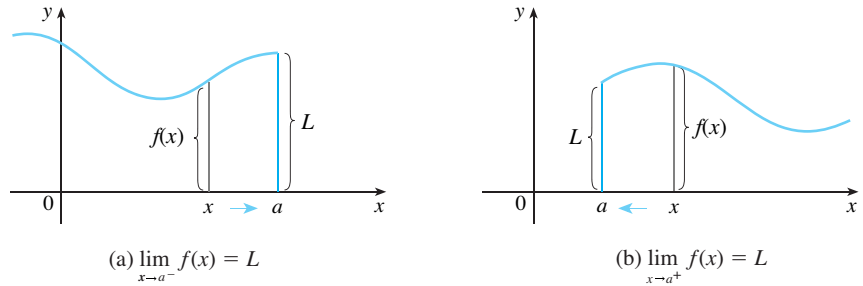
e dizemos que o **limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a a** [ou o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.

Observe que a Definição 2 difere da Definição 1 pelo fato de exigirmos que x seja menor que a. Analogamente, se for exigido que x seja maior que a, obteremos "o **limite à direita de $f(x)$ quando x tende a a** é igual a L", e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Dessa forma, o símbolo "$x \to a^+$" indica que estamos considerando somente $x > a$. Essas definições estão ilustradas na Figura 9.

FIGURA 9

(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Comparando a Definição 1 com as definições de limites laterais, vemos ser verdadeiro o que segue.

3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

EXEMPLO 7 O gráfico de uma função g está na Figura 10. Use-o para dizer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

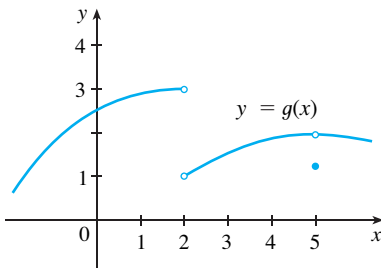



FIGURA 10

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUÇÃO A partir do gráfico, vemos que os valores de $g(x)$ tendem a 3 à medida que os de x tendem a 2 pela esquerda, mas se aproximam de 1 quando x tende a 2 pela direita. Logo

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \quad \text{e} \quad \text{(b)} \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Uma vez que são diferentes os limites à esquerda e à direita, concluímos de (3) que o $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe.

O gráfico mostra também que

$$\text{(d)} \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{e} \quad \text{(e)} \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) Agora, os limites à esquerda e à direita são iguais; assim, de (3) segue que

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

Apesar desse fato, observe que $g(5) \neq 2$. □

LIMITES INFINITOS

EXEMPLO 8 Encontre, se existir, o $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

SOLUÇÃO À medida que x se aproxima de 0, x^2 também se aproxima de 0, e $1/x^2$ fica muito grande (veja a tabela na margem). De fato, a partir do gráfico da Figura 11, parece que a

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
$\pm 0{,}5$	4
$\pm 0{,}2$	25
$\pm 0{,}1$	100
$\pm 0{,}05$	400
$\pm 0{,}01$	10 000
$\pm 0{,}001$	1 000 000

função $f(x) = 1/x^2$ pode se tornar arbitrariamente grande ao tomarmos os valores de x suficientemente próximos de 0. Assim, os valores de $f(x)$ não tendem a um número, e não existe $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$. □

Para indicar o tipo de comportamento exibido no Exemplo 8 usamos a notação

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Isso não significa que consideramos ∞ como um número. Tampouco significa que o limite existe. É simplesmente uma maneira de expressar uma forma particular da não existência do limite: $1/x^2$ pode assumir valores tão grandes quanto quisermos, bastando para isso escolhermos valores de x suficientemente próximos de 0.

Em geral, simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

para indicar que os valores de $f(x)$ tendem a se tornar cada vez maiores (ou "a crescer ilimitadamente"), à medida que x se tornar cada vez mais próximo de a.

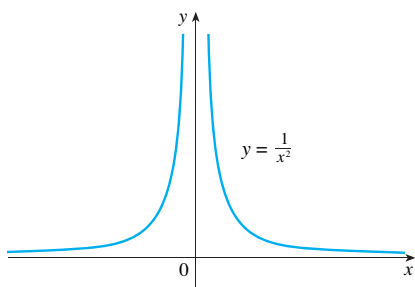



FIGURA 11

4 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente em a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

Outra notação para $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ é

$$f(x) \to \infty \qquad \text{quando} \qquad x \to a$$

Novamente, o símbolo ∞ não é um número, mas a expressão $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ normalmente é lida como

"o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é infinito"

ou "$f(x)$ torna-se infinita quando x tende a a"

ou ainda "$f(x)$ cresce ilimitadamente quando x tende a a"

Essa definição está ilustrada na Figura 12.

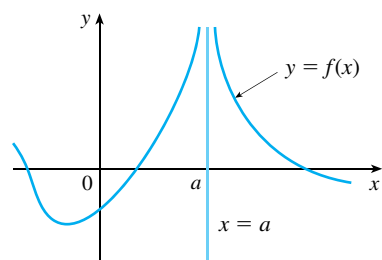



FIGURA 12

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

■ Quando dizemos que um número é um "negativo grande", queremos dizer que ele é negativo, mas que seu valor absoluto é grande.

Um tipo análogo de limite, para funções que se tornam grandes em valor absoluto, porém negativas, quando x se aproxima de a, cujo significado está na Definição 5, é ilustrado na Figura 13.

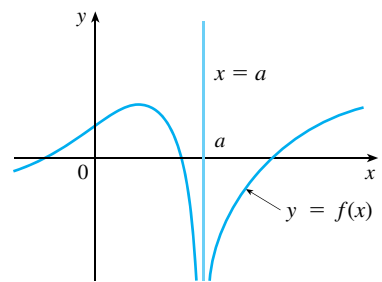
5 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente em a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, ao tomarmos valores de x suficientemente próximos de a, mas não iguais a a.

FIGURA 13

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

O símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ pode ser lido das seguintes formas: "o limite de $f(x)$ é menos infinito quando x tende a a", ou "$f(x)$ decresce ilimitadamente quando x tende a a". Por exemplo, temos

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definições similares podem ser dadas no caso de limites laterais

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

lembrando que "$x \to a^-$" significa considerar somente os valores de x menores que a, ao passo que "$x \to a^+$" significa considerar somente valores de $x > a$ (veja as ilustrações para os quatro casos na Figura 14).

(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$

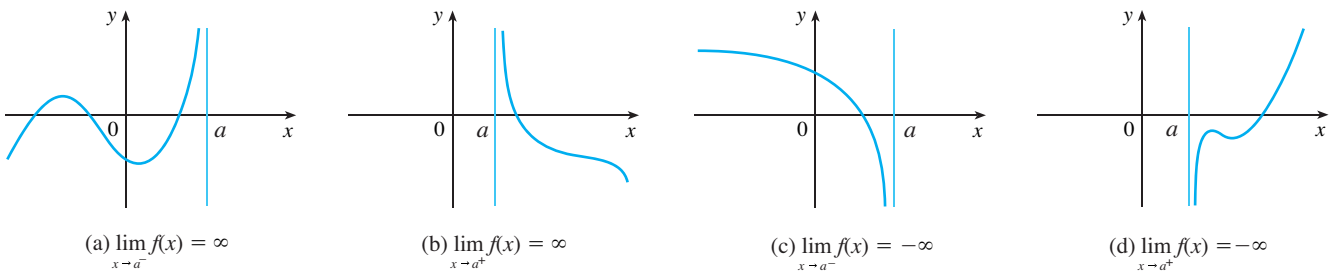
(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

(d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

> **6 DEFINIÇÃO** A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por exemplo, o eixo y é uma assíntota vertical da curva $y = 1/x^2$, pois $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. Na Figura 14 a reta $x = a$ é uma assíntota vertical em cada um dos quatro casos considerados. Em geral, o conhecimento de assíntotas verticais é muito útil no esboço de gráficos.

FIGURA 15

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{2x}{x-3}$ e $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$.

SOLUÇÃO Se x está próximo a 3 mas é maior que 3, então o denominador $x - 3$ é um número positivo pequeno e $2x$ está próximo a 6. Portanto, o quociente $2x/(x - 3)$ é um número *positivo* grande. Então, intuitivamente, temos que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

Analogamente, se x está próximo a 3 mas é menor que 3, então $x - 3$ é um número negativo pequeno, mas $2x$ ainda é um número positivo (próximo a 6). Portanto, $2x/(x - 3)$ é um número *negativo* grande. Então

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

O gráfico da curva $y = 2x/(x - 3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical. □

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \text{tg}\, x$.

SOLUÇÃO Como

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

existem assíntotas verticais em potencial nos pontos nos quais $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \to 0^+$ quando $x \to (\pi/2)^-$ e $\cos x \to 0^-$ quando $x \to (\pi/2)^+$, enquanto $\text{sen}\, x$ é positivo quando x está próximo de $\pi/2$, temos

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \text{tg}\, x = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \text{tg}\, x = -\infty$$

Isso mostra que a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical. Um raciocínio análogo mostra que as retas $x = (2n + 1)\pi/2$, onde n é um inteiro, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \text{tg}\, x$. O gráfico da Figura 16 confirma isso. □

FIGURA 16
$y = \text{tg}\, x$

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$. Da Figura 17 vemos que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

e assim a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma assíntota vertical. Na realidade, isso é válido para $y = \log_a x$ desde que $a > 1$. (Veja as Figuras 11 e 12 na Seção 1.6.)

FIGURA 17
O eixo y é uma assíntota vertical da função logaritmo natural

2.2 EXERCÍCIOS

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa dizer que

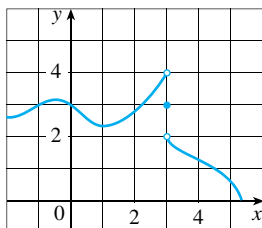
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

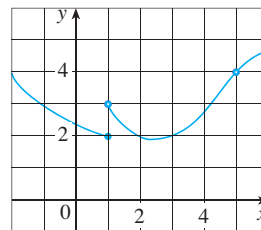
Nesta situação, é possível que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

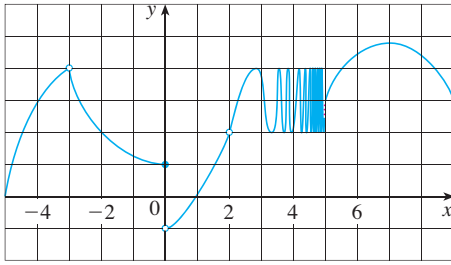
3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

(a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

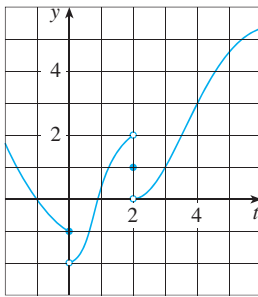
(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$
(d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$

5. Use o gráfico dado da função f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 1} f(x)$
(d) $\lim_{x \to 5} f(x)$ (e) $f(5)$

6. Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x \to -3} h(x)$
(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$
(g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x \to 2} h(x)$
(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$

7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

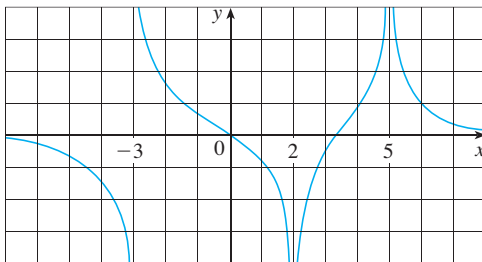
(a) $\lim_{t\to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t\to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t\to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t\to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t\to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t\to 4} g(t)$

8. Para a função R cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

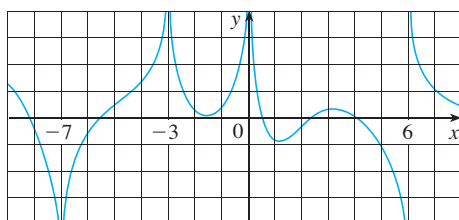
(a) $\lim_{x\to 2} R(x)$ (b) $\lim_{x\to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x\to -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x\to -3^+} R(x)$

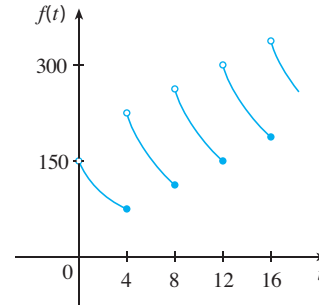
(e) As equações das assíntotas verticais.

9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x\to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

(f) As equações das assíntotas verticais.

10. Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sanguínea após t horas. (Posteriormente poderemos calcular a dosagem e intervalos de tempo que garantam que a concentração da droga não atinja níveis perigosos.) Encontre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

e explique o significado desses limites laterais.

11. Use o gráfico da função $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

12. Esboce o gráfico da função a seguir e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

13–16 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça todas as condições dadas.

13. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$, $f(1) = 2$,

14. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$,
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$, $f(0)$ não está definida

15. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$,
$f(3) = 3$, $f(-2) = 1$

16. $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -3$,
$f(1) = 1$, $f(4) = -1$

17–20 Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais).

17. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, x = 2,5, 2,1, 2,05, 2,01, 2,005, 2,001,
1,9, 1,95, 1,99, 1,995, 1,999

18. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
x = 0, –0,5 −0,9, −0,95, −0,99, −0,999, −2, −1,5, −1,1, −1,01, −1,001

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, $x = \pm 1, \pm 0{,}5, \pm 0{,}1, \pm 0{,}05, \pm 0{,}01$

20. $\lim_{x\to 0^+} x \ln(x + x^2)$, x = 1, 0,5, 0,1, 0,05, 0,01, 0,005, 0,001

21–24 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver alguma ferramenta gráfica, use-a para confirmar seu resultado.

21 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } 3x}{\text{tg } 5x}$

23. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6-1}{x^{10}-1}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{9^x-5^x}{x}$

25–32 Determine o limite infinito.

25. $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{6}{x-5}$

26. $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{6}{x-5}$

27. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2-x}{(x-1)^2}$

28. $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{e^x}{(x-5)^3}$

29. $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{x-1}{x^2(x+2)}$

30. $\lim_{x\to \pi^-} \text{cossec } x$

31. $\lim_{x\to (-\pi/2)^-} \sec x$

32. $\lim_{x\to 5^+} \ln(x-5)$

33. Determine $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^3-1}$ e $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^3-1}$

(a) calculando $f(x) = 1/(x^3-1)$ para valores de x que tendem a 1 pela esquerda e direita,

(b) raciocinando como no Exemplo 9, e

(c) a partir do gráfico de f.

34. (a) Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2+1}{3x-2x^2}$$

(b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função.

35. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1+x)^{1/x}$.

36. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\text{tg } 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que tendam a 0.

37. (a) Calcule a função $f(x) = x^2 - (2^x/1\,000)$ para $x = 1$, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2, 0,1 e 0,05 e faça uma conjectura sobre o valor de

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 - \frac{2^x}{1\,000}\right)$$

(b) Calcule $f(x)$ para $x = 0{,}04$, 0,02, 0,01, 0,005, 0,003 e 0,001. Faça uma nova conjectura.

38. (a) Calcule $h(x) = (\text{tg } x - x)/x^3$ para $x = 1$, 0,5, 0,1, 0,05, 0,01 e 0,005.

(b) Conjecture qual o valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } x - x}{x^3}$.

(c) Calcule $h(x)$ para valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir valor 0 para $h(x)$. Você ainda está confiante que a conjectura em (b) está correta? Explique por que você acaba obtendo o valor 0. (Na Seção 4.4 veremos um método para calcular esse limite.)

(d) Faça o gráfico da função h na janela retangular $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Dê então um *zoom* na direção do ponto onde o gráfico corta o eixo y para estimar o limite de $h(x)$ quando x tende a 0. Continue dando *zoom* até observar distorções no gráfico de h. Compare com os resultados da parte (c).

39. Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(\pi/x)$ do Exemplo 4 na janela retangular $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Então dê um *zoom* em direção à origem diversas vezes. Comente o comportamento dessa função.

40. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

em que m_0 é a massa da partícula em repouso e c, a velocidade da luz. O que acontece se $v \to c^-$?

41. Use um gráfico para estimar as equações de todas as assíntotas verticais da curva

$$y = \text{tg }(2 \text{ sen } x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Encontre, então, as equações exatas dessas assíntotas.

42. (a) Use evidências numéricas e gráficas para fazer uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$$

(b) A que distância de 1 deverá estar x para garantir que a função da parte (a) esteja a uma distância de 0,5 de seu limite?

2.3 CÁLCULOS USANDO PROPRIEDADES DOS LIMITES

Na Seção 2.2 empregamos gráficos e calculadoras para fazer conjecturas sobre o valor de limites, mas vimos que esses métodos nem sempre levam a respostas corretas. Nesta seção usaremos as *Propriedades do Limite*, para calculá-los.

PROPRIEDADES DOS LIMITES Seja c uma constante e suponha que existam os limites

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x).$$

Então

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$
4. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ se $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Essas cinco propriedades podem ser enunciadas da seguinte forma:

1. O limite de uma soma é a soma dos limites. (PROPRIEDADE DA SOMA)
2. O limite de uma diferença é a diferença dos limites. (PROPRIEDADE DA DIFERENÇA)
3. O limite de uma constante multiplicando uma função é a constante multiplicando o limite desta função. (PROPRIEDADE DA MULTIPLICAÇÃO POR CONSTANTE)
4. O limite de um produto é o produto dos limites. (PROPRIEDADE DO PRODUTO)
5. O limite de um quociente é o quociente dos limites (desde que o limite do denominador não seja zero). (PROPRIEDADE DO QUOCIENTE)

É fácil acreditar que essas propriedades são verdadeiras. Por exemplo, se $f(x)$ estiver próximo de L e $g(x)$ próximo de M, é razoável concluir que $f(x) + g(x)$ está próximo de $L + M$. Isso nos dá uma base intuitiva para acreditar que a Propriedade 1 é verdadeira. Na Seção 2.4 daremos uma definição precisa de limite e a usaremos para demonstrar essa propriedade. As demonstrações das propriedades remanescentes encontram-se no Apêndice F.

FIGURA 1

EXEMPLO 1 Use as Propriedades do Limite e os gráficos de f e g na Figura 1 para calcular os seguintes limites, se eles existirem.

(a) $\lim_{x\to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUÇÃO

(a) Dos gráficos de f e g vemos que

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -2} g(x) = -1$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2} [5g(x)] && \text{(pela Propriedade 1)}\\ &= \lim_{x\to -2} f(x) + 5 \lim_{x\to -2} g(x) && \text{(pela Propriedade 3)}\\ &= 1 + 5(-1) = -4\end{aligned}$$

(b) Vemos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Mas $\lim_{x \to 1} g(x)$ não existe, pois os limites à esquerda e à direita são diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

Assim, não podemos usar a Propriedade 4 para o limite solicitado. A Propriedade 5, contudo, pode ser usada para limites laterais:

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4 \qquad \lim_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

Os limites à esquerda e à direita não são iguais, logo $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ não existe.

(c) Os gráficos mostram que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1{,}4 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Como o limite do denominador é 0, não podemos usar a Propriedade 5. O limite dado não existe, pois o denominador tende a 0, enquanto o numerador tende a um número diferente de 0. □

Usamos a Propriedade do Produto repetidamente com $g(x) = f(x)$ para obter a seguinte equação.

PROPRIEDADE DA POTÊNCIA

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ onde n é um inteiro positivo

Para aplicar essas seis Propriedades, vamos precisar usar dois limites especiais:

7. $\lim_{x \to a} c = c$ **8.** $\lim_{x \to a} x = a$

Esses limites são óbvios do ponto de vista intuitivo (expresse-os em palavras ou esboce os gráficos de $y = c$ e $y = x$), mas as demonstrações baseadas na definição precisa serão pedidas nos exercícios da Seção 2.4.

Se pusermos agora $f(x) = x$ nas Propriedades 6 e 8, vamos obter outro limite especial útil.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ onde n é um inteiro positivo

Um limite similar é válido para as raízes da forma a seguir. (Para as raízes quadradas a demonstração está esboçada no Exercício 37 da Seção 2.4.)

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ onde n é um inteiro positivo
(Se n for par, supomos que $a > 0$.)

De forma mais geral, temos a seguinte Propriedade, que será demonstrada na Seção 2.5 como consequência da Propriedade 10.

PROPRIEDADE DA RAIZ

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ onde n é um inteiro positivo
[Se n for par, supomos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

EXEMPLO 2 Calcule os limites a seguir justificando cada passagem.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

NEWTON E OS LIMITES

Isaac Newton nasceu no dia de Natal, em 1642, ano da morte de Galileu. Quando entrou para a Universidade de Cambridge, em 1661, Newton não sabia muita matemática, mas aprendeu rapidamente lendo Euclides e Descartes e assistindo às aulas de Isaac Barrow. Cambridge esteve fechada por causa da peste entre 1665 e 1666, período em que Newton retornou à sua casa para refletir sobre o que havia aprendido. Estes dois anos foram de incrível produtividade. Foi nesse período que Newton fez quatro dentre suas maiores descobertas: (1) sua representação de funções como somas de séries infinitas, inclusive o teorema binomial; (2) seu trabalho sobre o cálculo integral e diferencial; (3) suas leis do movimento e da gravitação universal e (4) seus experimentos com prismas sobre a natureza da luz e da cor. Receando controvérsias e críticas, Newton relutou quanto a publicar suas descobertas, e não o fez até 1687, quando, pressionado pelo astrônomo Halley, publicou os *Principia Mathematica*. Nesse trabalho, o maior tratado científico até então, Newton tornou pública sua versão do cálculo e usou-a para pesquisar mecânica, dinâmica dos fluidos e movimentos ondulatórios, e para explicar o movimento dos planetas e cometas.

Os primórdios do cálculo são encontrados no cálculo de áreas e volumes por sábios da Grécia antiga, como Eudóxio e Arquimedes. Embora aspectos da ideia de limite estejam implícitos em seu "método de exaustão", Eudóxio e Arquimedes nunca formularam explicitamente o conceito de limite. Da mesma forma, matemáticos como Cavalieri, Fermat e Barrow, precursores imediatos de Newton no desenvolvimento do cálculo, realmente não usaram os limites. Foi Isaac Newton o primeiro a falar explicitamente sobre eles. Ele explicou que a ideia principal por trás dos limites é que as quantidades "ficam mais próximas quanto menor for a diferença dada". Newton afirmou que o conceito básico no cálculo, mas foi papel de matemáticos posteriores, como Cauchy, tornar claras suas ideias sobre os limites.

SOLUÇÃO

(a)
$$\lim_{x\to5}(2x^2-3x+4)=\lim_{x\to5}(2x^2)-\lim_{x\to5}(3x)+\lim_{x\to5}4 \qquad \text{(pelas Propriedades 1 e 2)}$$
$$=2\lim_{x\to5}x^2-3\lim_{x\to5}x+\lim_{x\to5}4 \qquad \text{(pela Propriedade 3)}$$
$$=2(5^2)-3(5)+4 \qquad \text{(pelas Propriedades 9, 8 e 7)}$$
$$=39$$

(b) Começamos aplicando a Propriedade 5, mas seu uso só ficará completamente justificado no último passo, quando virmos que os limites do numerador e do denominador existem e o do denominador não é 0.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\frac{\lim_{x\to-2}(x^3+2x^2-1)}{\lim_{x\to-2}(5-3x)} \qquad \text{(pela Propriedade 5)}$$
$$=\frac{\lim_{x\to-2}x^3+2\lim_{x\to-2}x^2-\lim_{x\to-2}1}{\lim_{x\to-2}5-3\lim_{x\to-2}x} \qquad \text{(pelas Propriedades 1, 2 e 3)}$$
$$=\frac{(-2^3)+2(-2)^2-1}{5-3(-2)} \qquad \text{(pelas Propriedades 9, 8 e 7)}$$
$$=-\frac{1}{11}$$
□

Obs.: Se tomarmos $f(x)=2x^2-3x+4$, então $f(5)=39$. Em outras palavras, teríamos obtido a resposta correta no Exemplo 2(a) substituindo x por 5. Analogamente, a substituição direta fornece a resposta correta na parte (b). As funções no Exemplo 2 são polinomial e racional, respectivamente, e o uso similar das Propriedades do Limite demonstra que a substituição direta sempre funciona para essas funções (veja os Exercícios 53 e 54). Enunciamos esse fato a seguir.

PROPRIEDADE DE SUBSTITUIÇÃO DIRETA Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então
$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

As funções que possuem essa propriedade de substituição direta, chamadas de *contínuas em a*, serão estudadas na Seção 2.5. Entretanto, nem todos os limites podem ser calculados pela substituição direta, como mostram os exemplos a seguir.

EXEMPLO 3 Encontre $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

SOLUÇÃO Seja $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$. Não podemos encontrar o limite substituindo $x=1$, pois $f(1)$ não está definida, nem podemos aplicar a Propriedade do Quociente porque o limite do denominador é 0. De fato, precisamos fazer inicialmente algumas operações algébricas. Fatoramos o numerador como uma diferença de quadrados:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

O numerador e o denominador têm um fator comum, $x - 1$. Ao tomarmos o limite quando x tende a 1, temos $x \neq 1$ e, assim, $x - 1 \neq 0$. Portanto, podemos cancelar o fator comum e calcular o limite, como segue:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

O limite nesse exemplo já apareceu na Seção 2.1, quando tentávamos encontrar a tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$. □

Obs.: No exemplo 3 conseguimos calcular o limite substituindo a função dada $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ por outra mais simples, $g(x) = x + 1$, que tem o mesmo limite. Isso é válido porque $f(x) = g(x)$, exceto quando $x = 1$, e no cômputo de um limite quando x tende a 1, não consideramos o que acontece quando x é exatamente *igual* a 1. Em geral, temos o seguinte fato útil.

FIGURA 2
Gráficos das funções f (do Exemplo 3) e g (do Exemplo 4)

> Se $f(x) = g(x)$ quando $x \neq a$, então $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, desde que o limite exista.

EXEMPLO 4 Encontre $\lim_{x\to 1} g(x)$ em que

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

SOLUÇÃO Aqui g está definida em $x = 1$ e $g(x) = \pi$, mas o valor do limite quando x tende a 1 não depende do valor da função em 1. Uma vez que $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$, temos

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 2$$ □

Observe que os valores das funções nos Exemplos 3 e 4 são idênticos, exceto quando $x = 1$ (veja a Figura 2), e assim elas têm o mesmo limite quando x tende a 1.

EXEMPLO 5 Calcule $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

SOLUÇÃO Se definirmos

$$F(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$$

então, como no Exemplo 3, não podemos calcular $\lim_{h\to 0} F(h)$ fazendo $h = 0$, uma vez que $F(0)$ não está definida. Mas, se simplificarmos algebricamente $F(h)$, encontraremos que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Lembre-se de que consideramos apenas $h \neq 0$ quando fazemos h tender a 0.) Assim,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} (6 + h) = 6$$ □

EXEMPLO 6 Encontre $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUÇÃO Não podemos aplicar a Propriedade do Quociente de imediato, uma vez que o limite do denominador é 0. Aqui as operações algébricas preliminares consistem em racionalizar o numerador:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0}(t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

Esse cálculo confirma a conjectura que fizemos no Exemplo 2 da Seção 2.2. □

Para alguns limites, é melhor calcular primeiro os limites laterais (à esquerda e à direita). O seguinte teorema nos lembra do que descobrimos na Seção 2.2, isto é, que o limite bilateral existe se e somente se ambos os limites laterais (à esquerda e à direita) existem e são iguais.

1 TEOREMA $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Quando calculamos limites laterais, aproveitamos o fato de que as Propriedades dos Limites são válidas também para eles.

■ O resultado do Exemplo 7 parece plausível pela Figura 3.

EXEMPLO 7 Mostre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUÇÃO Lembre-se de que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Uma vez que $|x| = x$ para $x > 0$, temos

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, temos $|x| = -x$, e assim

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

Portanto, pelo Teorema 1,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$ □

FIGURA 3

EXEMPLO 8 Demonstre que $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe

SOLUÇÃO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

FIGURA 4

Uma vez que os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes, segue do Teorema 1 que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ não existe. O gráfico da função $f(x) = |x|/x$ é mostrado na Figura 4 e confirma os limites laterais que encontramos. □

■ Está mostrado no Exemplo 3 da Seção 2.4 que $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

EXEMPLO 9 Se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{se } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

determine se $\lim_{x\to 4} f(x)$ existe.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $x > 4$, temos

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$

Uma vez que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, temos

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Os limites laterais (à esquerda e à direita) são iguais. Dessa forma, o limite existe e

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 0$$

O gráfico de f está mostrado na Figura 5. □

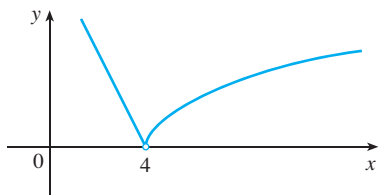



FIGURA 5

■ Outras notações para $[\![x]\!]$ são $[x]$ e $\lfloor x \rfloor$. A função maior inteira é as vezes chamada de função piso.

EXEMPLO 10 A **função maior inteiro** é definida por $[\![x]\!]$ = o maior inteiro que é menor que ou igual a x. (Por exemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4{,}8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Mostre que $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ não existe.

SOLUÇÃO O gráfico da função maior inteiro está mostrado na Figura 6. Uma vez que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, temos

$$\lim_{x\to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^+} 3 = 3$$

Uma vez que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, temos

$$\lim_{x\to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x\to 3^-} 2 = 2$$

Como esses limites laterais não são iguais, pelo Teorema 1, $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ não existe. □

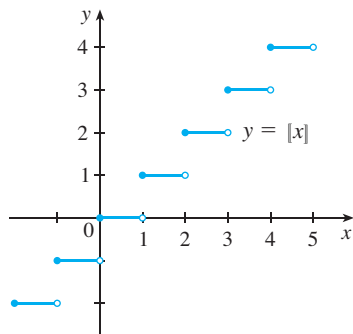



FIGURA 6
Função maior inteiro

Os próximos dois teoremas dão duas propriedades adicionais dos limites. Suas demonstrações podem ser encontradas no Apêndice F.

2 **TEOREMA** Se $f(x) \leqslant g(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e os limites de f e g existem quando x tende a a, então

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$$

3 **TEOREMA DO CONFRONTO** Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

FIGURA 7

O Teorema do Confronto, algumas vezes chamado Teorema do Sanduíche ou do Imprensamento, está ilustrado na Figura 7. Ele diz que se $g(x)$ ficar imprensado entre $f(x)$ e $h(x)$ nas proximidades de a, e se f e h tiverem o mesmo limite L em a, então g será forçada a ter o mesmo limite L em a.

EXEMPLO 11 Mostre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

SOLUÇÃO Observe primeiro que **não podemos** usar

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

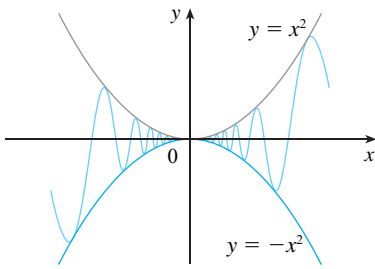



FIGURA 8

porque $\lim_{x\to 0}$ sen$(1/x)$ não existe (veja o Exemplo 4 da Seção 2.2). Porém, como

$$-1 \leqslant \text{sen}\,\frac{1}{x} \leqslant 1$$

temos, conforme está ilustrado na Figura 8,

$$-x^2 \leqslant x^2\,\text{sen}\,\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

Sabemos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$$

Tomando-se $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2$sen $(1/x)$, e $h(x) = x^2$ no Teorema de Confronto obtém-se

$$\lim_{x\to 0} x^2\,\text{sen}\,\frac{1}{x} = 0$$ □

2.3 EXERCÍCIOS

1. Dado que

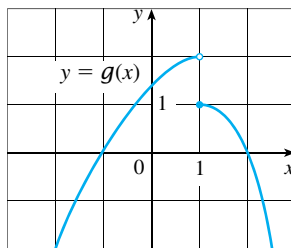
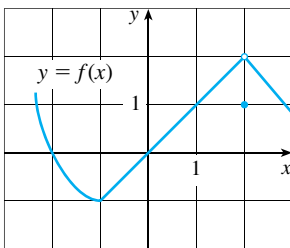
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista o limite, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2}[x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x\to 1}\sqrt{3 + f(x)}$

3–9 Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

3. $\lim_{x\to 4}(5x^2 - 2x + 3)$

4. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x^2 + 4x - 3}$

5. $\lim_{x\to 8}(1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

6. $\lim_{t\to -1}(t^2 + 1)^3(t + 3)^5$

7. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4}\right)^3$

8. $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4 + 3u + 6}$

9. $\lim_{x\to 4^-}\sqrt{16 - x^2}$

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x + 3)$$

está correta.

11–30 Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t\to -3}\dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

17. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(4 + h)^2 - 16}{h}$

18. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

19. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

21. $\lim_{t\to 9}\dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

22. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

23. $\lim_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$

24. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

25. $\lim_{x\to -4}\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

26. $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t}\right)$

27. $\lim_{x\to 9}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

28. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right)$

30. $\lim_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

31. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$

fazendo o gráfico da função $f(x)=x/\left(\sqrt{1+3x}-1\right)$.

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para x próximo de 0 e conjecture qual será o valor do limite.

(c) Use as Propriedades dos Limites para mostrar que sua conjectura está correta.

32. (a) Use o gráfico de

$$f(x)=\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to 0}f(x)$ com duas casas decimais.

(b) Utilize uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Use as Propriedades dos Limites para encontrar o valor exato do limite.

33. Use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x\to 0}(x^2\cos 20\pi x)=0$. Ilustre, fazendo os gráficos, na mesma tela, das funções $f(x)=-x^2$, $g(x)=x^2\cos 20\pi x$ e $h(x)=x^2$.

34. Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^2}\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}=0$$

Ilustre, fazendo os gráficos na mesma tela, de f, g e h (como no Teorema do Confronto).

35. Se $4x-9\leqslant f(x)\leqslant x^2-4x+7$ para $x\geqslant 0$, encontre $\lim_{x\to 4}f(x)$.

36. Se $2x\leqslant g(x)\leqslant x^4-x^2+2$ para todo x, encontre $\lim_{x\to 1}g(x)$.

37. Demonstre que $\lim_{x\to 0}x^4\cos\dfrac{2}{x}=0$.

38. Demonstre que $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}=0$.

39–44 Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

39. $\lim_{x\to 3}(2x+|x-3|)$

40. $\lim_{x\to -6}\dfrac{2x+12}{|x+6|}$

41. $\lim_{x\to 0,5^-}\dfrac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

42. $\lim_{x\to -2}\dfrac{2-|x|}{2+x}$

43. $\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

44. $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}\right)$

45. A *função sinal*, denotada por sgn, é definida por

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1 & \text{se } x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ 1 & \text{se } x>0\end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função.

(b) Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir.

(i) $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn} x$

(iii) $\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim_{x\to 0}|\operatorname{sgn} x|$

46. Seja

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2 & \text{se } x\leqslant 2\\ x-1 & \text{se } x>2\end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x\to 2^-}f(x)$ e $\lim_{x\to 2^+}f(x)$.

(b) Existe $\lim_{x\to 2}f(x)$?

(c) Esboce o gráfico de f.

47. Seja $F(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

(a) Encontre

(i) $\lim_{x\to 1^+}F(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1^-}F(x)$

(b) Existe $\lim_{x\to 1}F(x)$?

(c) Esboce o gráfico de F.

48. Seja

$$g(x)=\begin{cases}x & \text{se } x<1\\ 3 & \text{se } x=1\\ 2-x^2 & \text{se } 1<x\leqslant 2\\ x-3 & \text{se } x>2\end{cases}$$

(a) Calcule, se existirem, os limites.

(i) $\lim_{x\to 1^-}g(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1}g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x\to 2^-}g(x)$ (v) $\lim_{x\to 2^+}g(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2}g(x)$

(b) Esboce o gráfico de g.

49. (a) Se o símbolo $[\![\ ]\!]$ denota a função maior inteiro do Exemplo 10, calcule

(i) $\lim_{x\to -2^+}[\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to -2}[\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x\to -2,4}[\![x]\!]$

(b) Se n for um inteiro, calcule

(i) $\lim_{x\to n^-}[\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to n^+}[\![x]\!]$

(c) Para quais valores de a o $\lim_{x\to a}[\![x]\!]$ existe

50. Seja $f(x)=[\![\cos x]\!]$, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Calcule cada limite, se existir

(i) $\lim_{x\to 0}f(x)$ (ii) $\lim_{x\to(\pi/2)^-}f(x)$

(iii) $\lim_{x\to(\pi/2)^+}f(x)$ (iv) $\lim_{x\to\pi/2}f(x)$

(c) Para quais valores de a existe $\lim_{x\to a}f(x)$?

51. Se $f(x)=[\![x]\!]+[\![-x]\!]$, mostre que existe $\lim_{x\to 2}f(x)$, mas que não é igual a $f(2)$.

52. Na Teoria da Relatividade, a Fórmula da Contração de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto no repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

53. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

54. Se r for uma função racional, use o Exercício 53 para mostrar que $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$ para todo número a no domínio de r.

55. Se $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encontre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

56. Se $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

57. Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

58. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to a} f(x)$ nem $\lim_{x\to a} g(x)$ existam.

59. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to a} f(x)$ nem $\lim_{x\to a} g(x)$ existam.

60. Calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

61. Existe um número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite.

62. A figura mostra um círculo fixo C_1 de equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e um círculo C_2, a ser encolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0, r)$, Q é o ponto de intersecção superior dos dois círculos, e R é o ponto de intersecção da reta PQ com o eixo x. O que acontecerá com R quando C_2 se contrair, isto é, quando $r \to 0^+$?

2.4 A DEFINIÇÃO PRECISA DE LIMITE

A definição intuitiva de limite dada na Seção 2.2 é inadequada para alguns propósitos, pois frases como "x está próximo de 2" e "$f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L" são vagas. Para sermos capazes de demonstrar conclusivamente que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0{,}0001 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{\text{x}} = 1$$

devemos tornar precisa a definição de limite.

Para chegar à definição precisa de limite, consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

É intuitivamente claro que quando x está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então $f(x)$ está próximo de 5 e, sendo assim, $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.

Para obter informações mais detalhadas sobre como $f(x)$ varia quando x está próximo de 3, fazemos a seguinte pergunta:

Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos que 0,1?

A distância de x a 3 é $|x - 3|$, e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo, nosso problema é achar um número δ tal que

■ É costume usar a letra grega δ (delta) nessa situação.

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad |x - 3| < \delta \qquad \text{mas } x \neq 3$$

Se $|x - 3| > 0$, então $x \neq 3$, portanto uma formulação equivalente de nosso problema é achar um número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < \delta$$

Observe que se $0 < |x - 3| < (0{,}1)/2 = 0{,}05$, então

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2\,|x - 3| < 0{,}1$$

isto é,

$$|f(x) - 5| < 0{,}1 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}05$$

Assim, uma resposta para o problema é dada por $\delta = 0{,}05$; isto é, se x estiver a uma distância de no máximo 0,05 de 3, então $f(x)$ estará a uma distância de no máximo 0,1 de 5.

Se mudarmos o número 0,1 em nosso problema para o número menor 0,01, então usando o mesmo método achamos que $f(x)$ diferirá de 5 por menos que 0,01, desde que x difira de 3 por menos que $(0{,}01)/2 = 0{,}005$:

$$|f(x) - 5| < 0{,}01 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}005$$

Analogamente,

$$|f(x) - 5| < 0{,}001 \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < 0{,}0005$$

Os números 0,1, 0,01 e 0,001, anteriormente considerados, são *tolerância no erro* (ou simplesmente *tolerância*) que podemos admitir. Para que o número 5 seja precisamente o limite de $f(x)$, quando x tende a 3, devemos não apenas ser capazes de tornar a diferença entre $f(x)$ e o 5 menor que cada um desses três números; devemos ser capazes de tornar a diferença menor que *qualquer* número positivo. E, por analogia ao procedimento adotado, nós podemos! Se chamarmos ε (a letra grega épsilon) a um número positivo arbitrário, então encontramos, como anteriormente, que

1 $$|f(x) - 5| < \varepsilon \qquad \text{se} \qquad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Esta é uma maneira precisa de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3, pois (1) diz que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem dentro de uma distância arbitrária de 5 tomando os valores de x dentro de uma distância $\varepsilon/2$ de 3 (mas $x \neq 3$).

Observe que (1) pode ser reescrita como

$$\text{se} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \quad (x \neq 3) \quad \text{então} \quad 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$

FIGURA 1

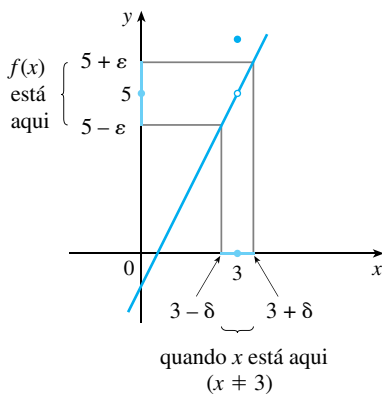
e isso está ilustrado na Figura 1. Tomando os valores de x ($\neq 3$) dentro do intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, podemos obter os valores de $f(x)$ dentro do intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Usando (1) como um modelo, temos uma definição precisa de limite.

2 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a a é L**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Uma vez que $|x - a|$ é a distância de x a a e $|f(x) - L|$ é a distância de $f(x)$ a L, e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de limite pode ser expressa em palavras da seguinte forma:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena tomando-se a distância de x a a suficientemente pequena (mas não 0).

Alternativamente,

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados tão próximos de L quanto desejarmos, tomando-se x suficientemente próximo de a (mas não igual a a).

Podemos também reformular a Definição 2 em termos de intervalos, observando que a desigualdade $|x - a| < \delta$ é equivalente a $-\delta < x - a < \delta$, que pode ser escrita como $a - \delta < x < a + \delta$. Além disso, $0 < |x - a|$ é válida se, e somente se, $x - a \neq 0$, isto é, $x \neq a$. Analogamente, a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ é equivalente ao par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Portanto, em termos de intervalos, a Definição 2 pode ser enunciada desta maneira:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ (não importa quão pequeno for ε) podemos achar $\delta > 0$ tal que, se x estiver no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, então $f(x)$ estará no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Podemos interpretar geometricamente essa definição, representando a função por um diagrama de flechas, como na Figura 2, onde f leva um subconjunto de $\mathbb{R}$ em outro subconjunto de $\mathbb{R}$.

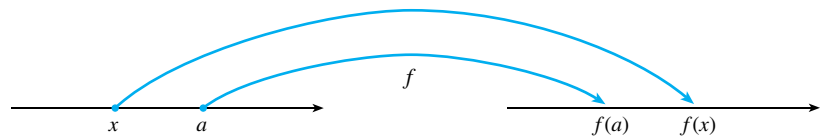
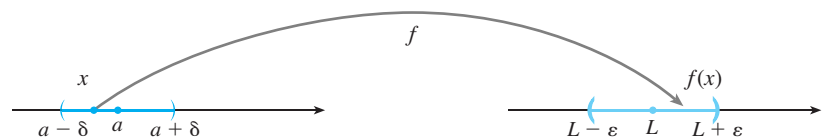
FIGURA 2

A definição de limite afirma que, se for dado qualquer intervalo pequeno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ em torno de L, então podemos achar um intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ em torno de a tal que f leva todos os pontos de $(a - \delta, a + \delta)$ (exceto possivelmente a) para dentro do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Veja a Figura 3.)

FIGURA 3

Outra interpretação geométrica de limite pode ser dada em termos do gráfico de uma função. Se for dado $\varepsilon > 0$, então traçamos as retas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ e o gráfico de f (veja a Figura 4). Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, se limitarmos x ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ e tomarmos $x \neq a$, a curva $y = f(x)$ ficará entre as retas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$ (veja a Figura 5). Você pode ver que se um destes δ tiver sido encontrado, então qualquer δ menor também servirá.

É importante compreender que o processo ilustrado nas Figuras 4 e 5 deve funcionar para *todo* número ε positivo, independentemente de quão pequeno ele seja. A Figura 6 mostra que se um ε menor for escolhido, então será necessário um δ menor.

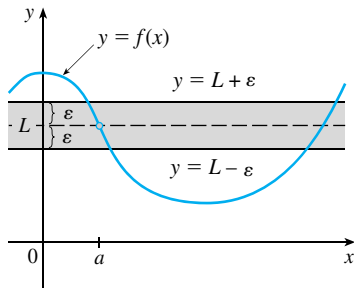
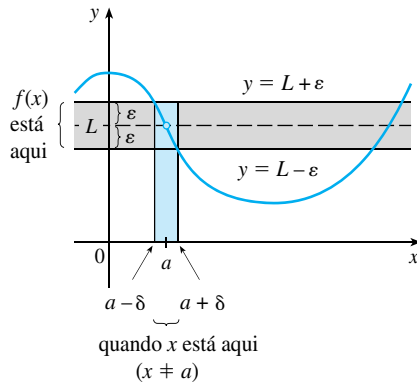



FIGURA 4

FIGURA 5

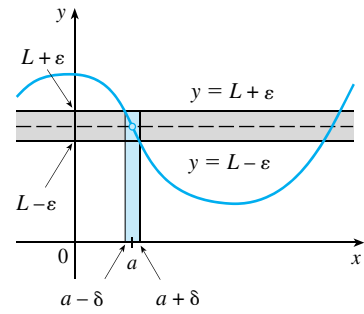



FIGURA 6

EXEMPLO 1 Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{então} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$$

Em outras palavras, encontre um número δ que corresponda a $\varepsilon = 0{,}2$ na definição de limite para a função $f(x) = x^3 - 5x + 6$ com $a = 1$ e $L = 2$.

FIGURA 7

SOLUÇÃO Um gráfico de f é mostrado na Figura 7, e estamos interessados na região próxima do ponto $(1, 2)$. Observe que podemos reescrever a desigualdade

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$$

como

$$1{,}8 < x^3 - 5x + 6 < 2{,}2$$

Assim, precisamos determinar os valores de x para os quais a curva $y = x^3 - 5x + 6$ está entre as retas horizontais $y = 1{,}8$ e $y = 2{,}2$. Portanto, traçamos o gráfico das curvas $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1{,}8$ e $y = 2{,}2$ próximo do ponto $(1, 2)$ na Figura 8. Então usamos o cursor para estimar que a coordenada x do ponto de intersecção da reta $y = 2{,}2$ com a curva $y = x^3 - 5x + 6$ está em torno de 0,911. Analogamente, $y = x^3 - 5x + 6$ intercepta a reta $y = 1{,}8$ quando $x \approx 1{,}124$. Logo, arredondando-se, a favor da segurança, podemos afirmar que

FIGURA 8

$$\text{se} \quad 0{,}92 < x < 1{,}12 \quad \text{então} \quad 1{,}8 < x^3 - 5x + 6 < 2{,}2$$

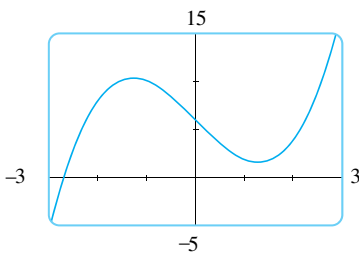
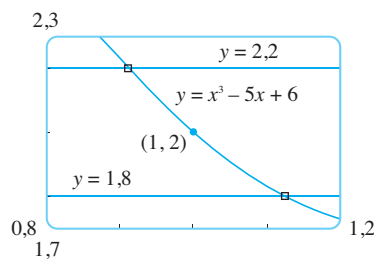
Esse intervalo $(0{,}92,\ 1{,}12)$ não é simétrico em torno de $x = 1$. A distância de $x = 1$ até a extremidade esquerda é $1 - 0{,}92 = 0{,}08$, e a distância até a extremidade direita, 0,12. Podemos escolher δ como o menor desses números, isto é, $\delta = 0{,}08$. Então podemos reescrever nossas desigualdades em termos de distâncias da seguinte forma:

$$\text{se} \quad |x - 1| < 0{,}08 \quad \text{então} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$$

Isso somente nos diz que, mantendo x dentro de uma distância de 0,08 de 1, podemos manter $f(x)$ dentro de uma distância de 0,2 de 2.

Embora tenhamos escolhido $\delta = 0{,}08$, qualquer valor menor positivo de δ também funcionaria. □

O procedimento gráfico do Exemplo 1 dá uma ilustração da definição para $\varepsilon = 0{,}2$, mas não *demonstra* que o limite é igual a 2. Uma demonstração deve fornecer um δ para *cada* ε.

Ao demonstrar afirmações sobre os limites, pode ser proveitoso imaginar a definição de limite como um desafio. Primeiro ela o desafia com um número ε. Você deve então ser capaz de obter um δ adequado. Você deve fazer isso para *todo* $\varepsilon > 0$, e não somente para um valor particular de ε.

Imagine uma competição entre duas pessoas, A e B, e suponha que você seja B. A pessoa A estipula que o número fixo L deverá ser aproximado por valores de $f(x)$ com um grau de precisão ε (digamos 0,01). O indivíduo B então responde encontrando um número δ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Nesse caso, A pode tornar-se mais exigente e desafiar B com um valor menor de ε (digamos, 0,0001). Novamente, B deve responder encontrando um δ correspondente. Em geral, quanto menor for o valor de ε, menor será o valor correspondente de δ. Se B vencer sempre, não importando quão pequeno A faça ε, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

EXEMPLO 2 Demonstre que $\lim\limits_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

SOLUÇÃO

1. *Uma análise preliminar do problema (conjecturando um valor para δ).* Seja ε um número positivo dado. Devemos achar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Mas $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Portanto, queremos que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

isto é,

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Isso sugere que deveríamos escolher $\delta = \varepsilon/4$.

2. *Demonstração (mostrando que a escolha de δ funciona).* Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \varepsilon/4$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

FIGURA 9

Assim,

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Portanto, pela definição de limite,

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Este exemplo está ilustrado na Figura 9. □

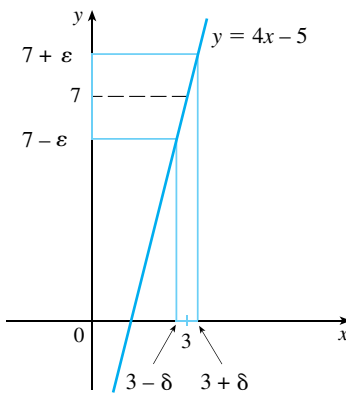
Observe que a solução do Exemplo 2 envolvia dois estágios – conjectura e demonstração. Fizemos uma análise preliminar que nos permitiu conjecturar um valor para δ. Então, em um segundo estágio, tivemos de voltar e demonstrar cuidadosamente e de forma lógica que fizemos uma conjectura correta. Esse procedimento é típico de boa parte da matemática. Por vezes é necessário primeiro fazer uma conjectura inteligente sobre a resposta de um problema para então demonstrar que a conjectura é correta.

As definições intuitivas de limites laterais dadas na Seção 2.2 podem ser reformuladas com mais precisão da seguinte forma.

3 DEFINIÇÃO DE LIMITE À ESQUERDA

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad a - \delta < x < a \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

CAUCHY E OS LIMITES

Após a invenção do cálculo, no século XVII, seguiu-se um período de livre desenvolvimento do assunto, no século XVIII. Matemáticos como os irmãos Bernoulli e Euler estavam ansiosos por explorar o poder do cálculo, e exploraram audaciosamente as consequências dessa encantadora e nova teoria matemática sem grandes preocupações com o fato de suas demonstrações estarem ou não completamente corretas.

O século XIX, ao contrário, foi a Época do Rigor na matemática. Houve um movimento de volta aos fundamentos do assunto – de fornecer definições cuidadosas e demonstrações rigorosas. Na linha de frente desse movimento estava o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que começou como engenheiro militar antes de se tornar professor de matemática em Paris. Cauchy pegou a ideia de limite de Newton, mantida viva no século XVIII pelo matemático francês Jean d´Alembert, e tornou-a mais precisa. Sua definição de limite tem a seguinte forma: "Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de forma que no final diferem dele por tão pouco quanto se queira, esse último é chamado limite de todos os outros". Mas quando Cauchy usava essa definição em exemplos e demonstrações, ele frequentemente empregava desigualdades delta-épsilon similares às desta seção. Uma demonstração típica de Cauchy começa com: "Designando por δ e ε dois números muito pequenos...". Ele usou ε em virtude de uma correspondência entre épsilon e a palavra francesa *erreur*, e δ, pois delta corresponderia a *différence*. Mais tarde o matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) enunciou a definição de limite exatamente como em nossa Definição 2.

4 DEFINIÇÃO DE LIMITE À DIREITA

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad a < x < a + \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Observe que a Definição 3 é igual à Definição 2, exceto que x está restrito à metade *esquerda* $(a - \delta, a)$ do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. Na Definição 4, x está restrito à metade *direita* $(a, a + \delta)$ do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

EXEMPLO 3 Use a Definição 4 para demonstrar que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

SOLUÇÃO

1. *Conjecturando um valor para* δ. Seja ε um número positivo dado. Aqui $a = 0$ e $L = 0$; logo, queremos achar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < x < \delta \quad \text{então} \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

isto é, $$\text{se} \quad 0 < x < \delta \quad \text{então} \quad \sqrt{x} < \varepsilon$$

ou, elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade $\sqrt{x} < \varepsilon$, obtemos

$$\text{se} \quad 0 < x < \delta \quad \text{então} \quad x < \varepsilon^2$$

Isso sugere que deveríamos escolher $\delta = \varepsilon^2$

2. *Mostrando que esse* δ *funciona*. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon^2$. Se $0 < x < \delta$, então

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

logo $$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

Consequentemente, pela Definição 4, isso mostra que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. □

EXEMPLO 4 Demonstre que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

SOLUÇÃO

1. *Conjecturando um valor para* δ. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Temos de achar um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Para ligar $|x^2 - 9|$ com $|x - 3|$ escrevemos $|x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)|$. Nesse caso, queremos que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |x + 3||x - 3| < \varepsilon$$

Observe que se pudermos achar uma constante positiva C tal que $|x + 3| < C$, então

$$|x + 3||x - 3| < C|x - 3|$$

e podemos fazer $C|x - 3| < \varepsilon$ tomando $|x - 3| < \varepsilon/C = \delta$.

Podemos achar esse número C se restringirmos x a algum intervalo centrado em 3. De fato, uma vez que estamos interessados apenas em valores de x que estão próximos de 3, é razoável supor que x está a uma distância menor do que 1 de 3, isto é, $|x - 3| < 1$. Então $2 < x < 4$, logo $5 < x + 3 < 7$. Assim, temos $|x + 3| < 7$; logo, $C = 7$ é uma escolha conveniente para a constante.

Mas agora há duas restrições sobre $|x - 3|$, isto é

$$|x - 3| < 1 \quad \text{e} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{7}$$

Para ter certeza de que ambas as desigualdades estão satisfeitas, tomemos δ como o menor dos dois números 1 e $\varepsilon/7$. A notação para isso é $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$.

2. *Mostrando que esse δ funciona*. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então $|x - 3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow |x + 3| < 7$ (como na parte 1). Temos também $|x - 3| < \varepsilon/7$, logo

$$|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Isso mostra que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ □

O Exemplo 4 mostra que nem sempre é fácil demonstrar que são verdadeiras as afirmações sobre limites usando a definição de ε, δ. De fato, se nos fosse dada uma função mais complexa, como $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, isso iria requerer uma grande dose de engenhosidade. Felizmente isso é desnecessário, pois as Propriedades dos Limites dadas na Seção 2.3 podem ser demonstradas usando a Definição 2, e então os limites das funções complexas podem ser encontrados rigorosamente a partir das Propriedades dos Limites, sem recorrer diretamente à definição.

Por exemplo, demonstramos a Propriedade da Soma: se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ existem, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

As propriedades restantes estão demonstradas nos exercícios e no Apêndice F.

■ Desigualdade triangular:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

(Veja o Apêndice A.)

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE DA SOMA Seja $\varepsilon > 0$ dado. Devemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Usando a desigualdade triangular podemos escrever

$$\boxed{5} \quad \begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Podemos fazer $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ menor que ε tornando cada um dos termos $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$ menor que $\varepsilon/2$.

Uma vez que $\varepsilon/2 > 0$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Analogamente, uma vez que $\lim_{x \to a} g(x) = M$, existe um número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{então} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Observe que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

logo $$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Consequentemente, por (5),

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Resumindo,

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Assim, pela definição de limite,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

LIMITES INFINITOS

Os limites infinitos podem também ser definidos de maneira precisa. A seguir apresenta--se uma versão precisa da Definição 4 da Seção 2.2.

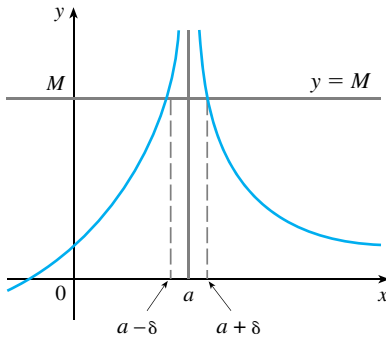



FIGURA 10

6 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que, para todo número positivo M, há um número positivo δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad f(x) > M$$

Isso diz que o valor de $f(x)$ pode ser arbitrariamente grande (maior que qualquer número dado M) tomando-se x suficientemente próximo de a (dentro de uma distância δ, em que δ depende de M, mas com $x \neq a$). Uma ilustração geométrica está na Figura 10.

Dada qualquer reta horizontal $y = M$, podemos achar um número $\delta > 0$ tal que, se restringirmos x a ficar no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, mas $x \neq a$, então a curva $y = f(x)$ ficará acima da reta $y = M$. Você pode ver que se um M maior for escolhido, então um δ menor poderá ser necessário.

EXEMPLO 5 Use a Definição 6 para demonstrar que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

SOLUÇÃO Seja M um número positivo dado. Queremos encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x| < \delta \quad \text{então} \quad 1/x^2 > M$$

Mas

$$\frac{1}{x^2} > M \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1}{M} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Assim, se escolhermos $\delta = 1/\sqrt{M}$ e se $0 < |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$, então $1/x^2 > M$. Isto mostra que $1/x^2 \to \infty$ quando $x \to 0$. □

Analogamente, a seguir é apresentada uma versão precisa da Definição 5 da Seção 2.2, ilustrada pela Figura 11.

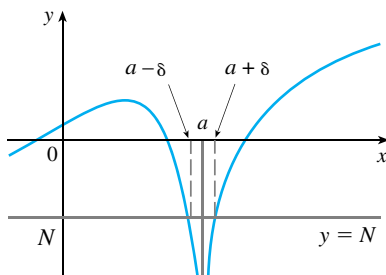



FIGURA 11

7 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em um intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então

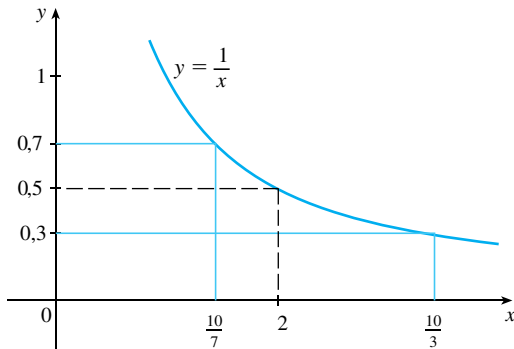
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

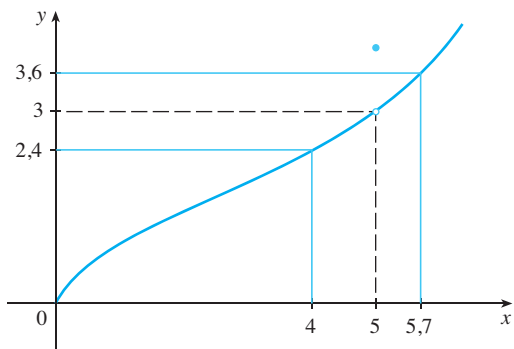
significa que para todo número negativo N há um número positivo δ tal que

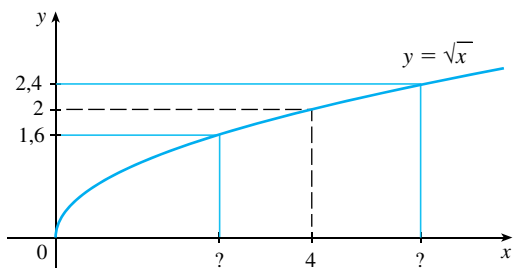
$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad f(x) < N$$

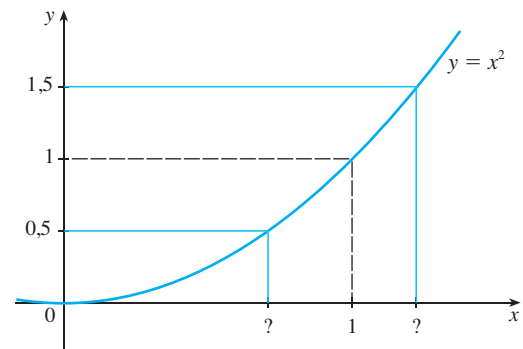
2.4 EXERCÍCIOS

1. Use o gráfico dado de $f(x) = 1/x$ para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 2| < \delta \quad \text{então} \quad \left|\frac{1}{x} - 0{,}5\right| < 0{,}2$$

2. Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 5| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - 3| < 0{,}6$$

3. Use o gráfico dado de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 4| < \delta \quad \text{então} \quad |\sqrt{x} - 2| < 0{,}4$$

4. Use o gráfico dado de $f(x) = x^2$ para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{então} \quad |x^2 - 1| < \tfrac{1}{2}$$

5. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad \left|x - \frac{\pi}{4}\right| < \delta \quad \text{então} \quad |\text{tg}\, x - 1| < 0{,}2$$

6. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{então} \quad \left|\frac{2x}{x^2 + 4} - 0{,}4\right| < 0{,}1$$

7. Para o limite

$$\lim_{x \to 1}(4 + x - 3x^3) = 2$$

ilustre a Definição 2 encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

8. Para o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ilustre a Definição 2 encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

9. Dado que $\lim_{x \to \pi/2} \text{tg}^2 x = \infty$, ilustre a Definição 6 encontrando os valores de δ que correspondam a (a) $M = 1\,000$ e (b) $M = 10\,000$.

10. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 5 < x < 5 + \delta \quad \text{então} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x - 5}} > 100$$

11. Foi pedido a um torneiro mecânico é que fabricasse um disco de metal circular com área de $1\,000\ \text{cm}^2$.

(a) Qual o raio do disco produzido?

(b) Se for permitido ao torneiro uma tolerância do erro de $\pm 5\ \text{cm}^2$ na área do disco, quão próximo do raio ideal da parte (a) o torneiro precisa controlar o raio?

(c) Em termos da definição de ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, o que é x? O que é $f(x)$? O que é a? O que é L? Qual o valor de ε dado? Qual o valor correspondente de δ?

12. Uma fornalha para a produção de cristais é usada em uma pesquisa para determinar a melhor maneira de manufaturar os cristais utilizados em componentes eletrônicos para os veículos espaciais. Para a produção perfeita do cristal, a temperatura deve ser controlada precisamente, ajustando-se a potência de entrada. Suponha que a relação seja dada por

$$T(w) = 0{,}1w^2 + 2{,}155w + 20$$

onde T é a temperatura em graus Celsius e w é a potência de entrada em watts.

(a) Qual a potência necessária para manter a temperatura em 200ºC?

(b) Se for permitida uma variação de ± 1ºC a partir dos 200ºC, qual será o intervalo de potência permitido para a entrada?

(c) Em termos da definição de ε, δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, o que é x? O que é $f(x)$? O que é a? O que é L? Qual o valor de ε dado? Qual o valor correspondente de δ?

13. (a) Encontre um número δ tal que se $|x - 2| < \delta$, então $|4x - 8| < \varepsilon$, onde $\varepsilon = 0{,}1$.

(b) Repita a parte (a) com $\varepsilon = 0{,}01$.

14. Dado que $\lim_{x\to 2}(5x - 7) = 3$, ilustre a Definição 2 encontrando valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}05$ e $\varepsilon = 0{,}01$.

15–18 Demonstre cada afirmação usando a definição ε, δ de limite e ilustre com um diagrama como o da Figura 9.

15. $\lim_{x\to 1}(2x + 3) = 5$

16. $\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$

17. $\lim_{x\to -3}(1 - 4x) = 13$

18. $\lim_{x\to 4}(7 - 3x) = -5$

19–32 Demonstre cada afirmação usando a definição ε, δ de limite.

19. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x}{5} = \dfrac{3}{5}$

20 $\lim_{x\to 6}\left(\dfrac{x}{4} + 3\right) = \dfrac{9}{2}$

21. $\lim_{x\to -5}\left(4 - \dfrac{3x}{5}\right) = 7$

22. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3} = 7$

23. $\lim_{x\to a} x = a$

24. $\lim_{x\to a} c = c$

25. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x\to 0} |x| = 0$

28. $\lim_{x\to 9^-} \sqrt[4]{9 - x} = 0$

29. $\lim_{x\to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x\to 3} (x^2 + x - 4) = 8$

31. $\lim_{x\to -2} (x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

33. Verifique que outra escolha possível de δ para mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ no Exemplo 4 é $\delta = \min\{2, \varepsilon/8\}$.

34. Verifique, usando argumentos geométricos, que a maior escolha possível para o δ para que se possa mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ é $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

SCA **35.** (a) Para o limite $\lim_{x\to 1} (x^3 + x + 1) = 3$, use um gráfico para determinar o valor do δ correspondente a $\varepsilon = 0{,}4$.

(b) Usando um sistema de computação algébrica para resolver a equação cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, determine o maior valor possível para δ que funcione para qualquer $\varepsilon > 0$ dado.

(c) Tome $\varepsilon = 0{,}4$ na sua resposta da parte (b) e compare com a sua resposta da parte (a).

36. Demonstre que $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

37. Demonstre que $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ se $a > 0$

$\left[\textit{Sugestão}\text{: Use } \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.\right]$

38. Se H for a função de Heaviside definida no Exemplo 6 da Seção 2.2, demonstre, usando a Definição 2, que não existe $\lim_{t\to 0} H(t)$. [*Sugestão*: Use uma demonstração indireta: suponha que o limite seja L. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ na definição de limite e tente chegar a uma contradição.]

39. Se a função f for definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

40. Comparando as Definições 2, 3 e 4, demonstre o Teorema 1 da Seção 2.3.

41. Quão próximo de -3 devemos tomar x para que

$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10\,000$$

42. Demonstre, usando a Definição 6, que $\lim_{x\to -3} \dfrac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

43. Demonstre que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

44. Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, onde c é um número real. Demonstre cada afirmação

(a) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$

(b) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \infty$ se $c > 0$

(c) $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = -\infty$ se $c < 0$

2.5 CONTINUIDADE

Observamos na Seção 2.3 que o limite de uma função quando x tende a a pode muitas vezes ser encontrado simplesmente calculando-se o valor da função em a. As funções com essa propriedade são chamadas *contínuas em a*. Veremos que a definição matemática de continuidade corresponde estreitamente ao significado da palavra *continuidade* na linguagem do dia a dia. (Um processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas.)

■ Como ilustrado na Figura 1, se f for contínua, então, os pontos $(x, f(x))$ sobre o gráfico de f tendem ao ponto $(a, f(a))$ sobre o gráfico. Logo, não há quebra na curva.

1 DEFINIÇÃO Uma função f é **contínua em um número *a*** se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

FIGURA 1

Observe que a Definição 1 implicitamente requer três coisas para a continuidade de f em a:

1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

A definição diz que f é contínua em a se $f(x)$ tender a $f(a)$ quando x tender a a. Assim, uma função contínua f tem a propriedade de que uma pequena variação em x produz apenas uma pequena modificação em $f(x)$. De fato, a alteração em $f(x)$ pode ser mantida tão pequena quanto desejarmos mantendo a variação em x suficientemente pequena.

Se f está definida próximo de a (em outras palavras, f está definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a), dizemos que f é **descontínua em *a***, ou que f tem uma **descontinuidade** em a, se f não é contínua em a.

Os fenômenos físicos são geralmente contínuos. Por exemplo, o deslocamento ou a velocidade de um veículo variam continuamente com o tempo, como a altura das pessoas. Mas descontinuidades ocorrem em situações tais como a corrente elétrica. [Veja o Exemplo 6 da Seção 2.2, onde a função de Heaviside é descontínua em 0, pois $\lim_{t \to 0} H(t)$ não existe.]

Geometricamente, você pode pensar em uma função contínua em todo número de um intervalo como uma função cujo gráfico não se quebra. O gráfico pode ser desenhado sem remover sua caneta do papel.

FIGURA 2

EXEMPLO 1 A Figura 2 mostra o gráfico de uma função f. Em quais números f é descontínua? Por quê?

SOLUÇÃO Parece haver uma descontinuidade quando $a = 1$, pois aí o gráfico tem um buraco. A razão oficial para f ser descontínua em 1 é que $f(1)$ não está definida.

O gráfico também tem uma quebra em $a = 3$, mas a razão para a descontinuidade é diferente. Aqui, $f(3)$ está definida, mas $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe (pois o limite esquerdo e o direito são diferentes). Logo f é descontínua em 3.

E sobre $a = 5$? Aqui, $f(5)$ está definida e $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (pois o limite esquerdo e o direito são iguais). Mas

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

Logo f é descontínua em 5. □

Agora vamos ver como detectar descontinuidades quando uma função estiver definida por uma fórmula.

EXEMPLO 2 Onde cada uma das seguintes funções é descontínua?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUÇÃO

(a) Observe que $f(2)$ não está definida; logo, f é descontínua em 2. Mais à frente veremos por que f é contínua em todos os demais números.

(b) Aqui $f(0) = 1$ está definida, mas

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

não existe (veja o Exemplo 8 da Seção 2.2). Logo f é descontínua em 0.

(c) Aqui $f(2) = 1$ está definida e

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 1) = 3$$

existe. Porém

$$\lim_{x \to 2}(x) \neq f(2)$$

logo, f não é contínua em 2.

(d) A função maior inteiro $f(x) = [\![x]\!]$ tem descontinuidades em todos os inteiros, pois $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ não existe se n for um inteiro (veja o Exemplo 10 e o Exercício 49 da Seção 2.3). □

A Figura 3 mostra os gráficos das funções no Exemplo 2. Em cada caso o gráfico não pode ser feito sem levantar a caneta do papel, pois um buraco, uma quebra ou salto ocorrem no gráfico. As descontinuidades ilustradas nas partes (a) e (c) são chamadas **removíveis**, pois podemos removê-las redefinindo f somente no número 2. [A função $g(x) = x + 1$ é contínua.] A descontinuidade da parte (b) é denominada **descontinuidade infinita**. As descontinuidades da parte (d) são ditas **descontinuidades em saltos**, porque a função "salta" de um valor para outro.

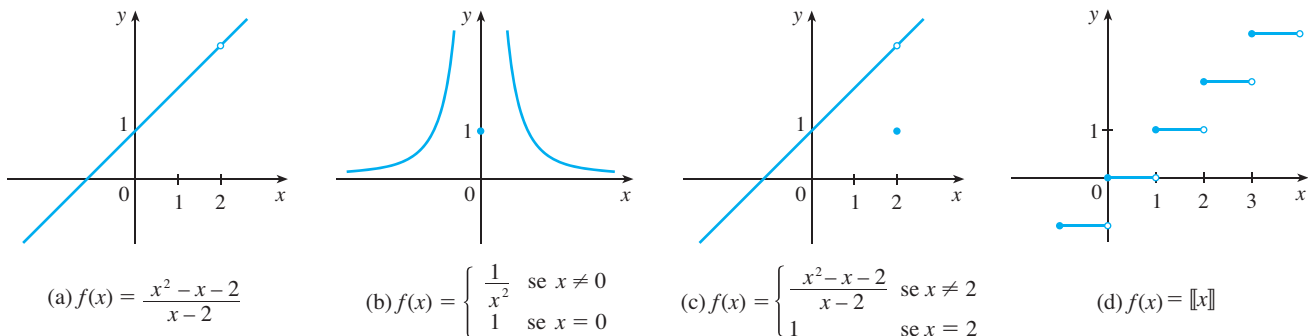



FIGURA 3 Gráficos das funções do Exemplo 2

2 DEFINIÇÃO Uma função f é **contínua à direita em um número a** se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e f é **contínua à esquerda em a** se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EXEMPLO 3 Em cada inteiro n, a função $f(x) = [\![x]\!]$ [veja a Figura 3(d)] é contínua à direita, mas descontínua à esquerda, pois

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

mas

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$ □

3 DEFINIÇÃO Uma função f é **contínua em um intervalo** se for contínua em todos os números do intervalo. (Se f for definida somente de um lado da extremidade do intervalo, entendemos *continuidade* na extremidade como *continuidade à direita* ou *à esquerda*.)

EXEMPLO 4 Mostre que a função $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

SOLUÇÃO Se $-1 < a < 1$, então, usando as Propriedades dos Limites, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a}\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a}\sqrt{1 - x^2} && \text{(pelas Propriedades 2 e 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a}(1 - x^2)} && \text{(pela Propriedade 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(pelas Propriedades 2, 7 e 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

FIGURA 4

Assim, pela Definição 1, f é contínua em a se $-1 < a < 1$. Cálculos análogos mostram que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

logo, f é contínua à direita em -1 e contínua à esquerda em 1. Consequentemente, de acordo com a Definição 3, f é contínua em $[-1, 1]$.

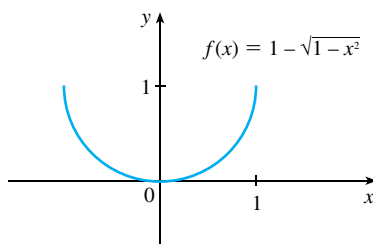
O gráfico de f está esboçado na Figura 4. É a metade inferior do círculo

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$ □

Em lugar de sempre usar as Definições 1, 2 e 3 para verificar a continuidade de uma função como feito no Exemplo 4, muitas vezes é conveniente usar o próximo teorema, que mostra como construir as funções contínuas complicadas a partir das simples.

4 TEOREMA Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO Cada uma das cinco partes desse teorema segue da correspondente Propriedade dos Limites da Seção 2.3. Por exemplo, vamos dar a demonstração da parte 1. Uma vez que f e g são contínuas em a, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f + g)(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad \text{(pela Propriedade 1)} \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a) \end{aligned}$$

Isso mostra que $f + g$ é contínua em a.

Segue do Teorema 4 e da Definição 3 que se f e g forem contínuas em um intervalo, então $f + g, f - g, cf, fg$ e (se g nunca for 0) f/g também o são. O seguinte teorema foi enunciado na Seção 2.3 como a Propriedade da Substituição Direta.

5 TEOREMA

(a) Qualquer polinômio é contínuo em toda a parte; ou seja, é contínuo em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

(b) Qualquer função racional é contínua sempre que estiver definida; ou seja, é contínua em seu domínio.

DEMONSTRAÇÃO

(a) Um polinômio é uma função da forma

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

onde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ são constantes. Sabemos que

$$\lim_{x \to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(pela Propriedade 7)}$$

e

$$\lim_{x \to a} x^m = a^m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(pela Propriedade 9)}$$

Essa equação é precisamente a informação de que a função $f(x) = x^m$ é uma função contínua. Assim, pela parte 3 do Teorema 4, a função $g(x) = cx^m$ é contínua. Uma vez que P é a soma das funções desta forma e uma função constante, segue da parte 1 do Teorema 4 que P é contínua.

(b) Uma função racional é uma função da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. O domínio de f é $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, Q(x) \neq 0\}$. Sabemos, da parte (a), que P e Q são contínuas em toda a parte. Assim, pela parte 5 do Teorema 4, f é contínua em todo o número em D.

Como uma ilustração do Teorema 5, observe que o volume de uma esfera varia continuamente com seu raio, pois a fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ mostra que V é uma função polinomial de r. Da mesma forma, se uma bola for atirada verticalmente no ar com uma velocidade de 20 m/s, então a altura da bola em metros, t segundos mais tarde, é dada pela fórmula $h = 20t - 4{,}9t^2$. Novamente, essa é uma função polinomial, portanto a altura é uma função contínua do tempo decorrido.

O conhecimento de quais funções são contínuas nos permite calcular muito rapidamente alguns limites, como no exemplo a seguir. Compare-o com o Exemplo 2(b) da Seção 2.3.

EXEMPLO 5 Encontre $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUÇÃO A função

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

é racional; assim, pelo Teorema 5, é contínua em seu domínio, que é $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$. Portanto,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11} \qquad \square$$

Resulta que as funções familiares são contínuas em todos os números de seus domínios. Por exemplo, a Propriedade dos Limites 10 (página 90) implica que as funções raízes são contínuas. (O Exemplo 3 da Seção 2.4 mostra que é contínua à direita em 0.)

Da forma dos gráficos das funções seno e cosseno (Figura 18 da Seção 1.2) iríamos certamente conjecturar que elas são contínuas. Sabemos das definições de sen θ e cos θ que as coordenadas do ponto P na Figura 5 são (cos θ, sen θ). À medida que $\theta \to 0$, vemos que P tende ao ponto $(1, 0)$ e, portanto, cos $\theta \to 1$ e sen $\theta \to 0$. Assim,

FIGURA 5

$$\boxed{6} \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$$

Uma vez que cos $0 = 1$ e sen $0 = 0$, as equações em (6) asseguram que as funções seno e cosseno são contínuas em 0. As fórmulas de adição para seno e cosseno podem, então, ser usadas para deduzir que essas funções são contínuas em toda a parte (veja os Exercícios 56 e 57).

■ Outra forma de estabelecer os limites em (6) é fazer uso do Teorema do Confronto com a desigualdade sen $\theta < \theta$ (para $\theta > 0$), que está demonstrada na Seção 3.4.

Segue da parte 5 do Teorema 4 que

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

é contínua, exceto onde cos $x = 0$. Isso acontece quando x é um múltiplo inteiro ímpar de $\pi/2$, portanto $y = \operatorname{tg} x$ tem descontinuidades infinitas quando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, e assim por diante (veja a Figura 6).

FIGURA 6

A função inversa de qualquer função contínua é também contínua. (Este fato é demonstrado no Apêndice F, mas nossa intuição geométrica o faz parecer plausível: o gráfico de f^{-1} é obtido refletindo o gráfico de f em torno da reta $y = x$. Assim, se o gráfico de f não tiver quebras, o gráfico de f^{-1} também não terá.) Logo, as funções trigonométricas inversas são contínuas.

■ As funções trigonométricas inversas foram revistas na Seção 1.6.

Na Seção 1.5 definimos a função exponencial $y = a^x$ de forma a preencher os buracos no gráfico de $y = a^x$, onde x é racional. Em outras palavras, a própria definição de $y = a^x$ torna-a uma função contínua em $\mathbb{R}$. Portanto, sua função inversa $y = \log_a x$ é contínua em $(0, \infty)$.

7 TEOREMA Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios:

polinômios	funções racionais	funções raízes
funções trigonométricas	funções trigonométricas inversas	
funções exponenciais	funções logarítmicas	

EXEMPLO 6 Onde a função $f(x) = \dfrac{\ln x + \operatorname{tg}^{-1} x}{x^2 - 1}$ é contínua?

SOLUÇÃO Sabemos do Teorema 7 que a função $y = \ln x$ é contínua para $x > 0$ e que $y = \operatorname{tg}^{-1} x$ é contínua em $\mathbb{R}$. Assim, pela parte 1 do Teorema 4, $y = \ln x + \operatorname{tg}^{-1} x$ é contínua em $(0, \infty)$. O denominador $y = x^2 - 1$ é um polinômio, portanto é contínuo sempre. Assim, pela parte 5 do Teorema 4, f é contínua em todos os números positivos x, exceto onde $x^2 - 1 = 0$. Logo, f é contínua nos intervalos abertos $(0, 1)$ e $(1, \infty)$. □

EXEMPLO 7 Calcule $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUÇÃO O Teorema 7 nos diz que a função $y = \operatorname{sen} x$ é contínua. A função no denominador, $y = 2 + \cos x$, é a soma de duas funções contínuas e, portanto, é contínua. Observe que esta função nunca é 0, pois $\cos x \geqslant -1$ para todo x e assim $2 + \cos x > 0$ em toda parte. Logo, a razão

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

é sempre contínua. Portanto, pela definição de função contínua,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$ □

Outra forma de combinar as funções contínuas f e g para obter novas funções contínuas é formar a função composta $f \circ g$. Esse fato é uma consequência do seguinte teorema.

■ Esse teorema afirma que um símbolo de limite pode ser movido por um símbolo de função se a função for contínua e se o limite existir. Em outras palavras, a ordem desses dois símbolos pode ser trocada.

8 TEOREMA Seja f contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Em outras palavras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Intuitivamente esse teorema é razoável, pois se x estiver próximo de a, então $g(x)$ estará próximo de b; e como f é contínua em b, se $g(x)$ estiver próximo de b, então $f(g(x))$ estará próximo de $f(b)$. Uma demonstração do Teorema 8 está dada no Apêndice F.

EXEMPLO 8 Calcule $\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$

SOLUÇÃO Uma vez que arcsen é uma função contínua, podemos aplicar o Teorema 8:

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$$

$$= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}\right)$$

$$= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right)$$

$$= \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$ □

Vamos aplicar agora o Teorema 8 no caso especial em que $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onde n é um inteiro positivo. Então

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)},$$

e

$$f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Se colocarmos essas expressões no Teorema 8 obteremos

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

e assim a Propriedade dos Limites 11 foi demonstrada. (Pressupomos que a raiz exista.)

9 **TEOREMA** Se g for contínua em a e f em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

Esse teorema é com frequência expresso informalmente desta forma: "Uma função contínua de uma função contínua é uma função contínua".

DEMONSTRAÇÃO Uma vez que g é contínua em a, temos

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Uma vez que f é contínua em $b = g(a)$, podemos aplicar o Teorema 8 para obter

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

que é precisamente a afirmação de que a função $h(x) = f(g(x))$ é contínua em a; isto é, $f \circ g$ é contínua em a.

EXEMPLO 9 Onde as seguintes funções são contínuas?

(a) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ (b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUÇÃO

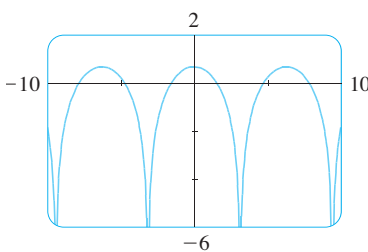
(a) Temos que $h(x) = f(g(x))$, onde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{e} \qquad f(x) = \operatorname{sen} x$$

FIGURA 7

$y = \ln(1 + \cos x)$

Agora, g é contínua em $\mathbb{R}$, pois trata-se de um polinômio, e f também é contínua em toda a parte. Logo, $h = f \circ g$ é contínua em $\mathbb{R}$ pelo Teorema 9.

(b) Sabemos do Teorema 7 que $f(x) = \ln x$ é contínua e $g(x) = 1 + \cos x$ é contínua (pois ambas, $y = 1$ e $y = \cos x$, são contínuas). Portanto, pelo Teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ é contínua sempre que estiver definida. Agora, $\ln(1 + \cos x)$ está definida quando $1 + \cos x > 0$. Dessa forma, não está definida quando $\cos x = -1$, e isso acontece quando $x = \pm\pi$, $\pm 3\pi, \ldots$. Logo, F tem descontinuidades quando x é um múltiplo ímpar de π e é contínua nos intervalos entre esses valores (veja a Figura 7). □

Uma propriedade importante das funções contínuas está expressa pelo teorema a seguir, cuja demonstração é encontrada em textos mais avançados de cálculo.

10 **TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO** Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, em que $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a, b) tal que $f(c) = N$.

O Teorema do Valor Intermediário afirma que uma função contínua assume todos os valores intermediários entre os valores da função $f(a)$ e $f(b)$. Isso está ilustrado na Figura 8. Observe que o valor N pode ser assumido uma vez [como na parte (a)] ou mais [como na parte (b)].

(a)

(b)

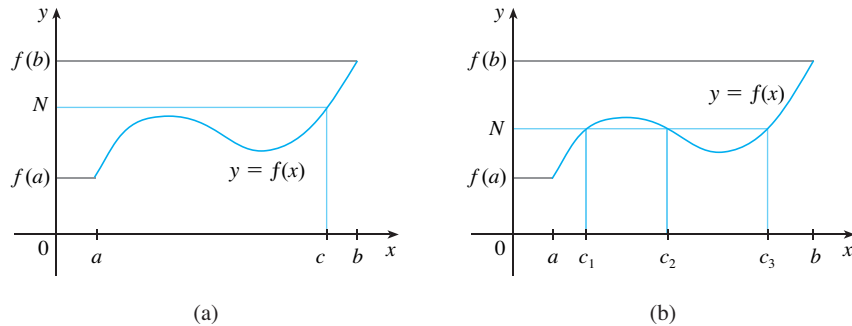
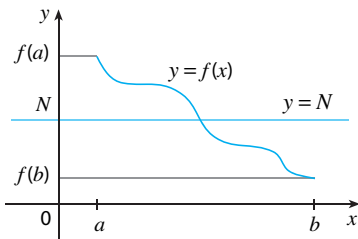



FIGURA 8

FIGURA 9

Se pensarmos em uma função contínua como aquela cujo gráfico não tem nem saltos nem quebras, então é fácil acreditar que o Teorema do Valor Intermediário é verdadeiro. Em termos geométricos, ele afirma que se for dada uma reta horizontal qualquer $y = N$ entre $y = f(a)$ e $y = f(b)$, como na Figura 9, então o gráfico de f não poderá saltar a reta – ele precisará interceptar $y = N$ em algum ponto.

É importante que a função f do Teorema 10 seja contínua. O Teorema do Valor Intermediário não é verdadeiro em geral para as funções descontínuas (veja o Exercício 44).

Uma das aplicações do Teorema do Valor Intermediário é a localização das raízes de equações, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 10 Mostre que existe uma raiz da equação

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 e 2.

SOLUÇÃO Seja $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Estamos procurando por uma solução da equação dada, isto é, um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$. Portanto, tomamos $a = 1$, $b = 2$ e $N = 0$ no Teorema 10. Temos

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

e

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Logo, $f(1) < 0 < f(2)$, isto é, $N = 0$ é um número entre $f(1)$ e $f(2)$. Como f é contínua, uma vez que é um polinômio, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 1 e 2 tal que $f(c) = 0$. Em outras palavras, a equação $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tem pelo menos uma raiz c no intervalo $(1, 2)$.

De fato, podemos localizar mais precisamente a raiz usando novamente o Teorema do Valor Intermediário. Uma vez que

$$f(1{,}2) = -0{,}128 < 0 \qquad \text{e} \qquad f(1{,}3) = 0{,}548 > 0$$

uma raiz deve estar entre 1,2 e 1,3. Uma calculadora fornece, por tentativa e erro,

$$f(1{,}22) = -0{,}007008 < 0 \qquad \text{e} \qquad f(1{,}23) = 0{,}056068 > 0$$

assim, uma raiz está no intervalo $(1{,}22, 1{,}23)$. □

Podemos usar uma calculadora gráfica ou computador para ilustrar o uso do Teorema do Valor Intermediário no Exemplo 10. A Figura 10 mostra o gráfico de f em uma janela retangular $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$, e você pode ver o gráfico cruzando o eixo x entre 1 e 2. A

Figura 11 mostra o resultado ao se aplicar o *zoom*, obtendo a janela retangular [1,2, 1,3] por [−0,2, 0,2].

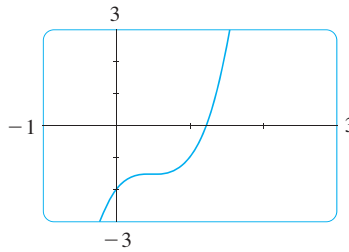



FIGURA 10

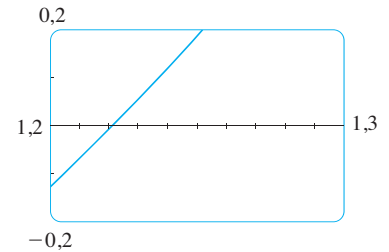



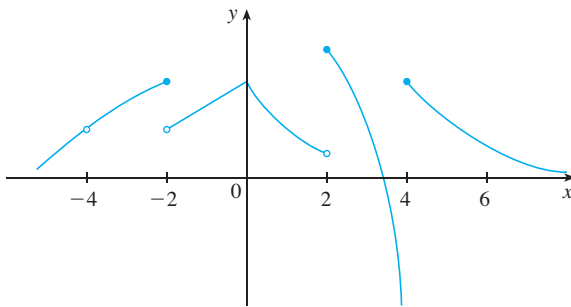
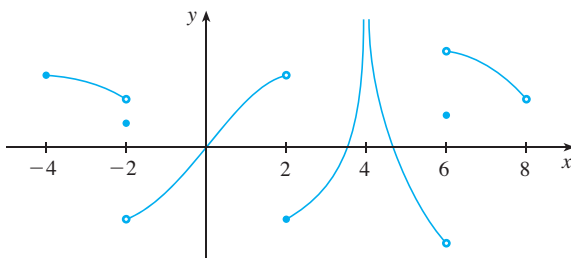
FIGURA 11

De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel na própria maneira de funcionar destas ferramentas gráficas. Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e acende os pixels que contêm os pontos calculados; ele pressupõe que a função é contínua e acende todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, conecta os pixels acendendo os pixels intermediários.

2.5 EXERCÍCIOS

1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.

2. Se f é contínua em $(-\infty,\infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

3. (a) Do gráfico de f, diga os números nos quais f é descontínua e explique por quê.
(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.

4. Do gráfico de g, diga os intervalos nos quais g é contínua.

5. Esboce o gráfico de uma função que é contínua em toda a parte, exceto em $x = 3$ e é contínua à esquerda em 3.

6. Esboce o gráfico de uma função que tenha uma descontinuidade de salto em $x = 2$ e uma descontinuidade removível em $x = 4$, mas seja contínua no restante.

7. Um estacionamento cobra \$ 3 pela primeira hora ou fração, e \$ 2 por hora sucessiva, ou fração, até o máximo diário de \$ 10.
(a) Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido.
(b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use o estacionamento.

8. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo
(b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris
(c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris
(d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida
(e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo

9. Se f e g forem funções contínuas, com $f(3) = 5$ e $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$, encontre $g(3)$.

10–12 Use a definição de continuidade e propriedades dos limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número a.

10. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \qquad a = 4$

11. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

12. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

13–14 Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty)$

14. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3]$

15–20 Explique por que a função é descontínua no número dado a. Esboce o gráfico da função.

15. $f(x) = \ln|x - 2| \qquad a = 2$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

17. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

19. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

21–28 Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função é contínua em todo o número em seu domínio. Diga o domínio.

21. $G(x) = \dfrac{x^4 + 17}{6x^2 + x - 1}$

22. $G(x) = \sqrt[3]{x}\,(1 + x^3)$

23. $R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1}$

24. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + 1}$

25. $L(t) = e^{-5t}\cos 2\pi t$

26. $F(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 - 1)$

27. $G(t) = \ln(t^4 - 1)$

28. $H(x) = \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right)$

29–30 Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

29. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

30. $y = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$

31–34 Use a continuidade para calcular o limite.

31. $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

32. $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

33. $\displaystyle\lim_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

34. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

35–36 Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

35. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{se } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

37–39 Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

37. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1/x & \text{se } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

40. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\[2mm] \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r \geqslant R \end{cases}$$

onde M é a massa da Terra; R é seu raio; e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

41. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

42. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 < x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

43. Quais das seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que seja igual a f para $x \neq a$ e seja contínua em a.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

44. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em 0,25, e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um indicando que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando

que f poderia ainda satisfazer a conclusão do Teorema Valor Intermediário (mesmo que não satisfaça as hipóteses).

45. Se $f(x) = x^2 + 10 \text{ sen } x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 1\,000$.

46. Suponha f contínua em $[1, 5]$ e que as únicas soluções da equação $f(x) = 6$ são $x = 4$ e $x = 1$. Se $f(2) = 8$, explique por que $f(3) > 6$.

47–50 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

47. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$

48. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

49. $\cos x = x, \quad (0, 1)$

50. $\ln x = e^{-x}, \quad (1, 2)$

51–52 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.
(b) Use sua calculadora para encontrar um intervalo de comprimento 0,01 que contenha uma raiz.

51. $e^x = 2 - x$

52. $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$

53–54 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.
(b) Use sua ferramenta gráfica para encontrar a raiz correta até a terceira casa decimal.

53. $100e^{-x/100} = 0{,}01x^2$

54. $\text{arctg } x = 1 - x$

55. Demonstre que f é contínua em a se e somente se

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

56. Para demonstrar que seno é contínuo, precisamos mostrar que $\lim_{x \to a} \text{sen } x = \text{sen } a$ para todo número real a. Pelo Exercício 55, uma afirmação equivalente é que

$$\lim_{h \to 0} \text{sen } (a + h) = \text{sen } a$$

Use (6) para mostrar que isso é verdadeiro.

57. Demonstre que o cosseno é uma função contínua.

58. (a) Demonstre a parte 3 do Teorema 4.
(b) Demonstre a parte 5 do Teorema 4.

59. Para que valores de x a função f é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

60. Para que valores de x a função g é contínua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

61. Existe um número que é exatamente um a mais que seu cubo?

62. Se a e b são números positivos, demonstre que a equação

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tem pelo menos uma solução no intervalo $(-1, 1)$.

63. Demonstre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \text{ sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $(-\infty, \infty)$.

64. (a) Mostre que a função valor absoluto $F(x) = |x|$ é contínua em toda a parte.
(b) Demonstre que se f for uma função contínua em um intervalo, então $|f|$ também o é.
(c) A recíproca da afirmação da parte (b) também é verdadeira? Em outras palavras, se $|f|$ for contínua, segue que f também é? Se for assim, demonstre isso. Caso contrário, encontre um contraexemplo.

65. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

2.6 LIMITES NO INFINITO; ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0,600000
±3	0,800000
±4	0,882353
±5	0,923077
±10	0,980198
±50	0,999200
±100	0,999800
±1 000	0,999998

Nas Seções 2.2 e 2.4, estudamos os limites infinitos e as assíntotas verticais. Lá tomávamos x tendendo a um número e, como resultado, os valores de y ficavam arbitrariamente grandes (positivo ou negativo). Nesta seção vamos tornar x arbitrariamente grande (positivo ou negativo) e ver o que acontece com y.

Vamos começar pela análise do comportamento da função f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

quando x aumenta. A tabela ao lado fornece os valores dessa função, corretos até a sexta casa decimal, e o gráfico de f feito por um computador está na Figura 1.

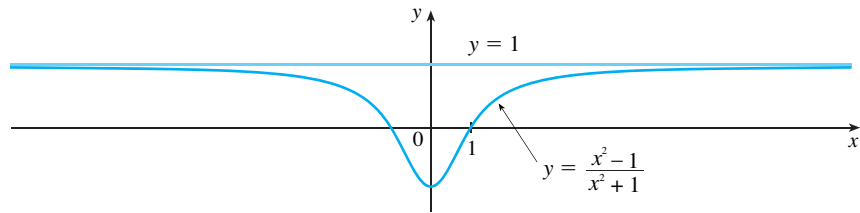



FIGURA 1

Quanto maior o x, mais próximos de 1 ficam os valores de $f(x)$. De fato, temos a impressão de que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 1 quanto quisermos se tomarmos um x suficientemente grande. Essa situação é expressa simbolicamente escrevendo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Em geral, usamos a notação

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de L à medida que x fica maior.

1 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grande.

Outra notação o $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ é

$$f(x) \to L \qquad \text{quando} \qquad x \to \infty$$

O símbolo ∞ não representa um número. Todavia, frequentemente a expressão $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ é lida como

"o limite de $f(x)$, quando x tende a infinito, é L"

ou "o limite de $f(x)$, quando x fica infinito, é L"

ou "o limite de $f(x)$, quando x cresce ilimitadamente, é L"

O significado dessas frases é dado pela Definição 1. Uma definição mais precisa, análoga àquela de ε, δ da Seção 2.4, será dada no final desta seção.

As ilustrações geométricas da Definição 1 estão na Figura 2. Observe que existem muitas formas de o gráfico de f aproximar-se da reta $y = L$ (chamada *assíntota horizontal*) quando fazemos x ir para a extremidade direita.

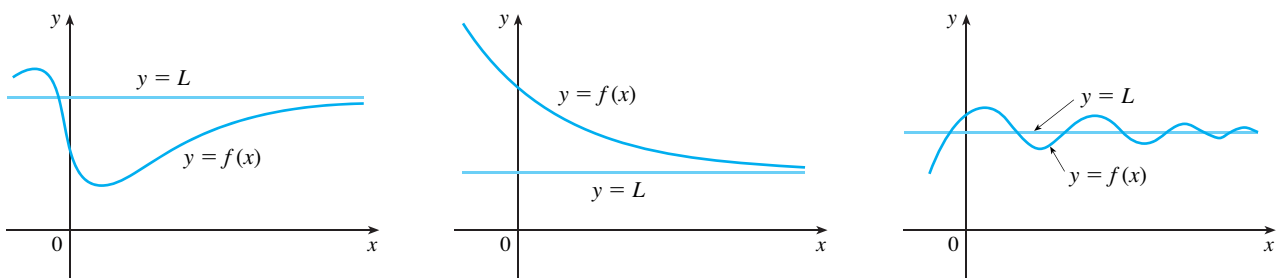



FIGURA 2 Exemplos ilustrando $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Com referência à Figura 1, vemos que para os valores de x com grande valor absoluto, porém negativos, os valores de $f(x)$ estão próximos de 1. Fazendo x decrescer ilimitadamente para valores negativos, podemos tornar $f(x)$ tão próximos de 1 quanto quisermos. Isso é expresso escrevendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

A definição geral é dada a seguir.

2 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L, tomando-se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

FIGURA 3
Exemplos ilustrando $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Novamente, o símbolo $-\infty$ não representa um número; todavia, a expressão $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ é frequentemente lida como

"o limite de $f(x)$, quando x tende a menos infinito, é L"

A Definição 2 está ilustrada na Figura 3. Observe que o gráfico aproxima-se da reta $y = L$ quando olhamos para a extremidade esquerda.

3 DEFINIÇÃO A reta $y = L$ é chamada **assíntota horizontal** da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Por exemplo, a curva ilustrada na Figura 1 tem a reta $y = 1$ como uma assíntota horizontal, pois

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Um exemplo de curva com duas assíntotas horizontais é $y = \operatorname{tg}^{-1} x$ (veja a Figura 4). De fato,

$$\textbf{4} \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{tg}^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

FIGURA 4
$y = \operatorname{tg}^{-1} x$

logo ambas as retas $y = -\pi/2$ e $y = \pi/2$ são assíntotas horizontais. (Isso segue do fato de que as retas $x = \pm\pi/2$ são assíntotas verticais do gráfico da tangente.)

EXEMPLO 1 Encontre os limites infinitos, limites no infinito e assíntotas para a função f cujo gráfico está na Figura 5.

SOLUÇÃO Vemos que os valores de $f(x)$ ficam grandes quando $x \to -1$ por ambos os lados; logo

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Observe que $f(x)$ torna-se grande em valor absoluto (mas negativo) quando x tende a 2 à esquerda, porém grande e positivo quando x tende a 2 à direita. Logo

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

Assim, ambas as retas $x = -1$ e $x = 2$ são assíntotas verticais.

FIGURA 5

Quando x torna-se grande, vemos que $f(x)$ tende a 4. Mas quando x decresce, $f(x)$ tende a 2. Logo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Isso significa que $y = 4$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais. □

EXEMPLO 2 Encontre $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUÇÃO Observe que quando x é grande, $1/x$ é pequeno. Por exemplo,

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000001$$

FIGURA 6

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

De fato, tomando x grande o bastante, podemos fazer $1/x$ tão próximo de 0 quanto quisermos. Portanto, conforme a Definição 1, temos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Um raciocínio análogo mostra que quando x é grande em valor absoluto (porém negativo), $1/x$ é pequeno em valor absoluto (mas negativo); logo temos também

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Segue que a reta $y = 0$ (o eixo x) é uma assíntota horizontal da curva $y = 1/x$. (Esta é uma hipérbole equilátera; veja a Figura 6.) □

A maioria das Propriedades dos Limites que foram dadas na Seção 2.3 também são válidas para os limites no infinito. Pode ser demonstrado que as *Propriedades dos Limites listadas na Seção 2.3 (com exceção das Propriedades 9 e 10) são também válidas se "$x \to a$" for substituído por "$x \to \infty$" ou "$x \to -\infty$"*. Em particular, se combinarmos as Propriedades 6 e 11 com o resultado do Exemplo 2, obteremos a seguinte regra importante no cálculo de limites.

5 **TEOREMA** Se $r > 0$ for um número racional, então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

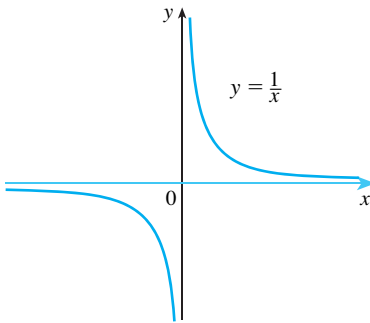
Se $r > 0$ for um número racional tal que x^r seja definida para todo x, então

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

EXEMPLO 3 Calcule

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique quais propriedades de limites foram usadas em cada etapa.

SOLUÇÃO Quando x cresce, ambos, o numerador e o denominador, também crescem, logo não é nada óbvio o que ocorre com a razão entre eles. Para eliminar essa indeterminação, precisaremos antes manipular algebricamente a expressão.

Para calcular o limite no infinito de uma função racional, primeiro dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador. (Podemos assumir que $x \neq 0$, uma vez que estamos interessados apenas em valores grandes de x.) Nesse caso a maior potência de x no denominador é x^2; logo, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(Pela Propriedade dos Limites 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - 2\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{(Por Propriedades 1, 2 e 3)}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \qquad \text{(Por Propriedade 7 e pelo Teorema 5)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

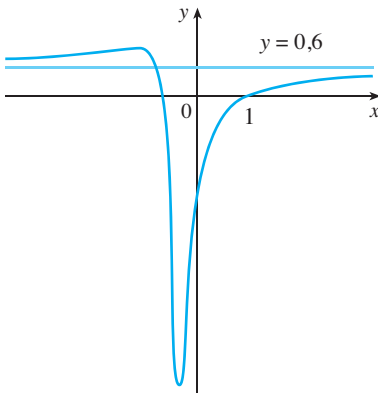



FIGURA 7

$$y = \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

Um cálculo análogo mostra que o limite quando $x \to -\infty$ também é $\frac{3}{5}$. A Figura 7 ilustra o resultado destes cálculos mostrando como o gráfico da função racional dada aproxima-se da assíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$. □

EXEMPLO 4 Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

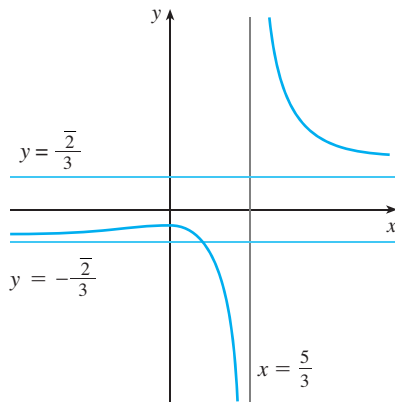
SOLUÇÃO Dividindo o numerador e o denominador por x e usando as propriedades de limites, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} \qquad \text{(já que } \sqrt{x^2} = x \text{ para } x > 0\text{)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty} \left(3 - \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty} 3 - 5\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2 + 0}}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Portanto, a reta $y = \sqrt{2}/3$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

No cálculo do limite quando $x \to -\infty$, devemos lembrar que, para $x < 0$, temos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Logo, quando dividimos o numerador por x, para $x < 0$, obtemos

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2 + 1} = -\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$$

Portanto

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}}=\frac{-\sqrt{2+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}}{3-5\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

FIGURA 8

$y=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

Dessa forma, a reta $y=-\sqrt{2}/3$ é também uma assíntota horizontal.

Uma assíntota vertical provavelmente ocorre quando o denominador, $3x-5$, é 0, isto é, quando $x=\frac{5}{3}$. Se x estiver próximo de $\frac{5}{3}$ e $x>\frac{5}{3}$, então o denominador está próximo de 0, e $3x-5$ é positivo. O numerador $\sqrt{2x^2+1}$ é sempre positivo, logo $f(x)$ é positivo. Portanto

$$\lim_{x\to(5/3)^+}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\infty$$

Se x estiver próximo de $\frac{5}{3}$, mas $x<\frac{5}{3}$, então $3x-5<0$, logo $f(x)$ é muito grande em valor absoluto (porém negativa). Assim

$$\lim_{x\to(5/3)^-}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\infty$$

A assíntota vertical é $x=\frac{5}{3}$. Todas as três assíntotas estão mostradas na Figura 8. □

EXEMPLO 5 Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

■ Podemos pensar na função dada como tendo denominador 1.

SOLUÇÃO Como $\sqrt{x^2+1}$ e x são grandes quando x é grande, é difícil ver o que acontece com sua diferença; logo, usamos a álgebra para reescrever a função. Vamos primeiro multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado radical:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

O Teorema do Confronto poderia ser usado para mostrar que esse limite é 0. Mas o método mais fácil é dividir o numerador e o denominador por x. Fazendo isso e usando as Propriedades dos Limites, obtemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

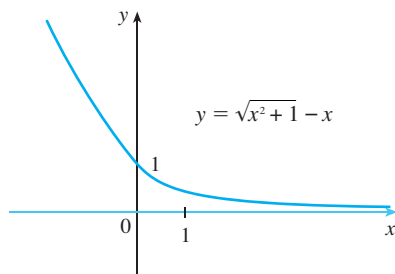



FIGURA 9

A Figura 9 ilustra esse resultado. □

O gráfico da função exponencial natural $y=e^x$ tem a reta $y=0$ (o eixo x) como uma assíntota horizontal. (O mesmo é verdadeiro para qualquer função exponencial com base $a>1$.) De fato, da Figura 10 e da tabela dos valores correspondentes vemos que

6 $$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

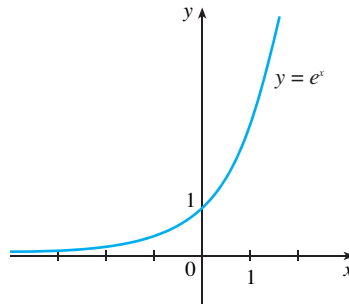
Observe que os valores de e^x tendem a 0 muito rapidamente.

x	e^x
0	1,00000
−1	0,36788
−2	0,13534
−3	0,04979
−5	0,00674
−8	0,00034
−10	0,00005

FIGURA 10

EXEMPLO 6 Calcule $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

■ A estratégia de resolução do problema para o Exemplo 6 está em *Introduza Algo Mais* (veja a página 65). Aqui, a coisa extra, a ajuda auxiliar, é a nova variável t.

SOLUÇÃO Se tomarmos $t = 1/x$, sabemos que $t \to -\infty$ quando $x \to 0^-$. Consequentemente, por (6),

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

(Veja o Exercício 71.) □

EXEMPLO 7 Calcule $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO Quando x cresce, os valores de sen x oscilam entre 1 e -1 um número infinito de vezes; logo, eles não tendem a qualquer número definido. Portanto, $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ não existe. □

LIMITES INFINITOS NO INFINITO

A notação

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

é usada para indicar que os valores de $f(x)$ tornam-se grandes quanto x se torna grande. Significados análogos são dados aos seguintes símbolos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

EXEMPLO 8 Encontre $\lim_{x \to \infty} x^3$ e $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

SOLUÇÃO Quando x torna-se grande, x^3 também fica muito grande. Por exemplo,

$$10^3 = 1\,000 \qquad 100^3 = 1\,000\,000 \qquad 1\,000^3 = 1\,000\,000\,000$$

Na realidade, podemos fazer x^3 tão grande quanto quisermos tomando x grande o suficiente. Portanto, podemos escrever

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

Analogamente, quando x é muito grande em módulo, porém negativo, x^3 também o é. Assim,

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Essas afirmações sobre limites também podem ser vistas no gráfico de $y = x^3$ da Figura 11. □

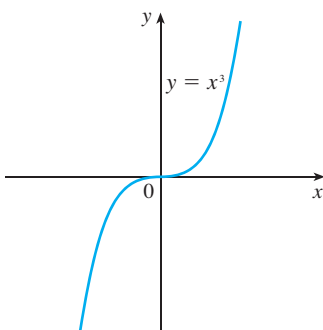



FIGURA 11

$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

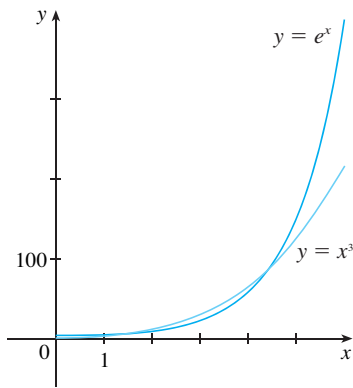



FIGURA 12
Para grandes valores de x, e^x é muito maior que x^3

Olhando para a Figura 10 vemos que

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

mas, como ilustra a Figura 12, $y = e^x$ torna-se grande muito mais rapidamente que $y = x^3$ quando $x \to \infty$.

EXEMPLO 9 Encontre $\lim_{x \to \infty} (x^2 - x)$.

SOLUÇÃO Seria **errado** escrever

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 - \lim_{x \to \infty} x = \infty - \infty$$

As Propriedades dos Limites não podem ser aplicadas para os limites infinitos, pois não é um número (não podemos definir $\infty - \infty$). Contudo, podemos escrever

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x - 1) = \infty$$

porque, como x e $x - 1$ tornam-se arbitrariamente grandes, o mesmo acontece com seu produto. □

EXEMPLO 10 Encontre $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUÇÃO Como no Exemplo 3, vamos dividir o numerador e o denominador pela potência mais elevada do denominador, que é justamente x:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

pois $x + 1 \to \infty$ e $3/x - 1 \to -1$ quando $x \to \infty$. □

O próximo exemplo mostra que usando o limite infinito no infinito, com as intersecções com os eixos, podemos obter uma ideia aproximada do gráfico de um polinômio sem ter de marcar um grande número de pontos.

EXEMPLO 11 Esboce o gráfico de $y = (x - 2)^4 (x + 1)^3 (x - 1)$ achando suas intersecções com os eixos e seus limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.

SOLUÇÃO A intersecção com o eixo y é $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$, e as intersecções com o eixo x são encontradas fazendo-se $y = 0$: $x = 2, -1, 1$. Observe que como $(x - 2)^4$ é positivo, a função não muda de sinal em 2; assim, o gráfico não cruza o eixo x em 2. O gráfico cruza o eixo em -1 e 1. Para os valores grandes de x, todos os três fatores também são grandes; logo,

$$\lim_{x \to \infty} (x - 2)^4 (x + 1)^3 (x - 1) = \infty$$

Quando os valores de x tiverem um módulo grande, porém negativo, o primeiro fator será positivo e grande, ao passo que o segundo e o terceiro fatores têm grande valor absoluto, porém são negativos. Portanto

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 2)^4 (x + 1)^3 (x - 1) = \infty$$

Combinando essas informações, damos um esboço do gráfico na Figura 13. □

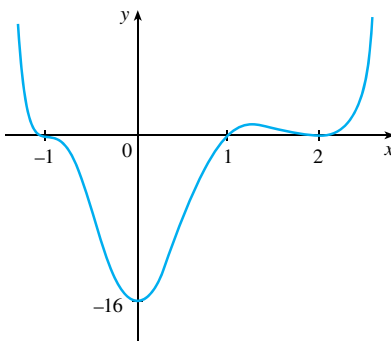



FIGURA 13
$y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$

DEFINIÇÕES PRECISAS

Podemos enunciar mais precisamente a Definição 1 da seguinte forma.

7 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe um correspondente número N tal que

$$\text{se } x > N \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Em palavras, isso diz que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L (dentro de uma distância ε, onde ε é qualquer número positivo), bastando apenas tomar x suficientemente grande (maior que N, onde N depende de ε). Graficamente, isso quer dizer que, escolhendo x suficientemente grande (maior que algum número N), podemos fazer o gráfico de f ficar entre duas retas horizontais dadas $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$, como na Figura 14. Isso deve ser verdadeiro, não importando quão pequeno seja ε. A Figura 15 indica que se for escolhido um valor menor de ε, então poderá ser necessário um maior valor para N.

FIGURA 14
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

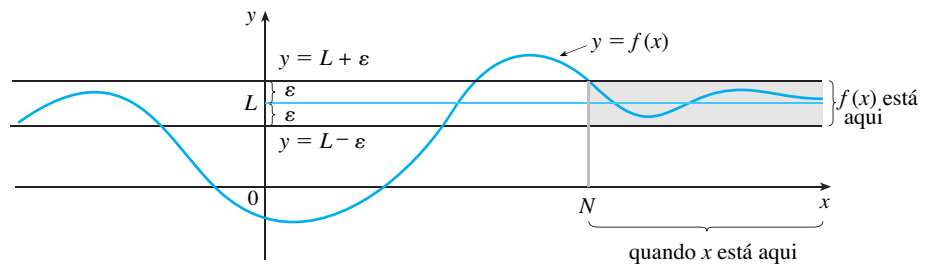
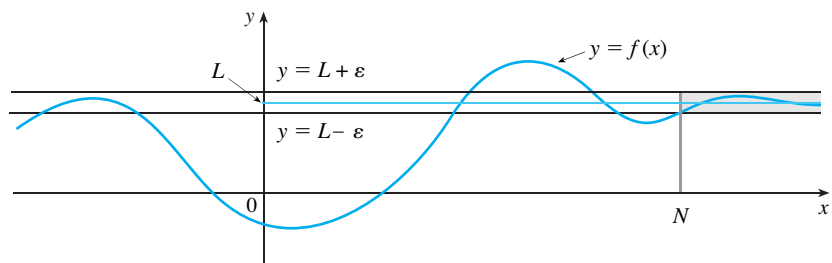



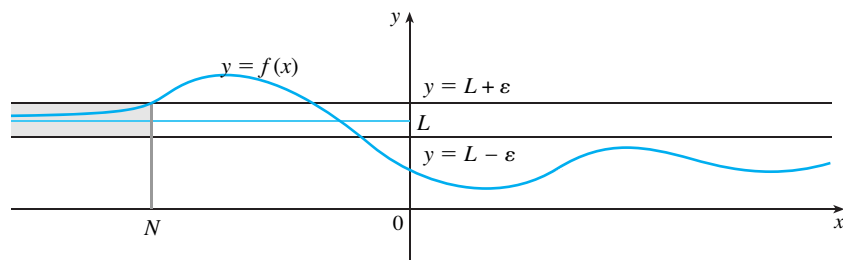
FIGURA 15
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Analogamente, uma versão precisa da Definição 2 é dada pela Definição 8, que está ilustrada na Figura 16.

8 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe um correspondente número N tal que

$$\text{se } x < N \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

FIGURA 16
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

No Exemplo 3 calculamos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

No próximo exemplo vamos usar uma ferramenta gráfica para relacionar isso com a Definição 7, com $L = \frac{3}{5}$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

EXEMPLO 12 Use um gráfico para encontrar um número N tal que

$$\text{se } x > N \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0{,}6 \right| < 0{,}1$$

SOLUÇÃO Vamos escrever a desigualdade dada como

$$0{,}5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0{,}7$$

FIGURA 17

Precisamos determinar os valores de x para os quais a curva dada fica entre as retas horizontais $y = 0{,}5$ e $y = 0{,}7$. Assim, fazemos o gráfico da curva e dessas retas na Figura 17. Então, usamos o cursor para estimar que a curva cruza a reta $y = 0{,}5$ quando $x \approx 6{,}7$. À direita desse número a curva fica entre as retas $y = 0{,}5$ e $y = 0{,}7$. Arredondando a favor da segurança, podemos dizer que

$$\text{se } x > 7 \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0{,}6 \right| < 0{,}1$$

Em outras palavras, para $\varepsilon = 0{,}1$ podemos escolher $N = 7$ (ou qualquer número maior) na Definição 7. □

EXEMPLO 13 Use a Definição 7 para demonstrar que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUÇÃO Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar N tal que

$$\text{se } x > N \quad \text{então} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Ao calcular o limite, podemos assumir que $x > 0$. Então $1/x < \varepsilon \Leftrightarrow x > 1/\varepsilon$. Escolhendo $N = 1/\varepsilon$, temos

$$\text{se } x > N = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{então} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

Logo, pela Definição 7,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

A Figura 18 ilustra a demonstração mostrando alguns valores de ε e os valores correspondentes de N.

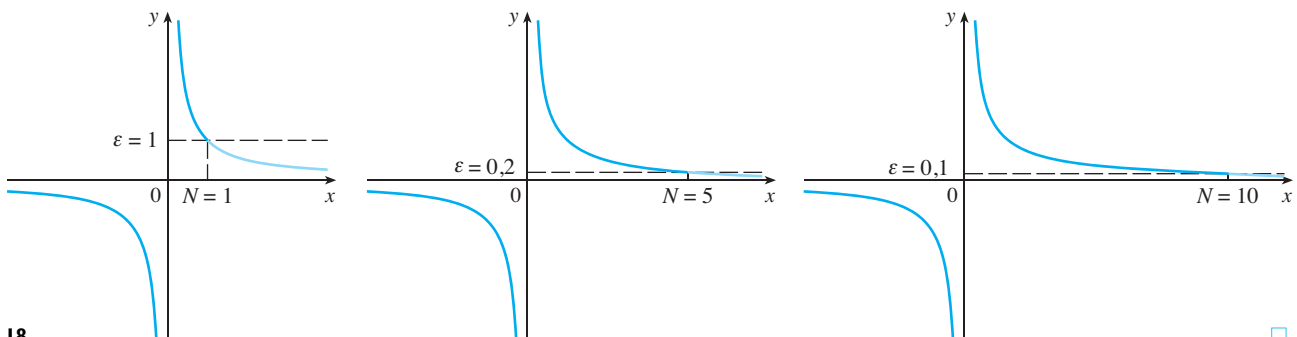



FIGURA 18 □

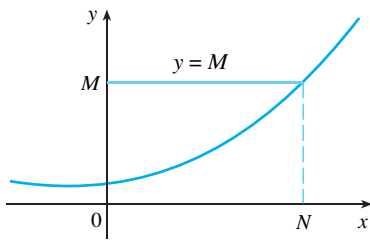



FIGURA 19

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Finalmente, observamos que pode ser definido um limite infinito no infinito da forma a seguir. A ilustração geométrica está dada na Figura 19.

9 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo positivo M existe um correspondente número positivo N tal que

$$\text{se } x > N \quad \text{então} \quad f(x) > M$$

Definições análogas podem ser feitas quando o símbolo ∞ é substituído por $-\infty$ (veja o Exercício 70).

2.6 EXERCÍCIOS

1. Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens a seguir.

(a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

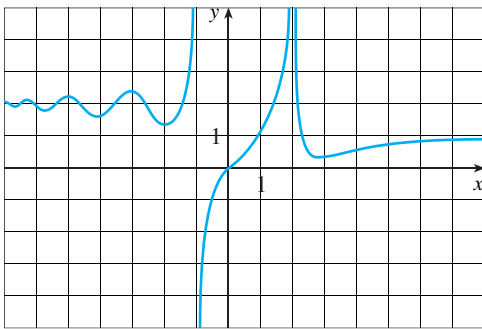
2. (a) O gráfico de $y = f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.

(b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y = f(x)$? Ilustre com gráficos as possibilidades.

3. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga quem são.

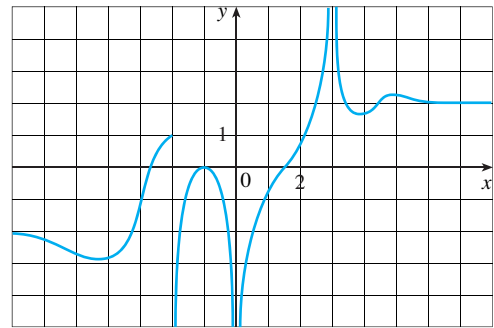
(a) $\lim_{x \to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ (d) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

(e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (f) As equações das assíntonas

4. Para a função g, cujo gráfico é dado, determine o que se pede.

(a) $\lim_{x \to \infty} g(x)$ (b) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

(c) $\lim_{x \to 3} g(x)$ (d) $\lim_{x \to 0} g(x)$

(e) $\lim_{x \to -2^+} g(x)$ (f) As equações das assíntotas

5–10 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

5. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, f é ímpar

6. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

7. $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x \to -2} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -3$

9. $f(0) = 3$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f é par

11. Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

calculando a função $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ e 100. Então, use o gráfico de f para comprovar sua conjectura.

12. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ correto até a segunda casa decimal.

(b) Use a tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite até quatro casas decimais.

13–14 Calcule o limite e justifique cada passagem indicando a propriedade apropriada dos limites.

13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15–36 Encontre o limite.

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x + 3}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

18. $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{6t^2 + 5t}{(1 - t)(2t - 3)}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$

20. $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{t^2 + 2}{t^3 + t^2 - 1}$

21. $\displaystyle\lim_{u\to\infty} \frac{4u^4 + 5}{(u^2 - 2)(2u^2 - 1)}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \cos x$

29. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + x^3 + x^5}{1 - x^2 + x^4}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x}\right)$

33. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}(x^2 - x^4)$

35. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-2x} \cos x)$

36. $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} e^{\operatorname{tg} x}$

37. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

traçando o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$

(b) Use uma tabela de valores para $f(x)$ para conjecturar o valor do limite.

(c) Demonstre que sua conjectura está correta.

38. (a) Use o gráfico

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com uma casa decimal.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Encontre o valor exato do limite.

39–44 Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

39. $y = \dfrac{x}{x + 4}$

40. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$

41. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

42. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

43. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

44. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

45. Estime a assíntota horizontal da função

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2\,000}$$

através do gráfico de f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. A seguir, determine a equação da assíntota calculando o limite. Como você explica a discrepância?

46. (a) Trace a função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

Quantas assíntotas horizontais e verticais você observa? Use o gráfico para estimar os valores dos limites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calculando valores de $f(x)$, dê estimativas numéricas dos limites na parte (a).

(c) Calcule os valores exatos dos limites na parte (a). Você obtém os mesmos valores ou valores diferentes para estes limites? [Em vista de sua resposta na parte (a), você pode ter de verificar seus cálculos para o segundo limite.]

47. Encontre uma fórmula para uma função f que satisfaça as seguintes condições:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

48. Encontre uma fórmula para uma função que tenha por assíntotas verticais $x = 1$ e $x = 3$ e por assíntota horizontal $y = 1$.

49–52 Encontre os limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$. Use essa informação, bem como as intersecções com os eixos, para fazer um esboço do gráfico, como no Exemplo 11.

49. $y = x^2 - x^6$

50. $y = x^3(x+2)^2(x-1)$

51. $y = (3-x)(1+x)^2(1-x)^4$

52. $y = x^2(x^2-1)^2(x+2)$

53. (a) Use o Teorema do Confronto para determinar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

(b) Faça um gráfico de $f(x) = (\text{sen}\, x)/x$. Quantas vezes o gráfico cruza a assíntota?

54. Por *comportamento final* de uma função queremos indicar uma descrição do que acontece com seus valores quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.

(a) Descreva e compare o comportamento final das funções

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

por meio do gráfico de ambas nas janelas retangulares $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$.

(b) Dizemos que duas funções têm o *mesmo comportamento final* se sua razão tende a 1 quando $x \to \infty$. Mostre que P e Q têm o mesmo comportamento final.

55. Sejam P e Q polinômios. Encontre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se o grau de P for (a) menor que o grau de Q e (b) maior que o grau de Q.

56. Faça um esboço da curva $y = x^n$ (n inteiro) nos seguintes casos:

(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n ímpar

(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n ímpar

(v) $n < 0$, n par

Então, use esses esboços para encontrar os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x\to 0^-} x^n$

(c) $\lim_{x\to\infty} x^n$ (d) $\lim_{x\to -\infty} x^n$

57. Encontre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ se, para todo $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

58. (a) Um tanque contém 5 000 litros de água pura. Água salgada contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 l/min. Mostre que a concentração de sal depois de t minutos(em gramas por litro) é

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?

59. Seremos capazes de mostrar, no Capítulo 9 do Volume II, que, sob certas condições, a velocidade $v(t)$ de uma gota de chuva caindo no instante t é

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

em que g é a aceleração da gravidade; e v^* é a velocidade final da gota.

(a) Encontre $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

(b) Faça o gráfico de $v(t)$ se $v^* = 1$ m/s e $g = 9{,}8$ m/s^2. Quanto tempo levará para a velocidade da gota atingir 99% de sua velocidade final?

60. (a) Fazendo os gráficos de $y = e^{-x/10}$ e $y = 0{,}1$ na mesma tela, descubra quão grande você precisará tomar x para que $e^{-x/10} < 0{,}1$.

(b) A parte (a) pode ser resolvida sem usar uma ferramenta gráfica?

61. Use o gráfico para encontrar um número N tal que

$$\text{se} \quad x > N \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1{,}5 \right| < 0{,}05$$

62. Para o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre a Definição 7, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

63. Para o limite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

ilustre a Definição 8, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

64. Para o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

ilustre a Definição 9, encontrando um valor de N correspondente a $M = 100$.

65. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/x^2 < 0{,}0001$?

(b) Tomando $r = 2$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

66. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/\sqrt{x} < 0{,}0001$?

(b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

67. Use a Definição 8 para demonstrar que $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

68. Demonstre, usando a Definição 9, que $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

69. Use a Definição 9 para demonstrar que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

70. Formule precisamente a definição de

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

Então, use sua definição para demonstrar que

$$\lim_{x\to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

71. Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f(1/t)$$

e

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^-} f(1/t)$$

se esses limites existirem.

2.7 DERIVADAS E TAXAS DE VARIAÇÃO

O problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto envolvem determinar o mesmo tipo de limite, como vimos na Seção 2.1. Este tipo especial de limite é chamado *derivada* e veremos que ele pode ser interpretado como uma taxa de variação tanto nas ciências quanto na engenharia.

TANGENTES

Se uma curva C tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$, consideramos um ponto próximo $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva C ao obrigar x tender a a. Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a *tangente t* como a reta que passa por P e tem inclinação m. (Isso implica dizer que a reta tangente é a posição-limite da reta secante PQ quando Q tende a P. Veja a Figura 1.)

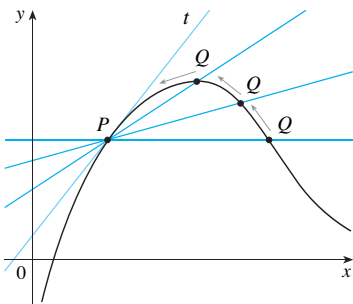
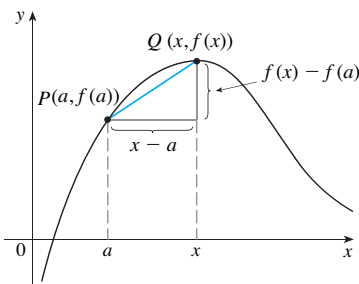



FIGURA 1

1 DEFINIÇÃO A **reta tangente** a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta por P que tem a inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

Em nosso primeiro exemplo vamos confirmar uma conjectura que foi feita no Exemplo 1 da Seção 2.1.

EXEMPLO 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Temos aqui $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

■ A forma ponto-inclinação da equação da reta por um ponto (x_1, y_1) com uma inclinação m é:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em $(1, 1)$ é

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1$$ □

Algumas vezes nos referimos à inclinação da reta tangente como a **inclinação da curva** no ponto. A ideia por detrás disso é que, se dermos *zoom* (suficiente) em direção ao ponto, a curva parecerá quase uma reta. A Figura 2 ilustra esse procedimento para a curva $y = x^2$ do Exemplo 1. Quanto maior for o *zoom*, mais indistinguível da reta tangente será a parábola.

FIGURA 2 Um *zoom* cada vez maior da parábola $y = x^2$ no ponto (1, 1)

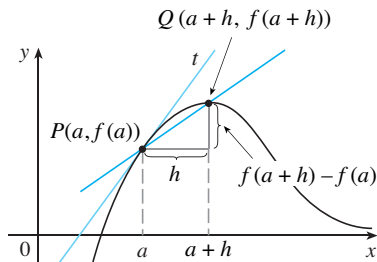



FIGURA 3

Há outra expressão para a inclinação da reta tangente, às vezes mais fácil de ser usada. Se $h = x - a$, então $x = a + h$ e, assim, a inclinação da reta secante PQ é

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(Veja a Figura 3, na qual está ilustrado o caso $h > 0$ e Q está à direita de P. No caso de $h < 0$, o ponto Q estará à esquerda de P.)

Observe que quando x tende a a, h tende a 0 (pois $h = x - a$); assim, a expressão para a inclinação da reta tangente na Definição 1 fica

2

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

FIGURA 4

EXEMPLO 2 Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole $y = 3/x$ no ponto (3, 1).

SOLUÇÃO Seja $f(x) = 3/x$. Então a inclinação da reta tangente em (3, 1) é

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

Portanto, uma equação da reta tangente no ponto (3, 1) é

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica para

$$x + 3y - 6 = 0$$

A hipérbole e sua tangente estão na Figura 4. □

FIGURA 5

s
Q(a + h, f(a + h))
P(a, f(a))
h
0
a
a + h
t

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
= velocidade média

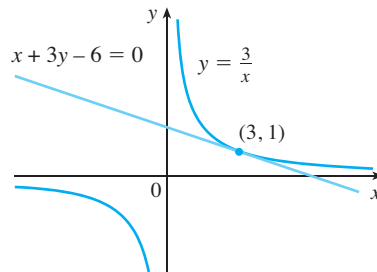
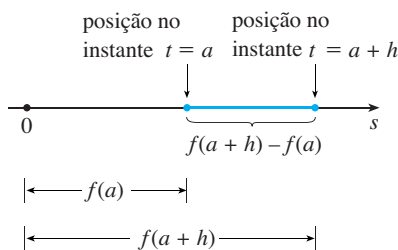
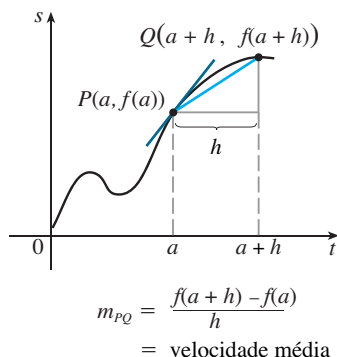



FIGURA 6

VELOCIDADES

Na Seção 2.1 estudamos o movimento de uma bola abandonada de cima da Torre CN e sua velocidade foi definida como o valor-limite das velocidades médias em períodos cada vez menores.

Em geral, suponha que um objeto se mova sobre uma reta de acordo com a equação $s = f(t)$, na qual s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t. A função f que descreve o movimento é chamada **função posição** do objeto. No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$ a variação na posição será de $f(a + h) - f(a)$ (veja a Figura 5). A velocidade média nesse intervalo é

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que é o mesmo que inclinação da reta secante PQ na Figura 6.

Suponha agora que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores $[a, a + h]$. Em outras palavras, fazemos h tender a 0. Como no exemplo da queda da bola, definimos **velocidade** (ou **velocidade instantânea**) $v(a)$ no instante $t = a$ como o limite dessas velocidades médias:

3 $$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Isso significa que a velocidade no instante $t = a$ é igual à inclinação da reta tangente em P (compare as Equações 2 e 3).

Agora que sabemos calcular os limites, vamos retornar ao problema da queda da bola.

■ Lembre-se da Seção 2.1: a distância (em metros) percorrida após t segundos é $4{,}9t^2$

EXEMPLO 3 Suponha que a bola foi abandonada do posto de observação da torre, 450 m acima do solo.

(a) Qual a velocidade da bola após 5 segundos?

(b) Com qual velocidade a bola chega ao solo?

SOLUÇÃO Precisaremos encontrar a velocidade tanto quando $t = 5$ quanto quando a bola atinge o solo, de modo que é eficiente começar encontrando a velocidade em um instante geral $t = a$. Usando a equação de movimento $s = f(t) = 4{,}9t^2$, temos

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a + h)^2 - 4{,}9a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(2ah + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4{,}9(2a + h) = 9{,}8a$$

(a) A velocidade após 5 s é de $v(5) = (9{,}8)(5) = 49$ m/s.

(b) Uma vez que o posto de observação está 450 m acima do solo, a bola vai atingir o chão em t_1, quando $s(t_1) = 450$, isto é,

$$4{,}9t_1^2 = 450$$

Isso fornece

$$t_1^2 = \frac{450}{4{,}9} \qquad \text{e} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \approx 9{,}6 \text{ s}$$

A velocidade com que a bola atinge o chão é, portanto,

$$v(t_1) = 9{,}8t_1 = 9{,}8\sqrt{\frac{450}{4{,}9}} \approx 94 \text{ m/s}$$ □

DERIVADAS

Vimos que o mesmo tipo de limite aparece ao encontrar a inclinação de uma reta tangente (Equação 2) ou a velocidade de um objeto (Equação 3). De fato, os limites do tipo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

surgem sempre que calculamos uma taxa de variação em uma das ciências ou engenharia, tais como a taxa de uma reação química ou o custo marginal em economia. Uma vez que esse tipo de limite ocorre amplamente, ele recebe nome e notação especiais.

4 **DEFINIÇÃO** A **derivada de uma função f em um número a**, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

■ $f'(a)$ é lido "f linha de a".

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e h tende a 0 se e somente se x tende a a. Consequentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição da derivada, como vimos na determinação das retas tangentes, é

5
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

EXEMPLO 4 Encontre a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 9$ em um número a.

SOLUÇÃO Da Definição 4 temos

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0}(2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$

□

Definimos a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$ como a reta que passa em P e tem inclinação m dada pela Equação 1 ou 2. Uma vez que, pela Definição 4, isso é o mesmo que a derivada $f'(a)$, podemos agora dizer o seguinte:

A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

FIGURA 7

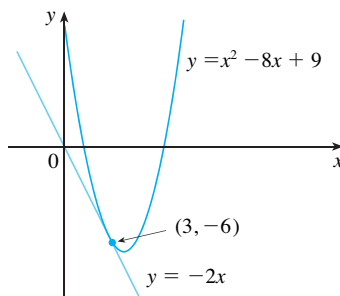
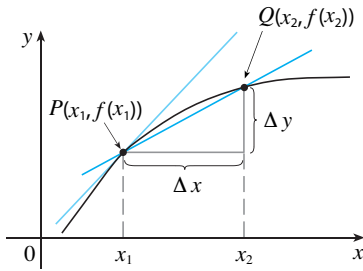
Se usarmos a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, poderemos escrever uma equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

EXEMPLO 5 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2 - 8x + 9$ no ponto $(3, -6)$.

SOLUÇÃO Do Exemplo 4, sabemos que a derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ no número a é $f'(a) = 2a - 8$. Portanto, a inclinação da reta tangente em $(3, -6)$ é $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. Dessa forma, uma equação da reta tangente, ilustrada na Figura 7, é

$$y = (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad y = -2x$$

□

TAXAS DE VARIAÇÃO

taxa média de variação = m_{PQ}

taxa instantânea de variação = inclinação da tangente em P

FIGURA 8

Suponha que y seja uma quantidade que depende de outra quantidade x. Assim, y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$. Se x variar de x_1 para x_2, então a variação de x (também chamada **incremento** de x) é

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente de y é

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O quociente de diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominado **taxa média de variação de *y* em relação a *x*** no intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante PQ na Figura 8.

Por analogia com a velocidade, consideramos a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, fazendo Δx tender a 0. O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa (instantânea) de variação de *y* em relação a *x*** em $x = x_1$, que é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\text{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{6}$$

Reconhecemos este limite como a derivada $f'(x_1)$.

Sabemos que uma das interpretações da derivada $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ quando $x = a$. Agora temos uma segunda interpretação:

> A derivada $f'(a)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.

FIGURA 9
Os valores de y estão variando rapidamente em P e de modo lento em Q

A conexão com a primeira interpretação é que se esboçarmos a curva $y = f(x)$, então a taxa instantânea da variação será a inclinação da tangente a essa curva no ponto onde $x = a$. Isso significa que quando a derivada for grande (e portanto a curva será íngreme no ponto P na Figura 9), os valores de y mudarão rapidamente. Quando a derivada for pequena, a curva será relativamente achatada, e os valores de y mudarão lentamente.

Em particular, se $s = f(t)$ for a função posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então, $f'(a)$ será a taxa de variação do deslocamento s em relação ao tempo t. Em outras palavras, *$f'(a)$ é a velocidade da partícula no instante $t = a$*. A **velocidade escalar** da partícula é o valor absoluto da velocidade, isto é, $|f'(a)|$.

No próximo exemplo discutiremos o significado da derivada de uma função definida verbalmente.

EXEMPLO 6 Um fabricante produz peças de fazenda com largura fixa e o custo da produção de x metros desse material é $C = f(x)$.

(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais suas unidades?

(b) Em termos práticos, o que significa dizer que $f'(1\,000) = 9$?

(c) O que você acha que é maior, $f'(50)$ ou $f'(500)$? E $f'(5\,000)$?

SOLUÇÃO

(a) A derivada $f'(x)$ é a taxa de variação instantânea de C em relação a x; isto é, $f'(x)$ significa a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de metros produzidos. (Os economistas chamam essa taxa de variação de *custo marginal*. Essa ideia está discutida em mais detalhes nas Seções 3.7 e 4.7.)

■ Aqui estamos assumindo que a função custo é bem comportada; ou seja, $C(x)$ não oscila muito rapidamente próximo a $x = 1\,000$.

Como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

as unidades para $f'(x)$ são iguais àquelas do quociente de diferenças $\Delta C/\Delta x$. Uma vez que ΔC é medida em dólares e Δx em metros, segue que a unidade para $f'(x)$ é dólares por metro.

(b) A afirmação que $f'(1\,000) = 9$ significa que, depois de 1 000 metros da peça terem sido fabricados, a taxa segundo a qual o custo de produção está aumentando é \$ 9/m. (Quando $x = 1\,000$, C está aumentando 9 vezes mais rápido que x.)

Uma vez que $\Delta x = 1$ é pequeno comparado com $x = 1\,000$, podemos usar a aproximação

$$f'(1\,000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

e dizer que o custo de fabricação do milésimo metro (ou do 1 001º) está em torno de \$ 9.

(c) A taxa segundo a qual o custo de produção está crescendo (por metro) é provavelmente menor quando $x = 500$ do que quando $x = 50$ (o custo de fabricação do 500º metro é menor que o custo do 50º metro), em virtude da economia de escala. (O fabricante usa mais eficientemente os custos fixos de produção.) Então

$$f'(50) > f'(500)$$

Mas, à medida que a produção expande, a operação de larga escala resultante pode se tornar ineficiente, e poderiam ocorrer custos de horas extras. Logo, é possível que a taxa de crescimento dos custos possa crescer no futuro. Assim, pode ocorrer que

$$f'(5\,000) > f'(500)$$ □

No exemplo a seguir estimamos a taxa de variação da dívida nacional em relação ao tempo. Aqui, a função é definida não por uma fórmula, mas por uma tabela de valores.

EXEMPLO 7 Seja $D(t)$ a dívida pública bruta canadense no instante t. A seguinte tabela dá os valores aproximados dessa função, fornecendo as estimativas da dívida, em meados do ano, em bilhões de dólares, no período de 1994 a 2002. Interprete e estime os valores de $D'(1998)$.

t	$P(t)$
1994	414,0
1996	469,5
1998	467,3
2000	456,4
2002	442,3

SOLUÇÃO A derivada $D'(1998)$ indica a taxa de variação da dívida D com relação a t quando $t = 1998$, isto é, a taxa de crescimento da dívida nacional em 1998.

De acordo com a Equação 3,

$$D'(1998) = \lim_{t \to 1998} \frac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$$

Dessa forma, calculamos e tabulamos os valores do quociente de diferenças (as taxas médias da variação) como a seguir:

t	$\dfrac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$
1994	13,3
1996	−1,1
2000	−5,5
2002	−6,3

■ UMA OBSERVAÇÃO SOBRE UNIDADES

As unidades para a taxa média de variação $\Delta D/\Delta t$ são as unidades para ΔD divididas pelas unidades para Δt, a saber, bilhões de dólares por ano. A taxa instantânea de variação é o limite das taxas médias de variação, de modo que é medida nas mesmas unidades: bilhões de dólares por ano.

Da tabela vemos que $D'(1998)$ situa-se em algum lugar entre $-1{,}1$ e $-5{,}5$ bilhões de dólares por ano. [Aqui, estamos fazendo a hipótese razoável de que o débito não flutue muito entre 1998 e 2002.] Estimamos que a taxa de crescimento da dívida nacional do Canadá em1998 foi a média desses dois números, a saber:

$$D'(1998) \approx -3{,}3 \text{ bilhões de dólares por ano}$$

O sinal de menos significa que o débito está *decrescendo* naquele instante.

Um outro método seria traçar a função de débito e estimar a inclinação da reta tangente quando $t = 1998$. □

Nos Exemplos 3, 6 e 7 vimos três casos específicos de taxas de variação: a velocidade de um objeto é a taxa de variação do deslocamento com relação ao tempo; o custo marginal é a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de itens produzidos; a taxa de variação do débito em relação ao tempo é de interesse na economia. Aqui está uma pequena amostra de outras taxas de variação: em física, a taxa de variação do trabalho com relação ao tempo é chamada de potência. Os químicos que estudam reações químicas estão interessados na taxa de variação da concentração de um reagente em relação ao tempo (chamada taxa de reação). Um biólogo está interessado na taxa de variação da população de uma colônia de bactérias em relação ao tempo. Na realidade, o cálculo das taxas de variação é importante em todas as ciências naturais, na engenharia e mesmo nas ciências sociais. Mais exemplos serão dados na Seção 3.7.

Todas essas taxas de variação são derivadas e podem, portanto, ser interpretadas como inclinações das tangentes. Isto dá importância extra à solução de problemas envolvendo tangentes. Sempre que resolvemos um problema envolvendo retas tangentes, não estamos resolvendo apenas um problema geométrico. Estamos também resolvendo implicitamente uma grande variedade de problemas envolvendo taxas de variação nas ciências e na engenharia.

2.7 EXERCÍCIOS

1. Uma curva tem por equação $y = f(x)$.
(a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.
(b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

2. Faça o gráfico da curva $y = e^x$ nas janelas $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0{,}5, 0{,}5]$ por $[0{,}5, 1{,}5]$ e $[-0{,}1, 0{,}1]$ por $[0{,}9, 1{,}1]$. Dando um *zoom* no ponto $(0, 1)$, o que você percebe na curva?

3. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto $(1, 3)$.
(i) usando a Definição 1 (ii) usando a Equação 2
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
(c) Faça os gráficos da parábola e da reta tangente. Como verificação, dê um *zoom* em direção ao ponto $(1, 3)$ até que parábola e a reta tangente fiquem indistinguíveis.

4. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x - x^3$ no ponto $(1, 0)$
(i) usando a Definição 1 (ii) usando a Equação 2
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
(c) Faça um gráfico da curva e da reta tangente em janelas retangulares cada vez menores centrados no ponto $(1, 0)$ até que a curva e a tangente pareçam indistinguíveis.

5–8 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

5. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$, $(3, 2)$

6. $y = 2x^3 - 5x$, $(-1{,}3)$

7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$, $(0, 0)$

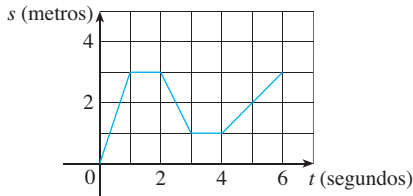
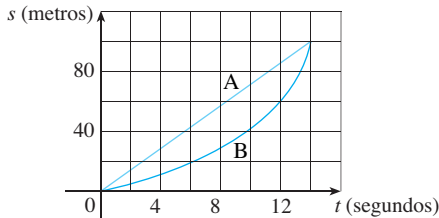
9. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto onde $x = a$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos (1 ,5) e (2, 3).
(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as retas tangentes em uma mesma tela.

10. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 1/\sqrt{x}$ no ponto onde $x = a$.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 1)$ e $(4, \frac{1}{2})$.

(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

11. (a) Uma partícula começa se movendo para a direita ao longo de uma reta horizontal; o gráfico de sua função posição está mostrado. Quando a partícula está se movendo para a direita? E para a esquerda? Quando está parada?

(b) Trace um gráfico da função velocidade.

12. Estão dados os gráficos das funções posições de dois corredores, A e B, que correm 100 metros rasos e terminam empatados.

(a) Descreva e compare como os corredores correram a prova.

(b) Em que instante a distância entre os corredores é maior?

(c) Em que instante eles têm a mesma velocidade?

13. Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

14. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1{,}86t^2$.

(a) Encontre a velocidade da pedra após um segundo.

(b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.

(c) Quando a pedra atinge a superfície?

(d) Com que velocidade da pedra atinge a superfície?

15. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = 1/t^2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

16. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$, em que t é medido em segundos.

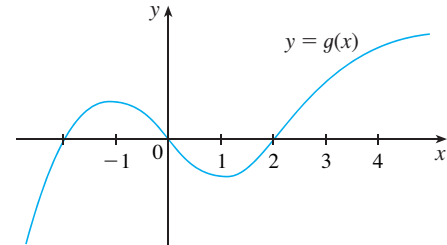
(a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo:

(i) $[3, 4]$ (ii) $[3{,}5, 4]$ (iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4{,}5]$

(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$.

(c) Faça o gráfico de s como uma função de t e desenhe as retas secantes cujas inclinações são as velocidades médias da parte (a), e a reta tangente cuja inclinação é a velocidade instantânea da parte (b).

17. Para a função g cujo gráfico é dado, arrume os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(2) \quad g'(4)$$

18. (a) Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = g(x)$, em $x = 5$ se $g(5) = -3$ e $g'(5) = 4$.

(b) Se a reta tangente a $y = f(x)$ em $(4, 3)$ passar pelo ponto $(0, 2)$, encontre $f(4)$ e $f'(4)$.

19. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$, e $f'(2) = -1$.

20. Esboce o gráfico de uma função g para a qual $g(0) = g'(0) = 0$, $g'(-1) = -1$, $g'(1) = 3$, e $g'(2) = 1$.

21. Se $f(x) = 3x^2 - 5x$, encontre $f'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à parábola $y = 3x^2 - 5x$ no ponto $(2, 2)$.

22. Se $g(x) = 1 - x^3$, encontre $g'(0)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^3$ no ponto $(0, 1)$.

23. (a) Se $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encontre $F'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 5x/(1 + x^2)$ no ponto $(2, 2)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente na mesma tela.

24. (a) Se $G(x) = 4x^2 - x^3$, encontre $G'(a)$ e use-o para encontrar equações das retas tangentes à curva $y = 4x^2 - x^3$ nos pontos $(2, 8)$ e $(3, 9)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e as retas tangentes na mesma tela.

25–30 Encontre $f'(a)$.

25. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

26. $f(t) = t^4 - 5t$

27. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

30. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

31–36 Cada limite representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga quem é f e a em cada caso.

31. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

32. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{2^x-32}{x-5}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4}\frac{\operatorname{tg} x-1}{x-\pi/4}$

35. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(\pi+h)+1}{h}$

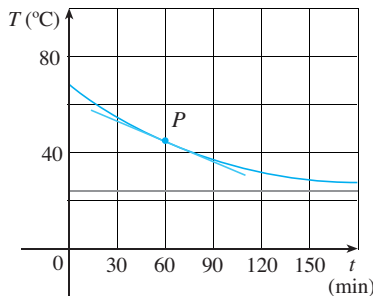
36. $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{t^4+t-2}{t-1}$

37-38. Uma partícula se move ao longo de uma reta com equação de movimento $s=f(t)$, em que s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade e a velocidade escalar quando $t=5$.

37. $f(t)=100+50t-4{,}9t^2$

38. $f(t)=t^{-1}-t$

39. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor que a taxa de variação após 1 hora?

40. Um peru assado é tirado do forno quando sua temperatura atinge 85 ºC e colocado sobre uma mesa na sala, na qual a temperatura é de 24 ºC. O gráfico mostra como decresce a temperatura do peru até aproximar da temperatura da sala. (Na Seção 3.8 poderemos usar a Lei do Resfriamento de Newton para encontrar uma equação para T como uma função do tempo.) Por meio da medida da inclinação da reta tangente, estime a taxa de variação da temperatura após 1 hora.

41. A tabela mostra a estimativa da porcentagem da população da Europa que usa telefones celulares. (Estimativas dadas para meados do ano.)

Ano	1998	1999	2000	2001	2002	2003
P	28	39	55	68	77	83

(a) Encontre a taxa média do crescimento do número de celulares
(i) de 2000 a 2002 (ii) de 2000 a 2001 (iii) de 1999 a 2000
Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2000 tomando a média de duas taxas médias da variação. Quais são suas unidades?

(c) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2000 medindo a inclinação de uma tangente.

42. O número N de franquias de uma certa cadeia popular de cafeteiras é mostrada na tabela. (Dados os números de franquias no dia 30 de junho de cada ano.)

Ano	1998	1999	2000	2001	2002
N	1 886	2 135	3 501	4 709	5 886

(a) Determine a taxa média de crescimento
(i) de 2000 a 2002 (ii) de 2000 a 2001 (iii) de 1999 a 2000
Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2000 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?

(c) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2000 medindo a inclinação de uma tangente.

43. O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x)=5\,000+10x+0{,}05x^2$.

(a) Encontre a taxa média da variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando
(i) de $x=100$ a $x=105$ (ii) de $x=100$ a $x=101$

(b) Encontre a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x=100$. (Isso é chamado *custo marginal*. Seu significado será explicado na Seção 3.7.)

44. Se um tanque cilíndrico comporta 100 000 litros de água, que podem escoar pela base do tanque em uma hora, então a Lei de Torricelli fornece o volume V de água que restou no tanque após t minutos como

$$V(t)=100\,000\left(1-\frac{t}{60}\right)^2 \qquad 0\leqslant t\leqslant 60$$

Encontre a taxa pela qual a água está escoando para fora do tanque (a taxa instantânea da variação de V em relação a t) como uma função de t. Quais são suas unidades? Para os instantes $t=0$, 10, 20, 30, 40, 50 e 60 minutos, encontre a taxa do escoamento e a quantidade de água restante no tanque. Resuma o que você achou em uma ou duas sentenças. Em que instante a taxa do escoamento é máxima? E a mínima?

45. O custo da produção de x quilogramas de ouro provenientes de uma nova mina é $C=f(x)$ dólares.

(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais são suas unidades?

(b) O que significa $f'(50)=36$?

(c) Você acha que os valores de $f'(x)$ vão crescer ou decrescer a curto prazo? E a longo prazo? Explique.

46. O número de bactéria depois de t horas em um laboratório experimental controlado é $n=f(x)$.

(a) Qual o significado da derivada de $f'(5)$? Quais são suas unidades?

(b) Suponha que haja uma quantidade ilimitada de espaço e nutrientes para a bactéria. Qual será maior: $f'(5)$ ou $f'(10)$? Se a oferta de nutrientes for limitada, isso afetaria sua conclusão? Explique.

47. Seja $T(t)$ a temperatura (em °C) em Seul t horas após o meio-dia em 21 de agosto de 2004. A tabela mostra os valores dessa função registrados de duas em duas horas. Qual o significado de $T'(6)$? Estime o seu valor.

t	0	2	4	6	8	10
T	34,4	35,6	38,3	32,8	26,1	22,8

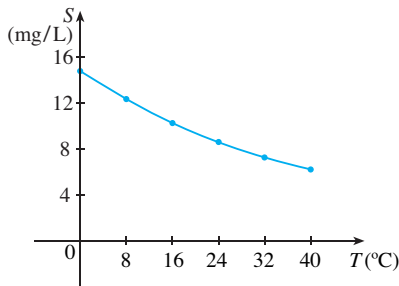
48. A quantidade (em quilogramas) de café vendida por uma companhia para uma lanchonete ao preço de p dólares por quilogramas é dada por $Q = f(p)$.

(a) Qual o significado da derivada $f'(8)$? Quais são suas unidades?

(b) $f'(8)$ é positivo ou negativo? Explique.

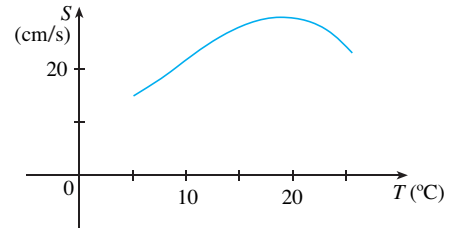
49. A quantidade de oxigênio que pode ser dissolvido em água depende da temperatura da água. (Logo, a poluição térmica influencia o nível de oxigênio da água.) O gráfico mostra como a solubilidade do oxigênio S varia em função da temperatura T da água.

(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?

(b) Dê uma estimativa do valor $S'(16)$ e interprete-o.

Adaptado de *Environmental Science: Living Within the System of Nature,* 2d ed.; por Charles E. Kupchella, © 1989. Reproduzido com a permissão de Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ.

50. O gráfico mostra a influência da temperatura T sobre a velocidade máxima de nado S do salmão Coho.

(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?

(b) Dê uma estimativa do valor $S'(15)$ e de $S'(25)$ e interprete-os.

51–52 Determine se existe ou não $f'(0)$.

51. $f(x) = \begin{cases} x \text{ sen } \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ sen } \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

PROJETO ESCRITO

MÉTODOS INICIAIS PARA ENCONTRAR AS TANGENTES

A primeira pessoa a formular explicitamente as ideias de limite e derivada foi Sir Isaac Newton, em 1660. Mas Newton reconhecia que "Se vejo mais longe do que outros homens é porque estou sobre os ombros de gigantes". Dois desses gigantes eram Pierre Fermat (1601-1665) e o professor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estava familiarizado com os métodos deles para encontrar as retas tangentes, e esses métodos desempenharam papel importante na formulação final do cálculo de Newton.

As seguintes referências contêm explicações desses métodos. Leia uma ou mais referências e escreva um relatório comparando os métodos ou de Fermat ou de Barrow com os métodos modernos. Em particular, use o método da Seção 2.7 para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 + 2x$ no ponto $(1, 3)$ e mostre como Fermat ou Barrow teriam resolvido o mesmo problema. Embora você tenha usado as derivadas e eles não, mostre a analogia entre os métodos.

1. BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. *A History of Mathematics*. Nova York: John Wiley, 1989, p. 389, 432.

2. EDWARDS, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, p. 124, 132.

3. EVES, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. 6. ed. Nova York: Saunders, 1990, p. 391, 395.

4. KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York: Oxford University Press, 1972, p. 344, 346.

2.8 A DERIVADA COMO UMA FUNÇÃO

Na seção precedente consideramos a derivada de uma função f em um número fixo a:

1 $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Aqui, mudamos nosso ponto de vista e vamos variar o número a. Se substituirmos a na Equação 1 por uma variável x, obteremos

2 $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dado qualquer número x para o qual esse limite exista, atribuímos a x o número $f'(x)$. Assim, podemos considerar f' como uma nova função, chamada **derivada de f** e definida pela Equação 2. Sabemos que o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

A função f' é denominada derivada de f, pois foi "derivada" a partir de f pela operação-limite na Equação 2. O domínio de f' é o conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ e pode ser menor que o domínio de f.

EXEMPLO 1 O gráfico de uma função f é ilustrado na Figura 1. Use-o para esboçar o gráfico da derivada f'.

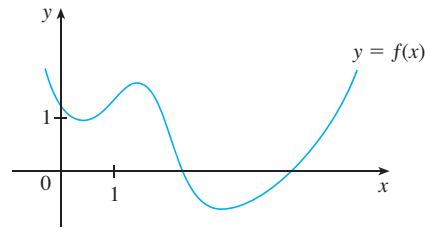
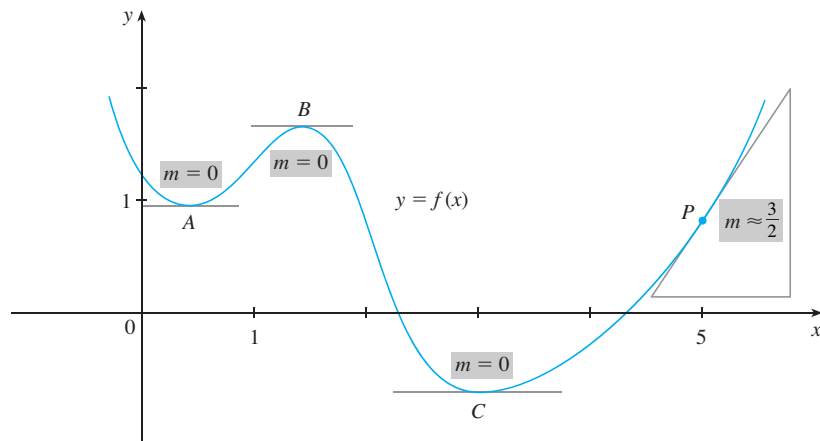
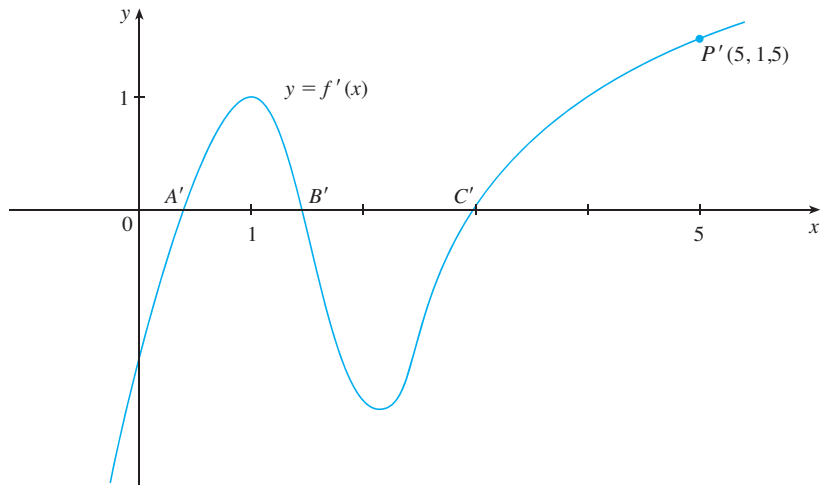



FIGURA 1

SOLUÇÃO Podemos estimar o valor da derivada para qualquer valor de x traçando a tangente no ponto $(x, f(x))$ e estimando sua inclinação. Por exemplo, para $x = 5$ traçamos a tangente em P na Figura 2(a) e estimamos sua inclinação como cerca de $\frac{3}{2}$, assim $f'(5) \approx 1{,}5$. Isso nos permite desenhar o ponto $P'(5, 1{,}5)$ sobre o gráfico de f' diretamente abaixo de P. Repetindo esse procedimento em vários pontos, obteremos o gráfico ilustrado na Figura 2(b). Observe que as tangentes em A, B e C são horizontais; logo, ali a derivada é 0 e o gráfico de f' cruza o eixo x nos pontos A', B' e C' diretamente abaixo de A, B e C. Entre A e B as tangentes têm inclinação positiva; logo, $f'(x)$ é positiva ali. Mas entre B e C as tangentes têm inclinação negativa; logo, lá $f'(x)$ é negativa.

(b)

FIGURA 2

□

EXEMPLO 2

(a) Se $f(x) = x^3 - x$, encontre uma fórmula para $f'(x)$.

(b) Ilustre, comparando os gráficos de f e f'.

SOLUÇÃO

(a) Ao usar a Equação 2 para calcular uma derivada, devemos nos lembrar de que a variável é h e de que x é considerado temporariamente uma constante para os cálculos do limite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

(b) Vamos fazer os gráficos de f e f' utilizando alguma ferramenta gráfica. O resultado está na Figura 3. Observe que $f'(x) = 0$ quando f tem tangentes horizontais e que $f'(x)$ é positivo quando as tangentes têm inclinação positiva. Assim, esses gráficos servem como verificação do trabalho feito em (a).

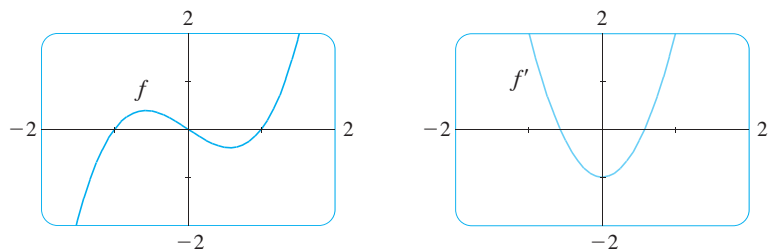



FIGURA 3

□

EXEMPLO 3 Se $f(x) = \sqrt{x}$, encontre a derivada de f. Diga qual é o domínio de f'.

SOLUÇÃO

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Aqui racionalizamos o numerador.

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

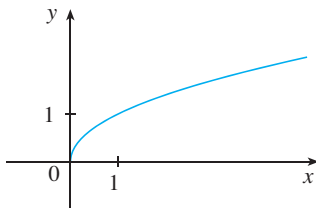
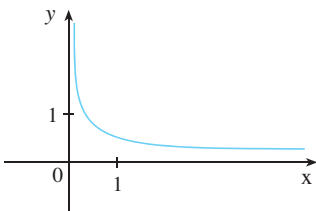
$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FIGURA 4

Vemos que $f'(x)$ existe se $x > 0$; logo, o domínio de f' é $(0, \infty)$. Ele é menor que o domínio de f, que é $[0, \infty)$. □

Vejamos se o resultado do Exemplo 3 é razoável observando os gráficos de f e f' na Figura 4. Quando x estiver próximo de 0, $\sqrt{x}$ estará próximo de 0; logo, $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$ é muito grande, e isso corresponde a retas tangentes íngremes próximas de $(0, 0)$ na Figura 4(a) e a grandes valores de $f'(x)$ logo à direita de 0 na Figura 4(b). Quando x for grande, $f'(x)$ será muito pequena, o que corresponde ao achatamento das retas tangentes no extremo direito do gráfico de f e à assíntota horizontal do gráfico de f'.

EXEMPLO 4 Encontre f' se $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

SOLUÇÃO

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{e} = \frac{ad - bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2 - x - 2h - x^2 - xh) - (2 - x + h - x^2 - xh)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{h(2+x+\mathrm{h})(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}$$ □

OUTRAS NOTAÇÕES

Se usarmos a notação tradicional $y = f(x)$ para indicar que a variável independente é x enquanto y é a variável dependente, então algumas notações alternativas para a derivada são as seguintes:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Os símbolos D e d/dx são chamados **operadores diferenciais**, pois indicam a operação de **diferenciação**, que é o processo de cálculo de uma derivada.

O símbolo dy/dx, introduzido por Leibniz, não deve ser encarado como um quociente (por ora); trata-se simplesmente de um sinônimo para $f'(x)$. Todavia, essa notação é muito útil e proveitosa, especialmente quando usada em conjunto com a notação de incremento. Podemos reescrever a definição de derivada (Equação 2.7.6) como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para indicar o valor de uma derivada dy/dx na notação de Leibniz em um número específico a, usamos a notação

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que é um sinônimo para $f'(a)$.

3 DEFINIÇÃO Uma função f é **derivável ou diferenciável em *a*** se $f'(a)$ existir. É **derivável ou diferenciável em um intervalo aberto** (a, b) [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$] se for diferenciável em cada número do intervalo.

LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em Leipzig em 1646 e estudou direito, teologia, filosofia e matemática na universidade local, graduando-se com 17 anos. Após obter seu doutorado em direito aos 20 anos, Leibniz entrou para o serviço diplomático, passando a maior parte de sua vida viajando pelas capitais europeias em missões políticas. Em particular, empenhou-se em afastar uma ameaça militar da França contra a Alemanha e tentou reconciliar as igrejas Católica e Protestante.

Leibniz só começou a estudar seriamente matemática em 1672, quando em missão diplomática em Paris. Lá ele construiu uma máquina de calcular e encontrou cientistas, como Huygens, que dirigiram sua atenção para os últimos desenvolvimentos da matemática e da ciência. Leibniz procurou desenvolver uma lógica simbólica e um sistema de notação que simplificassem o raciocínio lógico. Em particular, a versão do cálculo publicada por ele em 1684 estabeleceu a notação e as regras para encontrar as derivadas usadas até hoje.

Infelizmente, uma disputa muito acirrada de prioridades surgiu em 1690 entre os seguidores de Newton e os de Leibniz sobre quem teria inventado primeiro o cálculo. Leibniz foi até mesmo acusado de plágio pelos membros da Royal Society na Inglaterra. A verdade é que cada um inventou independentemente o cálculo. Newton chegou primeiro à sua versão do cálculo, mas, por temer controvérsias, não a publicou imediatamente. Assim, a publicação do cálculo de Leibniz em 1684 foi a primeira a aparecer.

EXEMPLO 5 Onde a função $f(x) = |x|$ é diferenciável?

SOLUÇÃO Se $x > 0$, então $|x| = x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x + h > 0$ e portanto $|x + h| = x + h$. Consequentemente, para $x > 0$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

e f é diferenciável para qualquer $x > 0$.

Analogamente, para $x < 0$ temos $|x| = -x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x + h < 0$ e, assim, $|x + h| = -(x + h)$. Portanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

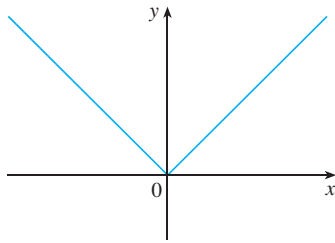
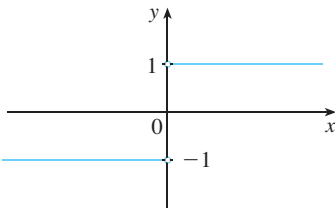
e dessa forma f é diferenciável para qualquer $x < 0$.

(a) $y = f(x) = |x|$

(b) $y = f'(x)$

FIGURA 5

Para $x = 0$ temos de averiguar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \qquad \text{(se ele existir)}$$

Vamos calcular os limites à esquerda e à direita:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

e
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Uma vez que esses limites são diferentes, $f'(0)$ não existe. Logo, f é diferenciável para todo x, exceto 0.

Uma fórmula para f' é dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e seu gráfico está ilustrado na Figura 5(b). O fato de que $f'(0)$ não existe está refletido geometricamente no fato de que a curva $y = |x|$ não tem reta tangente em $(0, 0)$. [Veja a Figura 5(a).] □

Tanto a continuidade como a diferenciabilidade são propriedades desejáveis em uma função. O seguinte teorema mostra como essas propriedades estão relacionadas.

4 **TEOREMA** Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

DEMONSTRAÇÃO Para demonstrar que f é contínua em a, temos de mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Fazemos isso mostrando que a diferença $f(x) - f(a)$ tende a 0 quando x tende a a.

A informação dada é que f é diferenciável em a, isto é,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (veja a Equação 2.7.5). Para conectar o dado com o desconhecido, dividimos e multiplicamos $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (o que pode ser feito quando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

Assim, usando a Propriedade do Produto e a Equação 2.7.5, podemos escrever

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Para usar o que acabamos de demonstrar, vamos começar com $f(x)$ e somar e subtrair $f(a)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a)\end{aligned}$$

Consequentemente, f é contínua em a. □

OBS. A recíproca do Teorema 4 é falsa, isto é, há funções que são contínuas, mas não são diferenciáveis. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em 0, pois

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Veja o Exemplo 7 na Seção 2.3). Mas no Exemplo 5 mostramos que f não é diferenciável em 0.

COMO PODE UMA FUNÇÃO NÃO SER DIFERENCIÁVEL?

Vimos que a função $y = |x|$ do Exemplo 5 não é diferenciável em 0, e a Figura 5(a) mostra que em $x = 0$ a curva muda abruptamente de direção. Em geral, se o gráfico de uma função f tiver uma "quina" ou uma "dobra", então o gráfico de f não terá tangente nesse ponto e f não será diferenciável ali. (Ao tentar calcular $f'(a)$, vamos descobrir que os limites à esquerda e à direita são diferentes.)

O Teorema 4 nos dá outra forma de uma função deixar de ter uma derivada. Ele afirma que se f for descontínua em a, então f não será diferenciável em a. Assim, em toda descontinuidade de f (por exemplo, uma descontinuidade de salto), ela deixa de ser diferenciável.

FIGURA 6

Uma terceira possibilidade surge quando a curva tem uma **reta tangente vertical** em $x = a$, isto é, f é contínua em a e

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$

Isso significa que a reta tangente fica cada vez mais íngreme quando $x \to a$. A Figura 6 mostra uma forma de isso acontecer, e a Figura 7(c), outra. A Figura 7 ilustra as três possibilidades discutidas.

(a) Uma quina (b) Uma descontinuidade (c) Uma tangente vertical

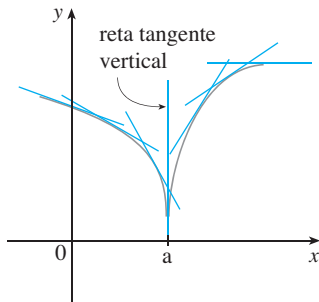
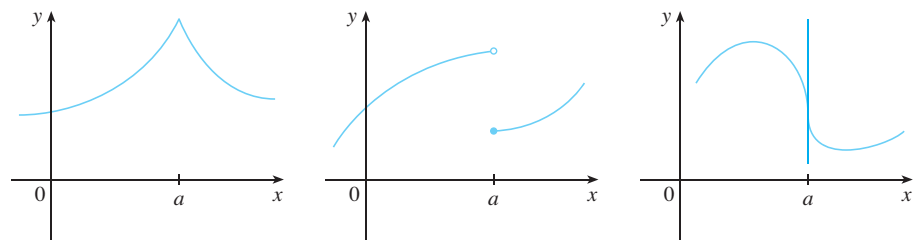



FIGURA 7
Três maneiras de f não ser diferenciável em a

As calculadoras gráficas e os computadores são outra possibilidade de análise da diferenciabilidade. Se f for diferenciável em a, então, se dermos um *zoom* em direção ao ponto $(a, f(a))$, o gráfico vai se endireitando e se parecerá cada vez mais com uma reta (veja a Figura 8. Vimos um exemplo específico na Figura 2 da Seção 2.7). Por outro lado, independentemente da maneira como dermos o *zoom* em direção a pontos como os das Figuras 6 e 7(a), não poderemos eliminar a ponta aguda ou quina (veja a Figura 9).

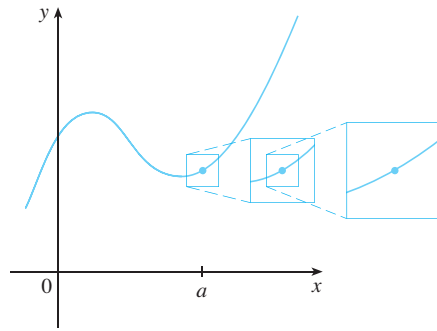



FIGURA 8
f é diferenciável em a

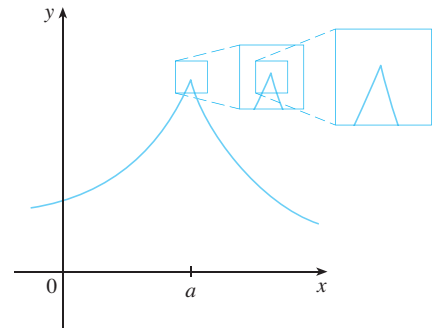



FIGURA 9
f não é diferenciável em a

DERIVADAS DE ORDEM MAIS ALTA

Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$. Esta nova função f'' é chamada de **segunda derivada** ou **derivada de ordem dois** de f. Usando a notação de Leibniz, escrevemos a segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

FIGURA 10

EXEMPLO 6 Se $f(x) = x^3 - x$, encontre e interprete $f''(x)$.

SOLUÇÃO No Exemplo 2 encontramos que a primeira derivada é $f'(x) = 3x^2 - 1$. Assim, a segunda derivada é

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$$

Os gráficos de f, f' e f'' são mostrados na Figura 10.

Podemos interpretar $f''(x)$ como a inclinação da curva $y = f'(x)$ no ponto $(x, f'(x))$. Em outras palavras, é a taxa de variação da inclinação da curva original $y = f(x)$.

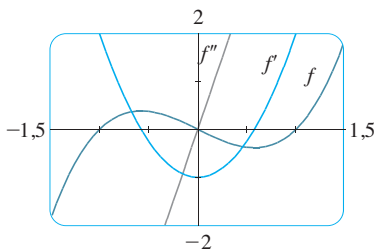
Observe pela Figura 10 que $f''(x)$ é negativa quando $y = f'(x)$ tem inclinação negativa e positiva quando $y = f'(x)$ tem inclinação positiva. Assim, os gráficos servem como verificação de nossos cálculos. □

Em geral, podemos interpretar uma segunda derivada como uma taxa de variação de uma taxa de variação. O exemplo mais familiar disso é a *aceleração*, que é definida desta maneira:

Se $s = s(t)$ for a função posição de um objeto que se move em uma reta, sabemos que sua primeira derivada representa a velocidade $v(t)$ do objeto como uma função do tempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A taxa instantânea de variação da velocidade com relação ao tempo é chamada **aceleração** $a(t)$ do objeto. Assim, a função aceleração é a derivada da função velocidade e, portanto, é a segunda derivada da função posição:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

ou, na notação de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

A **terceira derivada** (ou derivada de terceira ordem) é a derivada da segunda derivada: $f''' = (f'')'$. Assim, $f'''(x)$ pode ser interpretada como a inclinação da curva $y = f''(x)$ ou como a taxa de variação de $f''(x)$. Se $y = f(x)$, então as notações alternativas são

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

O processo pode continuar. A quarta derivada (ou derivada de quarta ordem) f'''' é usualmente denotada por $f^{(4)}$. Em geral, a n-ésima derivada de f é denotada por $f^{(n)}$ e é obtida a partir de f derivado n vezes. Se $y = f(x)$, escrevemos

$$y^{(n)} = f^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

EXEMPLO 7 Se $f(x) = x^3 - x$, encontre $f'''(x)$ e $f^{(4)}(x)$.

SOLUÇÃO No Exemplo 6 encontramos que $f''(x) = 6x$. O gráfico da segunda derivada tem equação $y = 6x$ e portanto é uma reta com inclinação 6. Como a derivada $f'''(x)$ é a inclinação de $f''(x)$, temos

$$f'''(x) = 6$$

para todos os valores de x. Assim, f''' é uma função constante e seu gráfico é uma reta horizontal. Portanto, para todos os valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$ □

Podemos interpretar fisicamente a terceira derivada no caso em que a função é a função posição $s = s(t)$ de um objeto que se move ao longo de uma reta. Como $s''' = (s'')' = a'$, a terceira derivada da função posição é a derivada da função aceleração e é chamada ***jerk***:

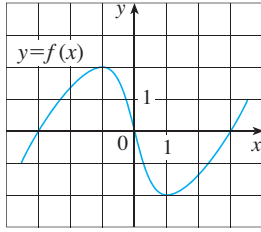
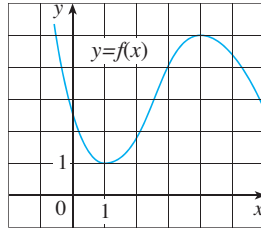
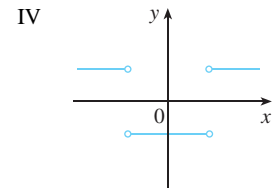
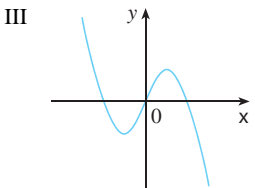
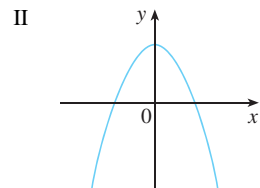
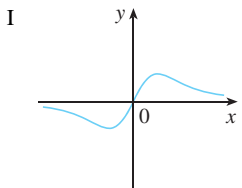
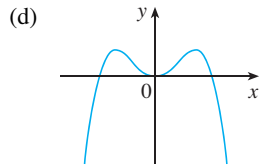
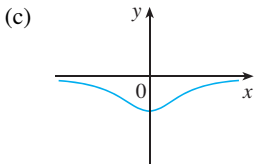
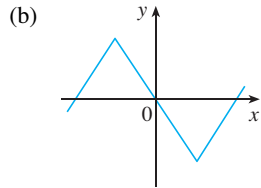
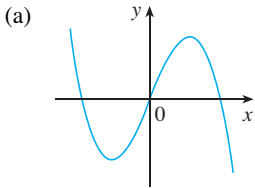
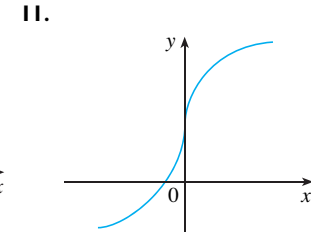
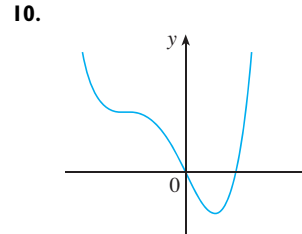
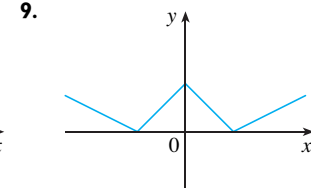
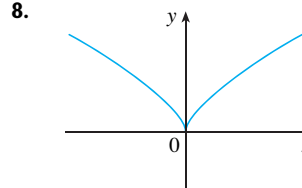
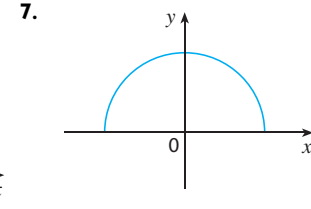
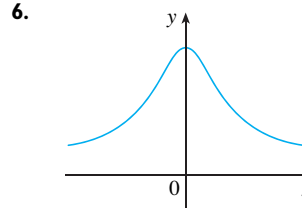
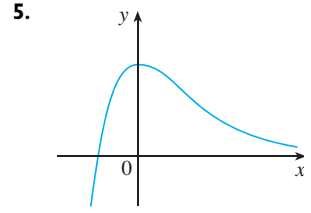
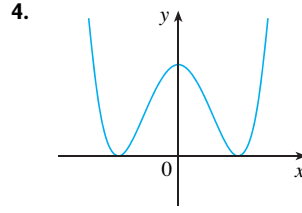
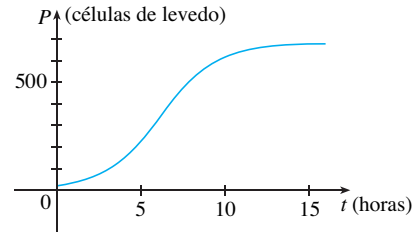
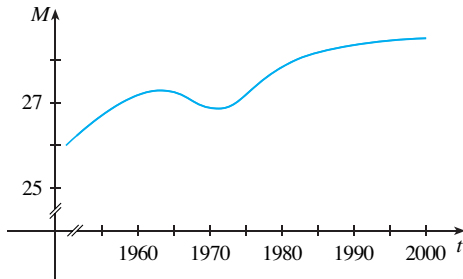
$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Assim, o *jerk* j é a taxa de variação da aceleração. O nome é adequado (*jerk*, em português, significa solavanco, sacudida), pois um *jerk* grande significa uma variação súbita na aceleração, o que causa um movimento abrupto em um veículo.

Vimos que uma aplicação da segunda e terceira derivadas ocorre na análise do movimento de objetos usando aceleração e *jerk*. Investigaremos mais uma aplicação da segunda derivada na Seção 4.3, quando mostraremos como o conhecimento de f'' nos dá informação sobre a forma do gráfico de f. No Capítulo 11, no Volume II, veremos como a segunda derivada e as derivadas de ordem mais alta nos permitem representar funções como somas de séries infinitas.

2.8 EXERCÍCIOS

1–2 Use os gráficos dados para estimar o valor de cada derivada. Esboce então o gráfico de f'.

1. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$

3. Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em I-IV. Dê razões para suas escolhas.

(a)
(b)
(c)
(d)
I
II
III
IV
4–11 Trace ou copie o gráfico da função f dada. (Suponha eixos com a mesma escala.) Use então o método do Exemplo 1 para esboçar o gráfico de f'.

4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12. O gráfico mostrado corresponde ao da função população $P(t)$ de cultura em laboratório de células de levedo. Use o método do Exemplo 1 para obter o gráfico da derivada $P'(t)$. O que o gráfico de P' nos diz sobre a população de levedos?

13. O gráfico mostra como a idade média dos homens japoneses quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX. Esboce o gráfico da função derivada $M'(t)$. Em quais os anos a derivada foi negativa?

14–16 Faça um esboço cuidadoso de f e abaixo dele esboce o gráfico de f' como foi feito nos Exercícios 4-11. Você pode sugerir uma fórmula para $f'(x)$ a partir de seu gráfico?

14. $f(x) = \text{sen}\, x$ **15.** $f(x) = e^x$

16. $f(x) = \ln x$

17. Seja $f(x) = x^2$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'\left(\frac{1}{2}\right), f'(1)$ e $f'(2)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para fazer um *zoom* no gráfico de f.

(b) Use a simetria para deduzir os valores de $f'\left(-\frac{1}{2}\right), f'(-1)$ e $f'(-2)$.

(c) Utilize os resultados de (a) e (b) para conjecturar uma fórmula para $f'(x)$.

(d) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (c) está correta.

18. Seja $f(x) = x^3$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'\left(\frac{1}{2}\right), f'(1), f'(2)$ e $f'(3)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para fazer um *zoom* no gráfico de f.

(b) Use simetria para deduzir os valores de $f'\left(-\frac{1}{2}\right), f'(-1), f'(-2)$ e $f'(-3)$.

(c) Empregue os valores de (a) e (b) para fazer o gráfico de f'.

(d) Conjecture uma fórmula para $f'(x)$.

(e) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (d) está correta.

19–29 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

19. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ **20.** $f(x) = mx + b$

21. $f(t) = 5t - 9t^2$ **22.** $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 3{,}7$

23. $f(x) = x^3 - 3x + 5$ **24.** $f(x) = x + \sqrt{x}$

25. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$ **26.** $f(x) = \dfrac{3 + x}{1 - 3x}$

27. $G(t) = \dfrac{4t}{t + 1}$ **28.** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

29. $f(x) = x^4$

30. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ começando pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$ e usando as transformações da Seção 1.3.

(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.

(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$. Quais os domínios de f e f'?

(d) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico f' e compare-o com o esboço na parte (b).

31. (a) Se $f(x) = x^4 + 2x$, encontre $f'(x)$.

(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

32. (a) Se $f(t) = t^2 - \sqrt{t}$, encontre, $f'(t)$.

(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

33. A taxa de desemprego $U(t)$ varia com o tempo. A tabela fornece a porcentagem de desempregados na força de trabalho australiana em meados de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8,1	2000	6,2
1996	8,0	2001	6,9
1997	8,2	2002	6,5
1998	7,9	2003	6,2
1999	6,7	2004	5,6

(a) Qual o significado de $U'(t)$? Quais são suas unidades?

(b) Construa a tabela de valores de $U'(t)$.

34. Seja $P(t)$ a porcentagem da população das Filipinas com idade maior que 60 anos no instante t. A tabela fornece projeções dos valores desta função de 1995 a 2020.

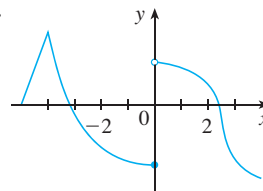
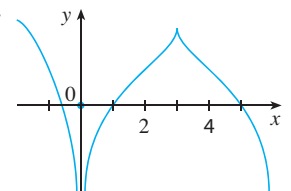
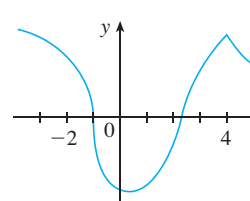
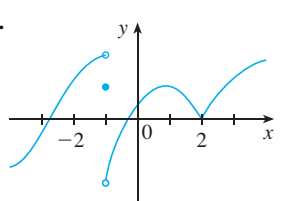
t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5,2	2010	6,7
2000	5,5	2015	7.7
2005	6.1	2020	8,9

(a) Qual o significado de $P'(t)$? Quais são suas unidades?

(b) Construa uma tabela de valores para $P'(t)$.

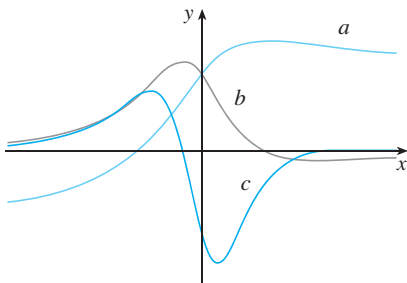
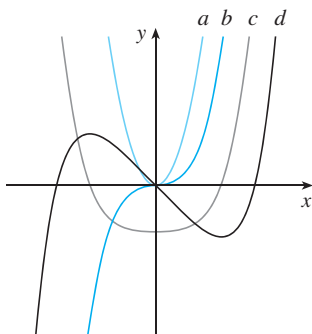
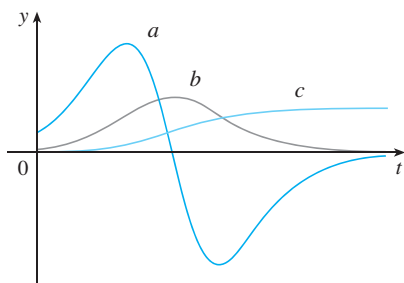
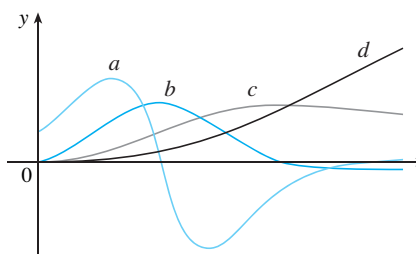
(c) Faça os gráficos de P e P'.

35-38 O gráfico de f é dado. Diga, explicando quais, os números em que f não é diferenciável.

35.

36.

37.

38.

39. Faça o gráfico da função $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Dê um *zoom* primeiro em direção ao ponto $(-1, 0)$ e então em direção à origem. Qual

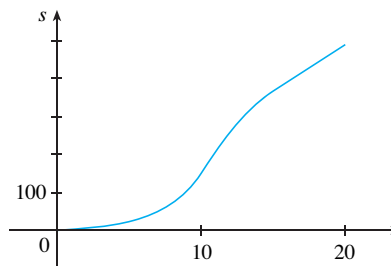
a diferença entre os comportamentos de f próximo a esses dois pontos? O que você conclui sobre a diferenciabilidade de f?

40. Dê um *zoom* em direção aos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ sobre o gráfico da função $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. O que você observa? Explique o que você viu em termos da diferenciabilidade de g.

41. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

42. A figura mostra os gráficos de f, f' f'' e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

43. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função posição de um carro, outra é a velocidade do carro e outra é sua aceleração. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

44. A figura mostra os gráficos de quatro funções. Uma é a função posição de um carro, outra é a velocidade do carro, outra é sua aceleração e outra é seu *jerk*. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

45-46 Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$ e $f''(x)$. A seguir, trace f, f' e f'' em uma mesma tela e verifique se suas respostas são razoáveis.

45. $f(x) = 1 + 4x - x^2$ **46.** $f(x) = 1/x$

47. Se $f(x) = 2x^2 - x^3$, encontre $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, e $f^{(4)}(x)$. Trace f, f', f'' e f''' em uma mesma tela. Os gráficos são consistentes com as interpretações geométricas destas derivadas?

48. (a) É mostrado o gráfico da função posição de um veículo, onde s é medido em metros e t em segundos. Use-o para traçar a velocidade e a aceleração do veículo. Qual é a aceleração em $t = 10$ segundos?

(b) Use a curva da aceleração da parte (a) para estimar o *jerk* em $t = 10$ segundos. Qual a unidade do *jerk*?

49. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Se $a \neq 0$, use a Equação 2.7.5 para encontrar $f'(a)$.
(b) Mostre que $f'(0)$ não existe.
(c) Mostre que $y = \sqrt[3]{x}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$. (Lembre-se da forma do gráfico de f. Veja a Figura 13 na Seção 1.2.)

50. (a) Se $g(x) = x^{2/3}$, mostre que $g'(0)$ não existe.
(b) Se $a \neq 0$, encontre $g'(a)$.
(c) Mostre que $y = x^{2/3}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$.
(d) Ilustre a parte (c) fazendo o gráfico de $y = x^{2/3}$.

51. Mostre que a função $f(x) = |x - 6|$ não é diferenciável em 6. Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

52. Onde a função maior inteiro não é diferenciável? Encontre uma fórmula para $f(x) = [\![x]\!]$ e esboce seu gráfico.

53. (a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x|x|$.
(b) Para quais os valores de x f é diferenciável?
(c) Encontre uma fórmula para f'.

54. A **derivada à esquerda** e **à direita** de f em a são definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

e
$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se esses limites existirem. Então $f'(a)$ existe se, e somente se, essas derivadas unilaterais existirem e forem iguais.
(a) Encontre $f'_-(4)$ e $f'_+(4)$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{se } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Esboce o gráfico de f.
(c) Onde f é descontínua?
(d) Onde f não é diferenciável?

55. Lembre-se de que uma função f é chamada *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para cada um destes x. Demonstre cada uma das afirmativas a seguir.
(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.
(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

56. Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende do tempo no qual a água está correndo.
(a) Esboce um gráfico possível de T como uma função do tempo t que decorreu desde que a torneira foi aberta.
(b) Descreva como é a taxa de variação de T em relação a t quando t está crescendo.
(c) Esboce um gráfico da derivada de T.

57. Seja ℓ a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$. O *ângulo de inclinação* de ℓ é o ângulo ϕ que ℓ faz com a direção positiva do eixo x. Calcule ϕ com a precisão de um grau.

1 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Explique o significado de cada um dos limites a seguir e ilustre com um esboço.
(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$
(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$
(d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
(e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Descreva as várias situações nas quais um limite pode não existir. Ilustre-as com uma figura.

3. Enuncie cada uma das seguintes Propriedades dos Limites.
(a) Propriedade da Soma
(b) Propriedade da Diferença
(c) Propriedade do Múltiplo Constante
(d) Propriedade do Produto
(e) Propriedade do Quociente
(f) Propriedade da Potência
(g) Propriedade da Raiz

4. O que afirma o Teorema do Confronto?

5. (a) O que significa dizer que uma reta $x = a$ é uma assíntota vertical da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.
(b) O que significa dizer que uma reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.

6. Quais das curvas a seguir têm assíntotas verticais? E horizontais?
(a) $y = x^4$
(b) $y = \text{sen}\, x$
(c) $y = \text{tg}\, x$
(d) $y = \text{tg}^{-1} x$
(e) $y = e^x$
(f) $y = \ln x$
(g) $y = 1/x$
(h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) Qual o significado de f ser contínua em a?
(b) Qual o significado de f ser contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$? Nesse caso, o que se pode dizer sobre o gráfico de f?

8. O que afirma o Teorema do Valor Intermediário?

9. Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

10. Considere um objeto movendo-se ao longo de uma reta com a posição dada por $f(t)$ no instante t. Escreva uma expressão para a velocidade instantânea do objeto em $t = a$. Como pode ser interpretada essa velocidade em termos do gráfico de f?

11. Se $y = f(x)$ e x variar de x_1 a x_2, escreva uma expressão para o seguinte:
(a) Taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$.
(b) Taxa instantânea de variação de y em relação a x em $x = x_1$.

12. Defina a derivada $f'(a)$. Discuta as duas maneiras de interpretar esse número.

13. Defina a segunda derivada de f. Se $f(t)$ for a função posição de uma partícula, como você pode interpretar a segunda derivada?

14. (a) O que significa f ser diferenciável em a?
(b) Qual a relação entre diferenciabilidade e continuidade de uma função?
(c) Esboce o gráfico de uma função que é contínua, mas não diferenciável em $a = 2$.

15. Descreva as várias situações nas quais uma função não é diferenciável. Ilustre-as com figuras.

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $\lim_{x \to 4} \left(\frac{2x}{x-4} - \frac{8}{x-4} \right) = \lim_{x \to 4} \frac{2x}{x-4} - \lim_{x \to 4} \frac{8}{x-4}$

2. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 5x - 6} = \frac{\lim_{x \to 1}(x^2 + 6x - 7)}{\lim_{x \to 1}(x^2 + 5x - 6)}$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 4} = \frac{\lim_{x \to 1}(x - 3)}{\lim_{x \to 1}(x^2 + 2x - 4)}$

4. Se $\lim_{x \to 5} f(x) = 2$ e $\lim_{x \to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to 5} [f(x)/g(x)]$ não existe.

5. Se $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to 5} [f(x)/g(x)]$ não existe.

6. Se $\lim_{x \to 6} [f(x)g(x)]$ existe, então o limite deve ser $f(6)g(6)$.

7. Se p for um polinômio, então $\lim_{x \to b} p(x) = p(b)$.

8. Se $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$, então $\lim_{x \to 0} [f(x) - g(x)] = 0$.

9. Uma função pode ter duas assíntotas horizontais distintas.

10. Se f tem domínio $[0, \infty)$ e não possui assíntota horizontal, então $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

11. Se a reta $x = 1$ for uma assíntota vertical de $y = f(x)$, então f não está definida em 1.

12. Se $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$, então existe um número c entre 1 e 3 tal que $f(c) = 0$.

13. Se f for contínua em 5 e $f(5) = 2$ e $f(4) = 3$, então $\lim_{x \to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

14. Se f for contínua em $[-1, 1]$ e $f(-1) = 4$ e $f(1) = 3$, então existe um número r tal que $|r| < 1$ e $f(r) = \pi$.

15. Seja f uma função tal que $\lim_{x \to 0} f(x) = 6$. Então existe um número δ tal que, se $0 < |x| < \delta$, então $|f(x) - 6| < 1$.

16. Se $f(x) > 1$ para todo x e $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, então $\lim_{x \to 0} f(x) > 1$.

17. Se f for contínua em a, então f é diferenciável em a.

18. Se $f'(r)$ existe, então $\lim_{x \to r} f(x) = f(r)$.

19. $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$

20. A equação $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tem uma raiz no intervalo $(0, 2)$.

EXERCÍCIOS

1. É dado o gráfico de f.

(a) Encontre cada limite, ou explique por que ele não existe.

(i) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$

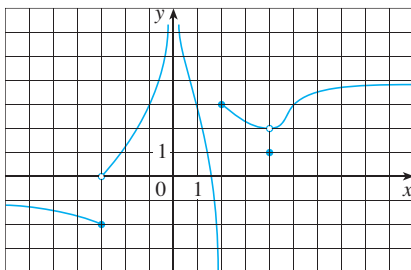
(iii) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to 4} f(x)$

(v) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

(vii) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (viii) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

(b) Dê as equações das assíntotas horizontais.

(c) Dê as equações das assíntotas verticais.

(d) Em que números f é descontínua? Explique.

2. Esboce um gráfico de um exemplo de função f que satisfaça as seguintes condições:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$,

f é contínua à direita em 3.

3–20 Encontre o limite.

3. $\lim_{x \to 1} e^{x^3 - x}$

4. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

5. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

6. $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

7. $\lim_{h \to 0} \frac{(h - 1)^3 + 1}{h}$

8. $\lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 4}{t^3 - 8}$

9. $\lim_{r \to 9} \frac{\sqrt{r}}{(r - 9)^4}$

10. $\lim_{v \to 4^+} \frac{4 - v}{|4 - v|}$

11. $\lim_{u \to 1} \frac{u^4 - 1}{u^3 + 5u^2 - 6u}$

12. $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + 6} - x}{x^3 - 3x^2}$

13. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

14. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

15. $\lim_{x \to \pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 2x^2 - x^4}{5 + x - 3x^4}$

17. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$ **18.** $\lim_{x\to\infty} e^{x-x^2}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg}^{-1}(1/x)$ **20.** $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

21–22 Use gráficos para descobrir as assíntotas das curvas. E então demonstre o que você tiver descoberto.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}$

23. Se $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0 < x < 3$, encontre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

24. Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^2\cos(1/x^2) = 0$.

25–28 Demonstre cada uma das igualdades usando a definição precisa de limite.

25. $\lim_{x\to 2}(14-5x) = 4$ **26.** $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x} = 0$

27. $\lim_{x\to 2}(x^2-3x) = -2$ **28.** $\lim_{x\to 4^+}\dfrac{2}{\sqrt{x-4}} = \infty$

29. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ 3 - x & \text{se } 0 \leqslant x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

(a) Calcule cada limite, se ele existir.

(i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(iv) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (v) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 3} f(x)$

(b) Onde f é descontínua?

(c) Esboce o gráfico de f.

30. Seja

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 - x & \text{se } 2 < x \leqslant 3 \\ x - 4 & \text{se } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(a) Para cada um dos números 2, 3 e 4, descubra se g é contínua à esquerda, à direita ou contínua no número.

(b) Esboce o gráfico de g .

31–32 Mostre que cada função é contínua em seu domínio. Diga qual é o domínio.

31. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$ **32.** $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-2}$

33–34 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação no intervalo dado.

33. $2x^3 + x^2 + 2 = 0$, $(-2, -1)$

34. $e^{-x^2} = x$, $(0, 1)$

35. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = 9 - 2x^2$ no ponto $(2, 1)$.

(b) Encontre uma equação dessa reta tangente.

36. Encontre equações da reta tangente à curva

$$y = \frac{2}{1-3x}$$

nos pontos com coordenada x 0 e -1.

37. O deslocamento (em metros) de um objeto movendo-se ao longo de uma reta é dado por $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, onde t é medido em segundos.

(a) Encontre a velocidade média nos seguintes períodos.

(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$

(iii) $[1, 1{,}5]$ (iv) $[1, 1{,}1]$

(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 1$.

38. De acordo com a Lei de Boyle, se a temperatura de um gás confinado for mantida constante, então o produto da pressão P pelo volume V é uma constante. Suponha que, para um certo gás, $PV = 4\,000$, P é medido em pascals e V é medido em litros.

(a) Encontre a taxa de variação média de P quando V aumenta de 3l para 4l.

(b) Expresse V como uma função de P e mostre que a taxa de variação instantânea de V em relação a P é inversamente proporcional ao quadrado de P.

39. (a) Use a definição de derivada para encontrar $f'(2)$, onde $f(x) = x^3 - 2x$.

(b) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 2x$ no ponto $(2, 4)$.

(c) Ilustre a parte (b) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

40. Encontre uma função f e um número a tais que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

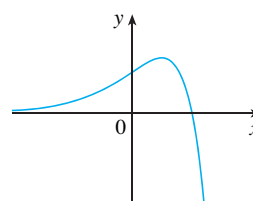
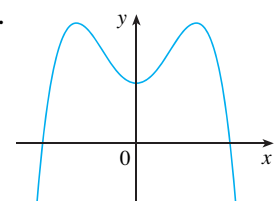
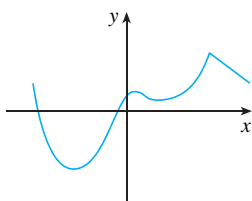
41. O custo total de saldar uma dívida a uma taxa de juros de r% ao ano é $C = f(r)$.

(a) Qual o significado da derivada $f'(r)$? Quais são suas unidades?

(b) O que significa a afirmativa $f'(10) = 1\,200$?

(c) $f'(r)$ é sempre positiva ou muda de sinal?

42–44 Trace ou copie o gráfico da função. Então, esboce o gráfico de sua derivada.

42.

43.

44.

45. (a) Se $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.

(b) Encontre os domínios de f e f'.

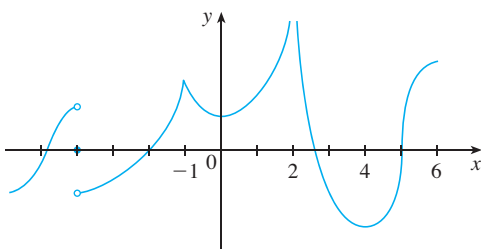
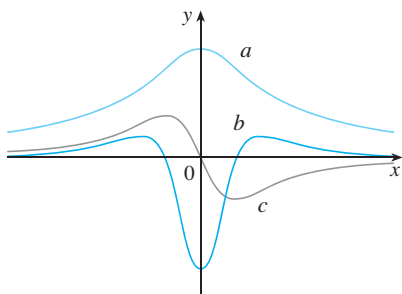
(c) Faça os gráficos na mesma tela de f e f'. Compare os gráficos para ver se sua resposta da parte (a) é razoável.

46. (a) Encontre as assíntotas do gráfico de $f(x) = \dfrac{4 - x}{3 + x}$ e use-as para esboçar o gráfico.

(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.

(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.

(d) Use uma ferramenta gráfica para fazer o gráfico de f' e compare-o com o esboço da parte (b).

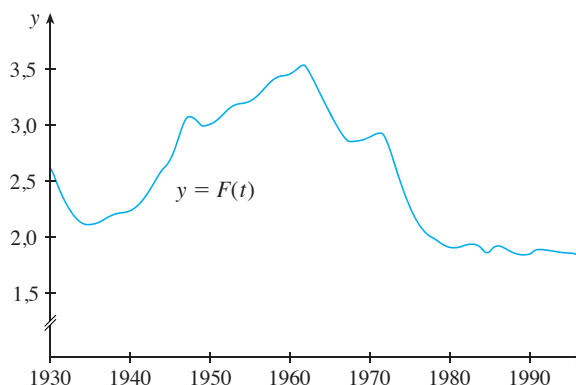
47. É dado o gráfico de f. Indique os números nos quais f não é diferenciável.

48. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

49. Seja $E(t)$ o valor do euro (a moeda europeia) em termos do dólar americano no instante t. A tabela dá valores desta função, em meados do ano, de 2000 a 2004. Interprete $E'(2002)$ e estime seu valores.

t	2000	2001	2002	2003	2004
$E(t)$	0,955	0,847	0,986	1.149	1,218

50. A *taxa de fertilidade total* no momento t, denotada por $F(t)$, é a estimativa do número médio de crianças nascidas de cada mulher (supondo que a taxa de nascimento corrente permaneça constante). O gráfico da taxa de fertilidade total da Austrália mostra as flutuações entre 1930 a 2000.

(a) Estime os valores de $F'(1946)$ e $F'(1973)$.

(b) Qual o significado dessas derivadas?

(c) Você pode sugerir as razões para os valores dessas derivadas?

51. Suponha que $|f(x)| \leqslant g(x)$ para todo x, onde $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Encontre $\lim_{x \to a} f(x)$.

52. Seja $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

(a) Para quais valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

(b) Em quais números f é descontínua?

Em uma discussão anterior consideramos a estratégia de *introduzir algo novo* na resolução de um problema (veja a página 65). No exemplo a seguir vamos mostrar como esse princípio pode ser algumas vezes proveitoso quando calculamos os limites. A ideia é mudar a variável – introduzir uma nova variável relacionada à original – de forma a tornar mais simples o problema. Mais tarde, na Seção 5.5, faremos uso mais extensivo dessa ideia geral.

Exemplo 1 Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, onde c é uma constante diferente de 0.

SOLUÇÃO Colocado dessa forma, esse limite parece desafiador. Na Seção 2.3 calculamos vários limites nos quais tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero. Lá, nossa estratégia foi realizar algum tipo de manipulação algébrica que levasse a um cancelamento simplificador, porém aqui não está claro que tipo de álgebra será necessário.

Assim, introduzimos uma nova variável t pela equação

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

Também necessitamos expressar x em termos de t, e então resolvemos esta equação:

$$t^3 = 1 + cx \qquad x = \frac{t^3 - 1}{c}$$

Observe que $x \to 0$ é equivalente a $t \to 1$. Isso nos permite converter o limite dado em outro envolvendo a variável t:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1}$$

A mudança de variável nos permitiu substituir um limite relativamente complicado por um mais simples, de um tipo já visto antes. Fatorando o denominador como uma diferença dos cubos, obtemos

$$\lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3}$$

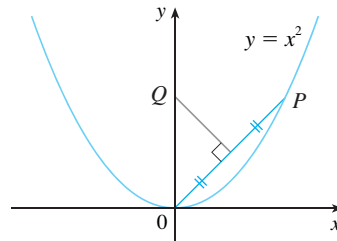
As questões a seguir destinam-se a testar e desafiar suas habilidades na resolução de problemas. Algumas delas requerem uma considerável quantidade de tempo para ser resolvidas; assim sendo, não se desencoraje se não puder resolvê-las de imediato. Se você tiver dificuldades, pode ser proveitoso rever a discussão sobre os princípios de resolução de problemas na página 65.

PROBLEMAS

1. Calcule $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Encontre números a e b tais que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

3. Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

4. A figura mostra um ponto P sobre a parábola $y = x^2$ e um ponto Q onde a perpendicular que bissecta OP e intercepta o eixo y. À medida que P tende à origem ao longo da parábola, o que acontece com Q? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.

5. Se $[\![x]\!]$ denota a função maior inteiro, encontre $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{[\![x]\!]}$.

6. Esboce a região do plano definida por cada uma das seguintes equações.

(a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ (b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ (c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ (d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encontre todos os valores de a para os quais f é contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leqslant a \\ x^2 & \text{se } x > a \end{cases}$$

8. Um **ponto fixo** de uma função f é um número c em seu domínio tal que $f(c) = c$. (A função não movimenta c; ele fica fixo.)

(a) Esboce o gráfico de uma função contínua com o domínio $[0, 1]$ cuja imagem também está em $[0, 1]$. Localize um ponto fixo de f.

(b) Tente fazer o gráfico de uma função contínua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ que *não* tenha um ponto fixo. Qual é o obstáculo?

(c) Use o Teorema do Valor Intermediário para demonstrar que toda função contínua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ deve ter um ponto fixo.

9. Se $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$, encontre $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$.

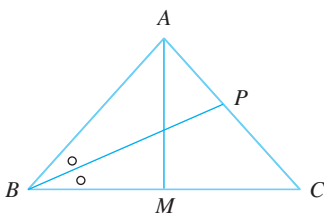



FIGURA PARA O PROBLEMA 10

10. (a) A figura mostra um triângulo isósceles ABC com $\angle B = \angle C$. A bissetriz do ângulo B intercepta o lado AC em um ponto P. Suponha que a base BC permaneça fixa, mas a altura $|AM|$ do triângulo tenda a 0, de forma que A tenda ao ponto médio M de BC. O que acontece com o ponto P durante esse processo? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.

(b) Tente esboçar a trajetória descrita por P durante esse processo. Então, encontre a equação dessa curva e use-a para esboçar a curva.

11. (a) Se começarmos da latitude 0º e procedermos na direção oeste, poderemos denotar $T(x)$ como a temperatura de um ponto x em um dado instante. Supondo que T é uma função contínua de x, mostre que a todo instante fixo existe pelo menos dois pontos diametralmente opostos sobre o Equador com exatamente a mesma temperatura.

(b) O resultado da parte (a) é verdadeiro para os pontos sobre qualquer círculo sobre a superfície da Terra?

(c) O resultado da parte (a) vale para a pressão barométrica e para a altitude?

12. Se f for uma função diferenciável e $g(x) = xf(x)$, use a definição de derivada para mostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponha que f seja uma função que satisfaça a equação

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2 y + xy^2$$

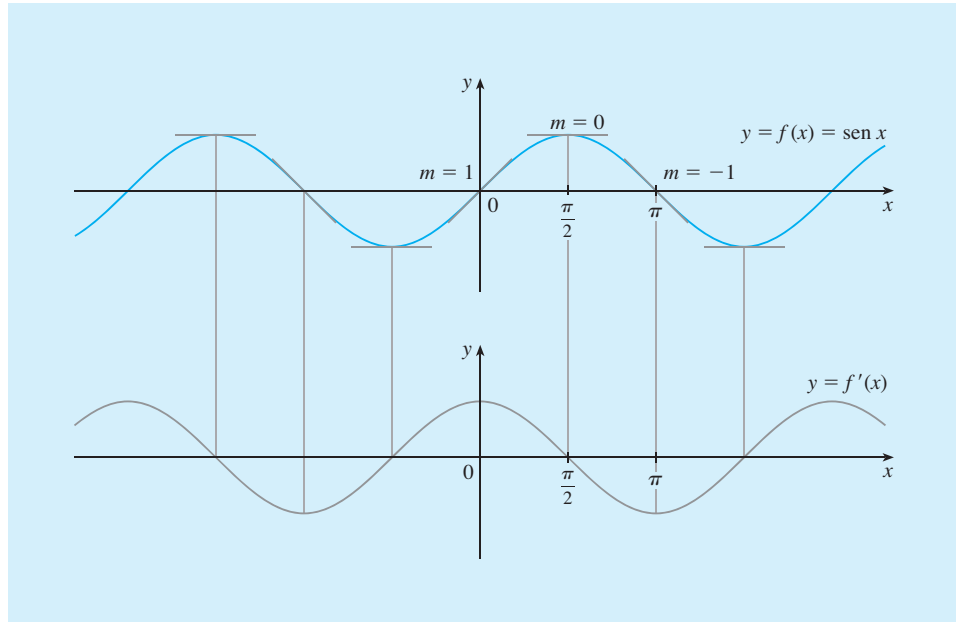
para todos os números reais x e y. Suponha também que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(a) Encontre $f(0)$. (b) Encontre $f'(0)$. (c) Encontre $f'(x)$.

14. Suponha que f seja uma função com a propriedade $|f(x)| \leq x^2$ para todo x. Mostre que $f(0) = 0$. A seguir, mostre que $f'(0) = 0$.

3

REGRAS DE DERIVAÇÃO

Medindo as inclinações nos pontos da curva da função seno, temos forte evidência visual de que a derivada da função seno é a função cosseno.

Vimos que as derivadas são interpretadas como inclinações e taxas de variação. Vimos também como estimar as derivadas de funções dadas por tabelas de valores. Aprendemos a fazer os gráficos de derivadas de funções definidas graficamente. Usamos a definição de derivada para calcular as derivadas de funções definidas por fórmulas. Mas seria tedioso se sempre usássemos a definição. Neste capítulo desenvolveremos regras para encontrar as derivadas sem usar diretamente a definição. Essas regras de derivação nos permitem calcular com relativa facilidade as derivadas de polinômios, funções racionais, funções algébricas, funções exponenciais e logarítmicas, além de funções trigonométricas e trigonométricas inversas. Em seguida, usaremos essas regras para resolver problemas envolvendo taxas de variação e aproximação de funções.

3.1 DERIVADAS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS E EXPONENCIAIS

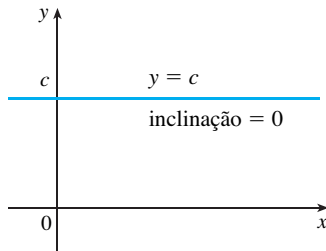



FIGURA 1
O gráfico de $f(x) = c$ é a reta $y = c$; dessa forma, $f'(x) = 0$

Nesta seção aprenderemos como derivar as funções constantes, funções potências, funções polinomiais e exponenciais.

Vamos iniciar com a função mais simples, a função constante, $f(x) = c$. O gráfico dessa função é a reta horizontal $y = c$, cuja inclinação é 0; logo, devemos ter $f'(x) = 0$ (veja a Figura 1). A demonstração formal a partir da definição de uma derivada é simples:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Essa regra, na notação de Leibniz, é escrita desta forma:

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO CONSTANTE

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

FIGURA 2
O gráfico de $f(x) = x$ é a reta $y = x$; assim, $f'(x) = 1$

FUNÇÃO POTÊNCIA

Vamos olhar a função $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro positivo. Se $n = 1$, o gráfico de $f(x) = x$ é a reta $y = x$, cuja inclinação é 1 (veja a Figura 2). Logo

1
$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

(Você também pode verificar a Equação 1 a partir da definição de derivada.) Já investigamos casos em que $n = 2$ e $n = 3$. De fato, na Seção 2.9 (Exercícios 19 e 20) determinamos que

2
$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$ achamos a derivada de $f(x) = x^4$ a seguir:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

Assim

3
$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Comparando as equações em (1), (2) e (3), vemos um modelo emergir. Parece ser uma conjectura razoável que, quando n é um número inteiro, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Resulta que isto é de fato verdade.

REGRA DA POTÊNCIA Se n for um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO A fórmula

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

pode ser verificada simplesmente multiplicando-se o lado direito (ou somando-se o segundo fator como uma série geométrica). Se $f(x) = x^n$, podemos usar a Equação 2.7.5 para $f'(a)$ e a equação anterior para escrever

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

■ O Teorema Binomial é dado no fim do livro.

SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Para achar a derivada de x^4 desenvolvemos $(x+h)^4$. Aqui precisamos desenvolver $(x+h)^n$, e usamos o Teorema Binomial para fazer isto:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]$$

$$= nx^{n-1}$$

porque todo termo, exceto o primeiro, tem h como fator e consequentemente tende a 0. □

Ilustraremos a Regra da Potência usando várias notações no Exemplo 1.

EXEMPLO 1

(a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6x^5$.

(b) Se $y = x^{1\,000}$, então $y' = 1\,000x^{999}$.

(c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$.

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$ □

O que dizer sobre as funções potências com os expoentes negativos? No Exercício 61 solicitamos que você verifique, a partir da definição de derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Podemos reescrever essa equação como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

de modo que a Regra da Potência é verdadeira quando $n = -1$. De fato, mostraremos na próxima seção [Exercício 58(c)] que ela é válida para todo inteiro negativo.

E se o expoente for uma fração? No Exemplo 3 da Seção 2.8 encontramos que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

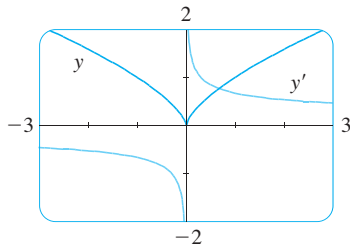
Podemos reescrever essa equação como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Isso mostra que a Regra da Potência é verdadeira quando $n = \frac{1}{2}$. Na realidade, mostraremos na Seção 3.8 que ela é verdadeira para todo número real n.

A REGRA DA POTÊNCIA (VERSÃO GERAL) Se n for um número real qualquer, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

■ A Figura 3 ilustra a função y do Exemplo 2(b) e sua derivada y'. Note que y não é diferenciável em 0 (y' não está definida lá). Observe que y' é positiva quando y cresce, e é negativa quando y decresce.

EXEMPLO 2 Derive:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUÇÃO Em cada caso reescrevemos a função como uma potência de x.

(a) Uma vez que $f(x) = x^{-2}$, usamos a Regra da Potência com $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$ □

FIGURA 3

$y = \sqrt[3]{x^2}$

A Regra da Potência nos permite encontrar retas tangentes sem ter de recorrer à definição de derivada. Ela também nos permite encontrar *retas normais*. A **reta normal** à curva C em um ponto P é a reta por este ponto que é perpendicular à reta tangente em P. (No estudo da ótica, precisamos considerar o ângulo entre um raio de luz e a reta normal à lente.)

EXEMPLO 3 Ache equações da reta tangente e da reta normal à curva $y = x\sqrt{x}$ no ponto (1, 1). Ilustre fazendo o gráfico da curva e destas retas.

SOLUÇÃO A derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ é

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

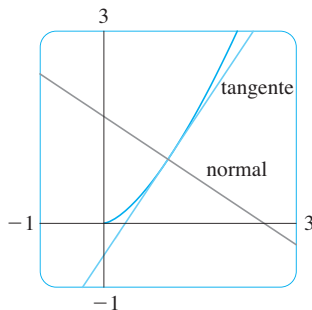
Logo, a inclinação da reta tangente em (1, 1) é $f'(1) = \frac{3}{2}$. Portanto, uma equação da reta tangente é

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

A reta normal é perpendicular à reta tangente, de modo que sua inclinação é o inverso negativo de $\frac{3}{2}$, ou seja, $-\frac{2}{3}$. Logo, uma equação para a reta normal é

$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{5}{3}$$

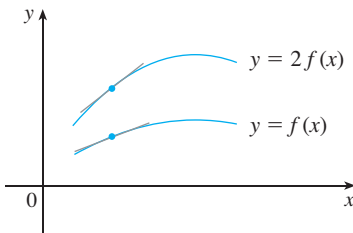
FIGURA 4

Traçamos o gráfico da curva, sua reta tangente e sua reta normal na Figura 4. □

NOVAS DERIVADAS A PARTIR DAS ANTIGAS

Quando as novas funções são formadas a partir de antigas por adição, subtração, multiplicação ou divisão, suas derivadas podem ser calculadas em termos das derivadas das antigas funções. Em particular, a fórmula a seguir nos diz que *a derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função*.

A REGRA DA MULTIPLICAÇÃO POR CONSTANTE Se c for uma constante e f uma função derivável, então

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

■ INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA REGRA DA MULTIPLICAÇÃO POR CONSTANTE

A multiplicação por $c = 2$ expande o gráfico verticalmente por um fator de 2. Todas as subidas têm de ser dobradas, mas o deslocamento horizontal continua o mesmo. Logo, as inclinações ficam dobradas também.

DEMONSTRAÇÃO Seja $g(x) = cf(x)$. Então

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$

$$= c \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(Pela Propriedade 3 dos limites)}$$

$$= cf'(x)$$

□

EXEMPLO 4

(a) $\frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

(b) $\frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\frac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$ □

A regra a seguir nos diz que *a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas de suas funções*.

■ Usando a notação linha, podemos escrever a Regra da Soma como

$$(f + g)' = f' + g'$$

A REGRA DA SOMA Se f e g forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $F(x) = f(x) + g(x)$. Então

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(Pela Propriedade 1)}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$ □

A Regra da Soma pode ser estendida para a soma de qualquer número de funções. Por exemplo, usando esse teorema duas vezes, obtemos

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Escrevendo $f - g$ como $f + (-1)g$ e aplicando a Regra da Soma e a Regra da Multiplicação por Constante, obtemos a seguinte fórmula.

REGRA DA DIFERENÇA Se f e g forem ambas deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

As três regras anteriores podem ser combinadas com a Regra da Potência para derivar qualquer polinômio, como ilustram os exemplos a seguir.

EXEMPLO 5

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$ □

EXEMPLO 6 Ache os pontos sobre a curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ onde a reta tangente é horizontal.

SOLUÇÃO As tangentes horizontais ocorrem quando a derivada for zero. Temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)$$

$$= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)$$

Assim, $dy/dx = 0$ se $x = 0$ ou $x^2 - 3 = 0$, isto é, $x = \pm\sqrt{3}$. Logo, a curva dada tem tangentes horizontais quando $x = 0$, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$. Os pontos correspondentes são $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$ e $(-\sqrt{3}, -5)$ (veja a Figura 5). □

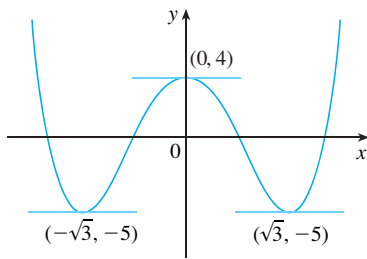



FIGURA 5

EXEMPLO 7 A equação de movimento de uma partícula é $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, onde s é medido em centímetros e t em segundos. Encontre a aceleração como uma função do tempo. Qual é a aceleração depois de 2 segundos?

SOLUÇÃO A velocidade e a aceleração são

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

A aceleração depois de 2 segundos é $a(2) = 14\text{cm/s}^2$. □

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Vamos tentar calcular a derivada da função exponencial $f(x) = a^x$ usando a definição de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

O fator a^x não depende de h, logo podemos colocá-lo adiante do limite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Observe que o limite é o valor da derivada de f em 0, isto é,

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

Portanto, mostramos que se a função exponencial $f(x) = a^x$ for diferenciável em 0, então é diferenciável em toda a parte e

4 $$f'(x) = f'(0)a^x$$

Essa equação diz que *a taxa de variação de qualquer função exponencial é proporcional à própria função*. (A inclinação é proporcional à altura.)

Uma evidência numérica para a existência de $f'(0)$ é dada na tabela para os casos $a = 2$ e $a = 3$. (Os valores são dados corretamente até a quarta casa decimal. Parece que os limites existem e que

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
0,1	0,7177	1,1612
0,01	0,6956	1,1047
0,001	0,6934	1,0992
0,0001	0,6932	1,0987

$$\text{para } a = 2, \qquad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0{,}69$$

$$\text{para } a = 3, \qquad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1{,}10$$

De fato, pode ser demonstrado que estes limites existem e, corretos até a sexta casa decimal, seus valores são

$$\left.\frac{d}{dx}(2^x)\right|_{x=0} \approx 0{,}693147 \qquad \left.\frac{d}{dx}(3^x)\right|_{x=0} \approx 1{,}098612$$

Assim, da Equação 4 temos

5 $$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1{,}10)\,3^x$$

De todas as possíveis escolhas para a base a do Exemplo 4, a fórmula de derivação mais simples ocorre quando $f'(0) = 1$. Em vista da estimativa de $f'(0)$ para $a = 2$ e $a = 3$, parece ser razoável que haja um número a entre 2 e 3 para o qual $f'(0) = 1$. É costume denotar esse valor pela letra e. (De fato, foi assim que introduzimos e na Seção 1.5.) Dessa forma, temos a seguinte definição.

■ No Exercício 1 veremos que e situa-se entre 2,7 e 2,8. Mais tarde, seremos capazes de mostrar que, correto até a quinta casa decimal,

$$e \approx 2{,}71828$$

DEFINIÇÃO DO NÚMERO e

$$e \text{ é um número tal que} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geometricamente, isso significa que, de todas as possíveis funções exponenciais $y = a^x$, a função $f(x) = e^x$ é aquela cuja reta tangente em (0, 1) tem uma inclinação $f'(0)$, que é exatamente 1 (veja as Figuras 6 e 7).

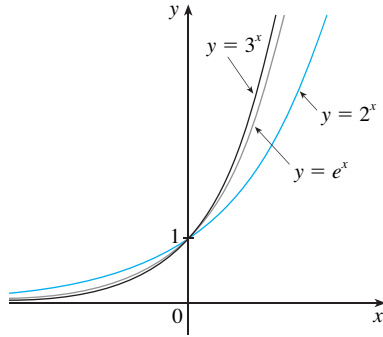



FIGURA 6

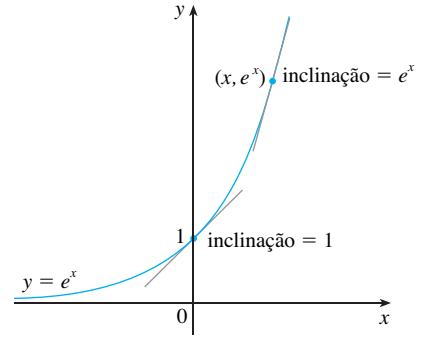



FIGURA 7

Se pusermos $a = e$ e, consequentemente, $f'(0) = 1$ na Equação 4, teremos a seguinte importante fórmula de derivação.

DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Assim, a função exponencial $f(x) = e^x$ tem como propriedade o fato de que sua derivada é ela mesma. O significado geométrico desse fato é que a inclinação da reta tangente à curva $y = e^x$ é igual à coordenada y do ponto (veja a Figura 7).

FIGURA 8

EXEMPLO 8 Se $f(x) = e^x - x$, ache f' e f''. Compare o gráfico de f e f'.

SOLUÇÃO Usando a Regra da Diferença, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

Na Seção 2.8, definimos a segunda derivada como a derivada de f', de modo que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

A Figura 8 mostra o gráfico da função f e sua derivada f'. Note que f tem uma tangente horizontal quando $x = 0$, o que corresponde ao fato de que $f'(0) = 0$. Observe também que, para $x > 0$, $f'(x)$ é positivo e f é crescente. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativo e f é decrescente. □

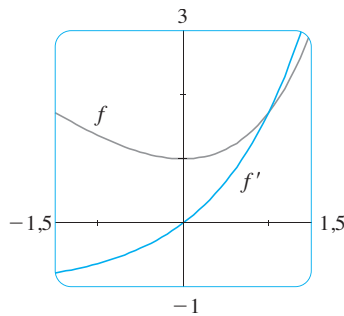
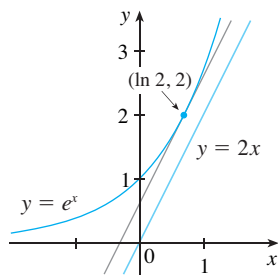



FIGURA 9

EXEMPLO 9 Em que ponto da curva $y = e^x$ sua reta tangente é paralela à reta $y = 2x$?

SOLUÇÃO Uma vez que $y = e^x$, temos $y' = e^x$. Seja a a coordenada x do ponto em questão. Então a inclinação da reta tangente naquele ponto é e^a. Essa reta tangente será paralela à reta $y = 2x$ se ela tiver a mesma inclinação, isto é, 2. Igualando as inclinações, obtemos

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Portanto, o ponto pedido é $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$ (veja a Figura 9). □

3.1 EXERCÍCIOS

1. (a) Como o número e está definido?

(b) Use uma calculadora para estimar os valores dos limites

$$\lim_{h\to 0} \frac{2{,}7^h - 1}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{2{,}8^h - 1}{h}$$

corretos até a segunda casa decimal. O que você pode concluir sobre o valor de e?

2. (a) Esboce, à mão, o gráfico da função $f(x) = e^x$, prestando particular atenção em como o gráfico cruza o eixo y. Que fato lhe permite fazer isso?

(b) Que tipos de funções são $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^e$? Compare as fórmulas de derivação para f e g.

(c) Qual das funções da parte (b) cresce mais rapidamente quando x é muito grande?

3–32 Derive a função.

3. $f(x) = 186{,}5$

4. $f(x) = \sqrt{30}$

5. $f(x) = 5x - 1$

6. $F(x) = -4x^{10}$

7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

8. $f(t) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$

9. $f(t) = \frac{1}{4}(t^4 + 8)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $y = x^{-2/5}$

12. $y = 5e^x + 3$

13. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

14. $R(t) = 5t^{-3/5}$

15. $Y(t) = 6t^{-9}$

16. $R(x) = \dfrac{\sqrt{10}}{x^7}$

17. $G(x) = \sqrt{x} - 2e^x$

18. $y = \sqrt[3]{x}$

19. $F(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^5$

20. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

21. $y = ax^2 + bx + c$

22. $y = \sqrt{x}(x - 1)$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$

25. $y = 4\pi^2$

26. $g(u) = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3u}$

27. $H(x) = (x + x^{-1})^3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33–34 Encontre uma equação para a reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \sqrt[4]{x}$, $(1, 1)$

34. $y = x^4 + 2x^2 - x$, $(1, 2)$

35–36 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto dado.

35. $y = x^4 + 2e^x$, $(0, 2)$

36. $y = (1 + 2x)^2$, $(1, 9)$

37–38 Encontre uma equação para a reta tangente à curva no ponto dado. Ilustre com o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

37. $y = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$

38. $y = x - \sqrt{x}$, $(1, 0)$

39–42 Ache $f'(x)$. Compare os gráficos de f e f' e use-os para explicar por que sua resposta é razoável.

39. $f(x) = e^x - 5x$

40. $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 50x$

41. $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$

42. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

43. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ em uma janela retangular $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.

(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço, à mão, do gráfico de f' (veja o Exemplo 1 da Seção 2.8).

(c) Calcule $f'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de f'. Compare com seu esboço da parte (b).

44. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $g(x) = e^x - 3x^2$ na janela retangular $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.

(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar a inclinação, faça um esboço, à mão, do gráfico de g' (veja o Exemplo 1 da Seção 2.8).

(c) Calcule $g'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de g'. Compare com seu esboço da parte (b).

45–46 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função.

45. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 16x$

46. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

47–48 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função. Verifique se suas respostas são razoáveis comparando os gráficos de f, f' e f''.

47. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

48. $f(x) = e^x - x^3$

49. A equação de movimento de uma partícula é $s = t^3 - 3t$, em que s está em metros e t em segundos. Encontre

(a) a velocidade e a aceleração como funções de t,

(b) a aceleração depois de 2 s e

(c) a aceleração quando a velocidade for 0.

50. A equação de movimento de uma partícula é $s = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1$, em que s está em metros e t em segundos.

(a) Encontre a velocidade e a aceleração como funções de t.

(b) Encontre a aceleração depois de 1 s.

(c) Trace o gráfico das funções posição, velocidade e aceleração na mesma tela.

51. Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ onde a tangente é horizontal.

52. Quais são os valores de x para os quais o gráfico $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$ tem tangentes horizontais?

53. Mostre que a curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ não tem reta tangente com a inclinação 4.

54. Encontre uma equação para a reta tangente à curva $y = x\sqrt{x}$ que seja paralela à reta $y = 1 + 3x$.

55. Encontre equações para ambas as retas que são tangentes à curva $y = 1 + x^3$ e que são paralelas à reta $12x - y = 1$.

56. Em qual ponto sobre a curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ a reta tangente é paralela à reta $3x - y = 5$? Ilustre fazendo o gráfico da curva e de ambas as retas.

57. Encontre uma equação para a reta normal à parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que seja paralela à reta $x - 3y = 5$.

58. Onde a reta normal à parábola $y = x - x^2$ no ponto $(1, 0)$ intercepta a parábola uma segunda vez? Ilustre com um esboço.

59. Trace um diagrama para mostrar que há duas retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passam pelo ponto $(0, -4)$. Encontre as coordenadas dos pontos onde essas retas tangentes interceptam a parábola.

60. (a) Ache as equações de ambas as retas que passam pelo ponto $(2, -3)$ e que são tangentes à parábola $y = x^2 + x$.
(b) Mostre que não existe nenhuma reta que passe pelo ponto $(2, 7)$ e que seja tangente à parábola. A seguir, desenhe um diagrama para ver por quê.

61. Use a definição de derivada para mostrar que se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$. (Isso demonstra a Regra da Potência para o caso onde $n = -1$.)

62. Encontre a n-ésima derivada de cada função calculando algumas das primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.
(a) $f(x) = x^n$ (b) $f(x) = 1/x$

63. Encontre um polinômio de segundo grau P tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

64. A equação $y'' + y' - 2y = x^2$ é chamada equação diferencial, pois envolve uma função desconhecida y e suas derivadas y' e y''. Encontre constantes A, B e C tais que a função $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaça a equação. (As equações diferenciais serão estudadas no Capítulo 9, no Volume II.)

65. Encontre uma função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico tenha tangentes horizontais nos pontos $(-2, 6)$ e $(2, 0)$.

66. Encontre uma parábola com a equação $y = ax^2 + bx + c$ que tenha inclinação 4 em $x = 1$, inclinação -8 em $x = -1$ e passe pelo ponto $(2, 15)$.

67. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

f é derivável em 1? Esboce os gráficos de f e f'.

68. Em quais números a seguinte função g é derivável?

$$g(x) = \begin{cases} -1 - 2x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Dê uma fórmula para g' e esboce os gráficos de g e g'.

69. (a) Para quais valores de x a função $f(x) = |x^2 - 9|$ é derivável? Ache uma fórmula para f'.
(b) Esboce os gráficos de f e f'.

70. Onde a função $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$ é derivável? Dê uma fórmula para h' e esboce os gráficos de h e h'.

71. Encontre a parábola com equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente em $(1, 1)$ tem equação $y = 3x - 2$.

72. Suponha que a curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha uma reta tangente com equação $y = 2x + 1$ quando $x = 0$ e uma reta tangente com equação $y = 2 - 3x$ quando $x = 1$. Encontre os valores de a, b, c e d.

73. Para quais valores de a e b a reta $2x + y = b$ é tangente à parábola $y = ax^2$ quando $x = 2$?

74. Encontre o valor de c tal que a reta $y = \frac{3}{2}x + 6$ seja tangente à curva $y = c\sqrt{x}$.

75. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Encontre os valores de m e b que tornem f derivável em toda a parte.

76. Uma reta tangente à hipérbole $xy = c$ é traçada em um ponto P.
(a) Mostre que o ponto médio do segmento de reta cortado dessa reta tangente pelos eixos coordenados é P.
(b) Mostre que o triângulo formado pela reta tangente e pelos eixos coordenados sempre têm a mesma área, não importa onde P esteja localizado sobre a hipérbole.

77. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{1\,000} - 1}{x - 1}$.

78. Trace um diagrama ilustrando duas retas perpendiculares que se interceptam sobre o eixo y, ambas tangentes à parábola $y = x^2$. Onde essas retas se interceptam?

79. Se $c > \frac{1}{2}$, quantas retas pelo ponto $(0, c)$ são normais à parábola $y = x^2$? E se $c \leqslant \frac{1}{2}$?

80. Esboce as parábolas $y = x^2$ e $y = x^2 - 2x + 2$. Você acha que existe uma reta que seja tangente a ambas as curvas? Em caso afirmativo, encontre sua equação. Em caso negativo, explique por que não.

PROJETO APLICADO

CONSTRUINDO UMA MONTANHA-RUSSA MELHOR

Suponha que lhe peçam para projetar a primeira subida e descida de uma montanha-russa. Estudando fotografias de suas montanhas-russas favoritas, você decide fazer a subida com inclinação 0,8 e a descida com inclinação $-1{,}6$. Você decide ligar estes dois trechos retos $y = L_1(x)$ e $y = L_2(x)$ com parte de uma parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, em que x e $f(x)$ são medidos em metros. Para o percurso ser liso, não pode haver variações bruscas na direção, de modo que você quer que os segmentos L_1 e L_2 sejam tangentes à parábola nos pontos de intersecção P e Q. (Veja a figura.) Para simplificar as equações, você decide colocar a origem em P.

1. (a) Suponha que a distância horizontal entre P e Q seja 30 m. Escreva equações para a, b e c que garantam que o percurso seja liso nos pontos de transição.

(b) Resolva as equações da parte (a) para a, b e c para encontrar uma fórmula para $f(x)$.

(c) Trace L_1, f e L_2 para verificar graficamente que as transições são lisas.

(d) Encontre a diferença de elevação entre P e Q.

2. A solução do Problema 1 pode parecer lisa, mas poderia não provocar a sensação de lisa, pois a função definida por partes [que consiste de $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 30$, e $L_2(x)$ para $x > 30$] não tem uma segunda derivada contínua. Assim, você decide melhorar seu projeto, usando uma função quadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ apenas no intervalo $3 \leqslant x \leqslant 27$ e conectando-a às funções lineares por meio de duas funções cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leqslant x < 3$$

$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 27 < x \leqslant 30$$

(a) Escreva um sistema de equações em 11 incógnitas que garanta que as funções e suas primeiras duas derivadas coincidam nos pontos de transição.

SCA (b) Resolva as equações da parte (a) com um sistema de computação algébrica para encontrar fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

(c) Trace L_1, g, q, h e L_2, e compare com o gráfico do Problema 1(c).

3.2 AS REGRAS DO PRODUTO E DO QUOCIENTE

As fórmulas desta seção nos permitem derivar novas funções formadas a partir das antigas funções por multiplicação ou divisão.

A REGRA DO PRODUTO

Por analogia com as Regras da Soma e da Diferença, alguém poderia tentar conjecturar, como Leibniz o fez três séculos atrás, que a derivada de um produto é o produto da derivada. Contudo, podemos ver que esta conjectura está errada examinando um exemplo particular. Seja $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Então a Regra da Potência fornece $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 2x$. Mas $(fg)(x) = x^3$, assim $(fg)'(x) = 3x^2$. Dessa forma, $(fg)' \neq f'g'$. A fórmula correta foi descoberta por Leibniz (logo depois de tentar a fórmula falsa) e é chamada Regra do Produto.

FIGURA 1
Geometria da Regra do Produto

Antes de enunciar a Regra do Produto, vamos ver como poderíamos descobri-la. No caso onde $u = f(x)$ e $v = g(x)$ são funções positivas, podemos interpretar o produto uv como uma área de um retângulo (veja a Figura 1). Se x variar uma quantidade Δx, temos que as variações correspondentes em u e v são

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

e um novo valor do produto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, pode ser interpretado como a área do retângulo maior da Figura 1 (desde que Δu e Δv sejam positivos).

A variação na área do retângulo é

1 $$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$
$$= \text{soma das três áreas sombreadas}$$

■ Lembre-se de que na notação de Leibniz a definição de derivada pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se dividirmos por Δx, obteremos

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Se fizermos $\Delta x \to 0$, obteremos a derivada de uv:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$= u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}$$

2 $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(Observe que $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, uma vez que f é derivável e, portanto, contínua.)

Embora tenhamos inicialmente suposto (para a interpretação geométrica) que todas as quantidades são positivas, vemos que a Equação 1 é sempre verdadeira. (A álgebra é válida se u, v, Δu e Δv forem positivas ou negativas.) Assim, demonstramos a Equação 2, conhecida como a Regra do Produto, para todas as funções diferenciáveis de u e v.

■ Na notação "linha":

$$(fg)' = fg' + gf'$$

A REGRA DO PRODUTO Se f e g forem diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Em outras palavras, a Regra do Produto diz que *a derivada de um produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a segunda função vezes a derivada da primeira função*.

■ A Figura 2 ilustra os gráficos da função f do Exemplo 1 e sua derivada f'. Observe que $f'(x)$ é positiva quando f está crescendo e negativa quando f está decrescendo.

FIGURA 2

EXEMPLO 1

(a) Se $f(x) = xe^x$, encontre $f'(x)$.

(b) Encontre n-ésima derivada $f^{(n)}(x)$.

SOLUÇÃO

(a) Pela Regra do Produto, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= xe^x + e^x \cdot 1 = (x + 1)e^x$$

(b) Usando a Regra do Produto uma segunda vez, obtemos

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[(x+1)e^x] = (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$= (x+1)e^x + e^x \cdot 1 = (x+2)e^x$$

Aplicações subsequentes da Regra do Produto nos dão

$$f'''(x) = (x+3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x+4)e^x$$

De fato, cada derivação sucessiva adiciona outro termo e^x, de modo que

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$ □

■ No Exemplo 2, a e b são constantes. É usual em matemática usar letras perto do início do alfabeto para representar constantes e letras perto do fim do alfabeto para representar variáveis.

EXEMPLO 2 Derive a função $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$.

SOLUÇÃO 1 Usando a Regra do Produto, temos

$$f'(t) = \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a+bt) + (a+bt)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\right)$$

$$= \sqrt{t}\cdot b + (a+bt)\cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2}$$

$$= b\sqrt{t} + \frac{a+bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a+3bt}{2\sqrt{t}}$$

SOLUÇÃO 2 Se primeiro usarmos as propriedades dos expoentes para reescrever $f(t)$, então poderemos prosseguir diretamente sem usar a Regra do Produto.

$$f(t) = a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2}$$

$$f'(t) = \tfrac{1}{2}\,at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}\,bt^{1/2}$$

que é igual à resposta dada na Solução 1. □

O Exemplo 2 mostra que algumas vezes é mais fácil simplificar um produto de funções do que usar a Regra do Produto. No Exemplo 1, entretanto, a Regra do Produto é o único método possível.

EXEMPLO 3 Se $f(x) = \sqrt{x}\,g(x)$, onde $g(4) = 2$ e $g'(4) = 3$, encontre $f'(4)$.

SOLUÇÃO Aplicando a Regra do Produto, obtemos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\,g(x)\right] = \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]$$

$$= \sqrt{x}\,g'(x) + g(x)\cdot\tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \sqrt{x}\,g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$$

Consequentemente, $$f'(4) = \sqrt{4}\,g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2\cdot 3 + \frac{2}{2\cdot 2} = 6{,}5$$ □

A REGRA DO QUOCIENTE

Vamos determinar uma fórmula para derivar o quociente de duas funções diferenciáveis $u = f(x)$ e $v = g(x)$ do mesmo modo que obtivemos a Regra do Produto. Se x, u e v têm variações Δx, Δu e Δv, respectivamente, então a correspondente variação no quociente u/v será

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

Logo,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

Quando $\Delta x \to 0$, $\Delta v \to 0$ também, pois $v = g(x)$ é derivável e, portanto, contínua. Logo, usando Propriedades dos Limites, obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

■ Na notação "linha":

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g}$$

A REGRA DO QUOCIENTE Se f e g forem deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Em palavras, a Regra do Quociente diz que *a derivada de um quociente é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador.*

A Regra do Quociente e as outras fórmulas de derivação nos permitem calcular a derivada de qualquer função racional, como ilustrado no exemplo a seguir.

■ Podemos usar uma ferramenta gráfica para verificar que a resposta para o Exemplo 4 é plausível. A Figura 3 ilustra os gráficos da função do Exemplo 4 e suas derivadas. Observe que quando y cresce rapidamente (próximo de -2), y' é muito grande. E quando y cresce vagarosamente, y' está próximo de 0.

EXEMPLO 4 Seja $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Então

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$ □

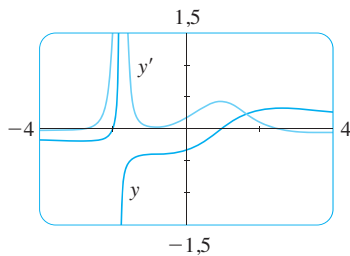
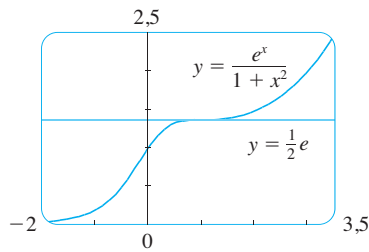



FIGURA 3

FIGURA 4

EXEMPLO 5 Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = e^x/(1 + x^2)$ no ponto $(1, \frac{1}{2}e)$.

SOLUÇÃO Segundo a Regra do Quociente, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}$$

Logo, a inclinação da reta tangente em $(1, \frac{1}{2}e)$ é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Isso significa que a reta tangente em $(1, \frac{1}{2}e)$ é horizontal, e sua equação é $y = \frac{1}{2}e$. [Veja a Figura 4. Observe que a função está crescendo e cruza sua reta tangente em $(1, \frac{1}{2}e)$.] □

OBS. Não use a Regra do Quociente *toda vez* que você vir um quociente. Algumas vezes é mais fácil reescrever um quociente primeiro, colocando-o em uma forma que seja mais simples para derivar. Por exemplo, embora seja possível derivar a função

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

usando a Regra do Quociente, é muito mais fácil efetuar primeiro a divisão e escrever a função como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

A seguir está um resumo das regras de derivação que aprendemos até agora:

TABELA DAS REGRAS DE DERIVAÇÃO

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 EXERCÍCIOS

1. Encontre a derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$ de duas maneiras: usando a Regra do Produto e fazendo primeiro a multiplicação. As respostas são iguais?

2. Encontre a derivada da função

$$F(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

de duas maneiras: usando a Regra do Quociente e simplificando antes. Mostre que suas respostas são equivalentes. Qual método você prefere?

3–26 Derive.

3. $f(x) = x^2 e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \dfrac{2t}{4 + t^2}$

9. $V(x) = (2x^3 + 3)(x^4 - 2x)$

10. $Y(u) = (u^{-2} + u^{-3})(u^5 - 2u^2)$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $R(t) = (t + e^t)(3 - \sqrt{t})$

13. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \dfrac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \dfrac{t^2}{3t^2 - 2t + 1}$

16. $y = \dfrac{t^3 + t}{t^4 - 2}$

17. $y = (r^2 - 2r)e^r$

18. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$

19. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

20. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

21. $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

22. $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

23. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

24. $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27–30 Encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

27. $f(x) = x^4e^x$

28. $f(x) = x^{5/2}e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{3 + e^x}$

31–32 Encontre uma equação da reta tangente à curva dada no ponto especificado.

31. $y = \dfrac{2x}{x + 1}$, $(1, 1)$

32. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

33–34 Encontre equações da reta tangente e da reta normal à curva dada no ponto especificado.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$, $(4, 0{,}4)$

35. (a) A curva $y = 1/(1 + x^2)$ é chamada **bruxa de Maria Agnesi**. Encontre uma equação da reta tangente para essa curva no ponto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

36. (a) A curva $y = x(1 + x^2)$ é denominada **serpentina**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(3, 0{,}3)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

37. (a) Se $f(x) = e^x/x^3$, encontre $f'(x)$.

(b) Verifique que sua resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

38. (a) Se $f(x) = x/(x^2 - 1)$, encontre $f'(x)$.

(b) Verifique que sua resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

39. (a) Se $f(x) = (x - 1)e^x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

(b) Verifique se suas respostas na parte (a) são razoáveis comparando os gráficos de f, f' e f''.

40. (a) Se $f(x) = x/(x^2 + 1)$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

(b) Verifique se suas respostas na parte (a) são razoáveis comparando os gráficos de f, f' e f''.

41. Se $f(x) = x^2/(1 + x)$, encontre $f''(1)$.

42. Se $g(x) = x/e^x$, encontre $g^{(n)}(x)$.

43. Suponha que $f(5) = 1, f'(5) = 6, g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Encontre os valores de

(a) $(fg)'(5)$ (b) $(f/g)'(5)$

(c) $(g/f)'(5)$.

44. Suponha que $f(2) = -3, g(2) = 4, f'(2) = -2$ e $g'(2) = 7$. Encontre $h'(2)$.

(a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ (b) $h(x) = f(x)g(x)$

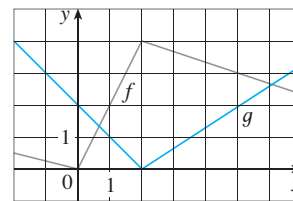
(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

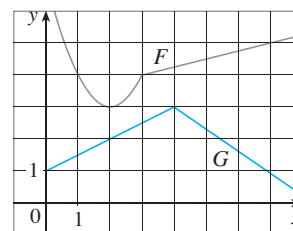
45. Se $f(x) = e^x g(x)$, onde $g(0) = 2$ e $g'(0) = 5$, encontre $f'(0)$.

46. Se $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, encontre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

47. Se f e g forem funções cujos gráficos estão ilustrados, seja $u(x) = f(x)g(x)$ e $v(x) = f(x)/g(x)$.

(a) Encontre $u'(1)$. (b) Encontre $v'(5)$.

48. Seja $P(x) = F(x)G(x)$ e $Q(x) = F(x)/G(x)$ onde F e G são as funções cujos gráficos estão representados a seguir.

(a) Encontre $P'(2)$. (b) Encontre $Q'(7)$.

49. Se g é uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções.

(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ (c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

50. Se f for uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções:

(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

51. Quantas retas tangentes à curva $y = x/(x + 1)$ passam pelo ponto $(1, 2)$? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

52. Encontre as equações de retas tangentes à curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

paralelas à reta $x - 2y = 2$.

53. Neste exercício, estimaremos a taxa segundo a qual a renda pessoal total está subindo na área metropolitana da cidade de Richmond-Petersburg, Virgínia. Em julho de 1999, a população dessa área era de 961 400, e estava crescendo aproximadamente em 9 200 pessoas por ano. O rendimento anual médio era de \$ 30 593 *per capita*, e essa média crescia em torno de \$ 1 400 por ano (bem acima da média nacional, de cerca de \$ 1 225 anuais). Use a Regra do Produto e os dados aqui fornecidos para estimar a taxa segundo a qual a renda pessoal total estava crescendo na cidade em julho de 1999. Explique o significado de cada termo na Regra do Produto.

54. Um fabricante produz peças de tecido com tamanho fixo. A quantidade q de cada peça de tecido (medida em metros) vendida é uma função do preço p (em dólares por metro); logo, podemos escrever $q = f(p)$. Então, a receita total conseguido com o preço de venda p é $R(p) = pf(p)$.
(a) O que significa dizer que $f(20) = 10\,000$ e $f'(20) = -350$?
(b) Tomando os valores da parte (a), encontre $R'(20)$ e interprete sua resposta.

55. (a) Use duas vezes a Regra do Produto para demonstrar que se f, g e h forem diferenciáveis, então $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.
(b) Fazendo $f = g = h$ na parte (a), mostre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

(c) Use a parte (b) para derivar $y = e^{3x}$.

56. (a) Se $F(x) = f(x)g(x)$, onde f e g têm derivadas de todas as ordens, mostre que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.
(b) Encontre fórmulas análogas para F''' e $F^{(4)}$.
(c) Faça uma conjectura para uma fórmula de $F^{(n)}$.

57. Encontre expressões para as primeiras cinco derivadas de $f(x) = x^2e^x$. Você percebe um padrão nestas expressões? Conjecture uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ e demonstre-a usando indução matemática.

58. (a) Se g for derivável, a **Regra do Recíproco** afirma que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Use a Regra do Quociente para demonstrar a Regra do Recíproco.
(b) Use a Regra do Recíproco para derivar a função do Exercício 18.
(c) Use a Regra do Recíproco para verificar que a Regra da Potência é válida para os inteiros negativos, isto é,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todo inteiro positivo n.

3.3 DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

■ Uma revisão das funções trigonométricas é dada no Apêndice D.

Antes de começar esta seção, talvez você precise revisar as funções trigonométricas. Em particular, é importante lembrar-se de que quando falamos sobre a função f definida para todo o número real x por

$$f(x) = \text{sen}\, x$$

deve ser entendido que sen x significa o seno do ângulo cuja medida em *radianos* é x. Uma convenção análoga é verdadeira para as outras funções trigonométricas, cos, tg, cossec, sec e cotg. Lembre-se, da Seção 2.5, de que todas as funções trigonométricas são contínuas em todo número em seus domínios.

Se esboçarmos o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\, x$ e usarmos a interpretação de $f'(x)$ como a inclinação da tangente à curva do seno a fim de esboçar o gráfico de f' (veja o Exercício 14 da Seção 2.8), isso dará a impressão de que o gráfico de f' pode ser igual à curva do cosseno (veja a Figura 1).

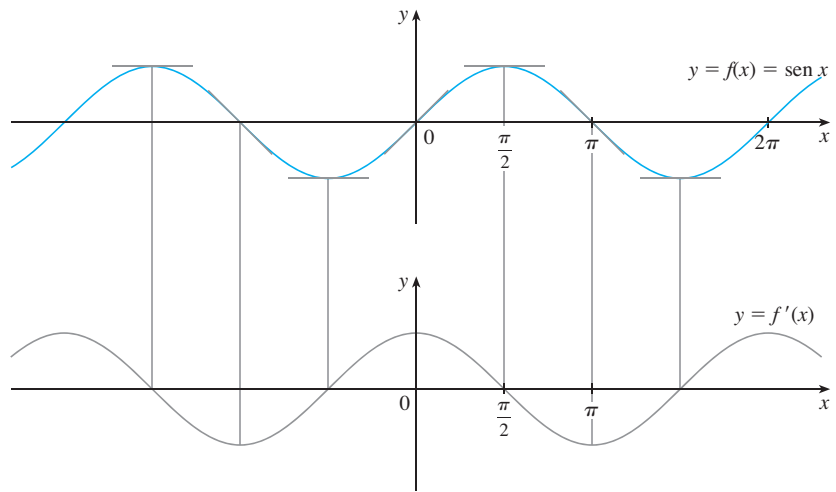



FIGURA 1

Vamos tentar confirmar nossa conjectura de que se $f(x) = \text{sen } x$, então $f'(x) = \cos x$. Da definição da derivada temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h}$$

■ Usamos a fórmula da adição para o seno. Veja o Apêndice D.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \cos x \text{ sen } h - \text{sen } x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\text{sen } x \cos h - \text{sen } x}{h} + \frac{\cos x \text{ sen } h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\text{sen } x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\text{sen } h}{h} \right) \right]$$

1
$$= \lim_{h \to 0} \text{sen } x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h}$$

Dois desses quatro limites são fáceis de calcular. Uma vez que consideramos x uma constante quando calculamos um limite quando $h \to 0$, temos

$$\lim_{h \to 0} \text{sen } x = \text{sen } x \qquad \text{e} \qquad \lim_{h \to 0} \cos x = \cos x$$

O limite de $(\text{sen } h)/h$ não é tão óbvio. No Exemplo 3 da Seção 2.2 fizemos a conjectura, com base nas evidências numérica e gráfica, de que

2
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$$

Agora, usamos um argumento geométrico para demonstrar a Equação 2. Suponha primeiro que θ está entre 0 e $\pi/2$. A Figura 2(a) mostra um setor do círculo com o centro O, ângulo central θ e o raio 1. Traçamos BC perpendicular a OA. Pela definição de medida em radiano, temos arc $AB = \theta$. Além disso, $|BC| = |OB| \text{sen } \theta = \text{sen } \theta$. Do diagrama vemos que

$$|BC| < |AB| < \text{arc } AB$$

(a)

(b)

FIGURA 2

Portanto,

$$\operatorname{sen}\theta < \theta \qquad \text{logo} \qquad \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$$

Suponha que as tangentes em A e B se interceptam em E. Você pode ver da Figura 2(b) que o comprimento de um círculo é menor que o comprimento de um polígono circunscrito; logo, arc $AB < |AE| + |EB|$. Assim

$$\begin{aligned}\theta = \text{arc } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \operatorname{tg}\theta \\ &= \operatorname{tg}\theta\end{aligned}$$

(No Apêndice F, a desigualdade $\theta \leqslant \operatorname{tg}\theta$ é demonstrada diretamente da definição do comprimento de um arco sem que se recorra à intuição geométrica, como feito aqui.)

Consequentemente, temos

$$\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

de modo que

$$\cos\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} < 1$$

Sabemos que $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ e $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$; logo, pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Mas a função $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ é uma função par; assim, seus limites à direita e à esquerda devem ser iguais. Assim, temos

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

e demonstramos a Equação 2.

Podemos deduzir o valor do limite que restou em (1) como segue

■ Multiplicamos o numerador e o denominador por $\cos\theta + 1$ para colocar a função em uma forma na qual podemos usar os limites que conhecemos.

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0} \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1} \right) = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{\theta\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1} \right) \\ &= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + 1} \\ &= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0 \qquad \text{(Pela Equação 2)}\end{aligned}$$

3

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$

Se pusermos agora os limites (2) e (3) em (1), obteremos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \text{sen } x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen } h}{h}$$
$$= (\text{sen } x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

Logo, demonstramos a fórmula para a derivada da função seno:

4 $$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x$$

■ A Figura 3 ilustra os gráficos da função do Exemplo 1 e suas derivadas. Observe que $y' = 0$ sempre que y tiver a tangente horizontal.

5
y'
y
-4
4
-5

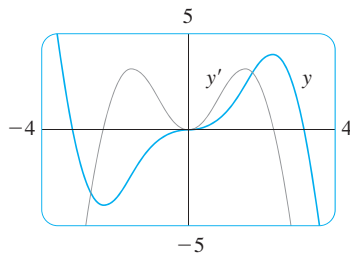



FIGURA 3

EXEMPLO 1 Derive $y = x^2 \text{ sen } x$.

SOLUÇÃO Usando a Regra do Produto e a Fórmula 4, temos

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\text{sen } x) + \text{sen } x \frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2 \cos x + 2x \text{ sen } x$$ □

Utilizando o mesmo método que na demonstração da Fórmula 4, você pode demonstrar (veja o Exercício 20) que

5 $$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x$$

A função tangente também pode ser derivada empregando a definição de derivada, mas é mais fácil usar a Regra do Quociente com as Fórmulas 4 e 5:

$$\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\text{sen } x) - \text{sen } x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen } x(-\text{sen } x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6 $$\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \sec^2 x$$

As derivadas das funções trigonométricas que restaram, cossec, sec e cotg, também podem ser encontradas facilmente usando a Regra do Quociente (veja os Exercícios 17-19). Reunimos todas as fórmulas de derivação para funções trigonométricas na tabela a seguir. Lembre-se de que elas são válidas apenas quando x estiver medido em radianos.

■ Para memorizar essa tabela mais facilmente, perceba que o sinal de menos aparece nas derivadas das funções que têm "co" no nome: cosseno, cossecante e cotangente.

DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cossec } x) = -\text{cossec } x \text{ cotg } x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \text{ tg } x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cotg } x) = -\text{cossec}^2 x$$

EXEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \text{tg } x}$. Para quais valores de x o gráfico de f tem uma tangente horizontal?

SOLUÇÃO A Regra do Quociente dá

$$f'(x) = \frac{(1 + \text{tg } x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \text{tg } x)}{(1 + \text{tg } x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \text{tg } x) \sec x \text{ tg } x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \text{tg } x)^2}$$

$$= \frac{\sec x (\text{tg } x + \text{tg}^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \text{tg } x)^2}$$

$$= \frac{\sec x (\text{tg } x - 1)}{(1 + \text{tg } x)^2}$$

Na simplificação da resposta, usamos a identidade $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Uma vez que $\sec x$ nunca é 0, vemos que $f'(x) = 0$ quando $\text{tg } x = 1$, e isso ocorre quando $x = n\pi + \pi/4$, onde n é um inteiro (veja a Figura 4). □

FIGURA 4

As tangentes horizontais no Exemplo 2

As funções trigonométricas muitas vezes são usadas em modelos de fenômenos do mundo real. Em particular, as vibrações, ondas, movimentos elásticos e outras grandezas que variem de maneira periódica podem ser descritos utilizando-se as funções trigonométricas. A seguir, analisaremos um exemplo de movimento harmônico simples.

EXEMPLO 3 Um objeto na extremidade de uma mola vertical é esticado 4 cm além de sua posição no repouso e solto no instante $t = 0$. (Veja a Figura 5 e observe que o sentido positivo é para baixo.) Sua posição no instante t é

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encontre a velocidade e a aceleração no instante t e use-as para analisar o movimento do objeto.

FIGURA 5

FIGURA 6

SOLUÇÃO A velocidade e a aceleração são

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4\,\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \operatorname{sen} t) = -4\,\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4 \cos t$$

O objeto oscila desde o ponto mais baixo ($s = 4$ cm) até o mais alto ($s = -4$ cm). O período de oscilação é 2π, que é o período do cosseno de t.

A velocidade escalar é $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, que é máxima quando $|\operatorname{sen} t| = 1$, isto é, quando $\cos t = 0$. Assim, o objeto move-se mais rapidamente quando passa por sua posição de equilíbrio ($s = 0$). Sua velocidade escalar é 0 quando $\operatorname{sen} t = 0$, isto é, no ponto mais alto e no mais baixo.

A aceleração $a = -4 \cos t = 0$ quando $s = 0$. Ela tem seu maior módulo nos pontos mais altos e mais baixos. Veja os gráficos na Figura 6. □

■ Procure por um padrão.

EXEMPLO 4 Encontre a 27ª derivada de $\cos x$.

SOLUÇÃO Algumas das primeiras derivadas de $f(x) = \cos x$ são:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen} x$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x$$

Vemos que as derivadas sucessivas ocorrem em um ciclo de comprimento 4 e, em particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ sempre que n for um múltiplo de 4. Portanto,

$$f^{(24)}(x) = \cos x$$

e, derivando mais três vezes, temos

$$f^{(27)}(x) = \operatorname{sen} x$$ □

Nosso uso principal para o limite na Equação 2 foi demonstrar a fórmula de derivação para a função seno. Mas esse limite também é útil na determinação de outros limites envolvendo trigonometria, como nos dois exemplos a seguir.

EXEMPLO 5 Encontre $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{4x}$.

SOLUÇÃO Para aplicar a Equação 2, vamos primeiro reescrever a função multiplicando e dividindo por 7:

Observe que $\operatorname{sen} 7x \neq 7 \operatorname{sen} x$.

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Se fizermos $\theta = 7x$, então $\theta \to 0$ quando $x \to 0$, de modo que, pela Equação 2, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4} \lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right) = \frac{7}{4} \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$ □

EXEMPLO 6 Calcule $\lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x$.

SOLUÇÃO Aqui, dividimos o numerador e o denominador por x:

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{\cos 0}{1} \quad \text{(pela continuidade do cosseno e pela Equação 2)}$$

$$= 1$$

□

3.3 EXERCÍCIOS

1–16 Derive.

1. $f(x) = x - 3 \operatorname{sen} x$

2. $f(x) = x \operatorname{sen} x$

3. $y = \operatorname{sen} x + 10 \operatorname{tg} x$

4. $y = 2 \operatorname{cossec} x + 5 \cos x$

5. $g(t) = t^3 \cos t$

6. $g(t) = 4 \sec t + \operatorname{tg} t$

7. $h(\theta) = \operatorname{cossec} \theta + e^{\theta} \operatorname{cotg} \theta$

8. $y = e^u(\cos u + cu)$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \operatorname{tg} x}$

10. $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

11. $f(\theta) = \dfrac{\sec \theta}{1 + \sec \theta}$

12. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\operatorname{tg} x}$

13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

14. $y = \operatorname{cossec} \theta\,(\theta + \operatorname{cotg} \theta)$

15. $f(x) = xe^x \operatorname{cossec} x$

16. $y = x^2 \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x$

17. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$.

18. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$.

19. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$.

20. Demonstre, pela definição de derivada, que se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21–24 Encontre uma equação da reta tangente à curva dada no ponto especificado.

21. $y = \sec x, \quad (\pi/3, 2)$

22. $y = e^x \cos x, \quad (0, 1)$

23. $y = x + \cos x, \quad (0, 1)$

24. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}, \quad (0, 1)$

25. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2x \operatorname{sen} x$ no ponto $(\pi/2, \pi)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

26. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \sec x - 2 \cos x$ no ponto $(\pi/3, 1)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

27. (a) Se $f(x) = \sec x - x$, encontre $f'(x)$.

(b) Verifique que sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos de f e f' para $|x| < \pi/2$.

28. (a) Se $f(x) = e^x \cos x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

(b) Verifique que sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos de f, f' e f''.

29. Se $H(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, encontre $H'(\theta)$ e $H''(\theta)$.

30. Se $f(x) = \sec x$, encontre $f''(\pi/4)$.

31. (a) Use a Regra do Quociente para derivar a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$$

(b) Simplifique a expressão para $f(x)$, escrevendo-a em termos de sen x e cos x, e, então, encontre $f'(x)$.

(c) Mostre que suas respostas para as partes (a) e (b) são equivalentes.

32. Suponha que $f(\pi/3) = 4$, e $f'(\pi/3) = -2$, e faça

$$g(x) = f(x) \operatorname{sen} x$$

e

$$h(x) = \frac{\cos x}{f(x)}$$

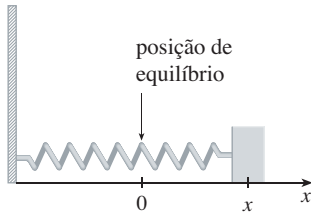
Encontre (a) $g'(\pi/3)$ e (b) $h'(\pi/3)$.

33. Que valores de x fazem com que o gráfico de $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$ tenha uma reta tangente horizontal?

34. Encontre os pontos sobre a curva $y = (\cos x)/(2 + \operatorname{sen} x)$ na qual a tangente é horizontal.

35. Um corpo em uma mola vibra horizontalmente sobre uma superfície lisa (veja a figura). Sua equação de movimento é $x(t) = 8 \operatorname{sen} t$, onde t está em segundos e x, em centímetros.

(a) Encontre a velocidade e aceleração no instante t.

(b) Encontre a posição, velocidade e aceleração do corpo no instante $t = 2\pi/3$. Em que sentido ele está se movendo nesse instante?

36. Uma faixa elástica é pendurada em um gancho e um corpo está preso na extremidade inferior da faixa. Quando o corpo é puxado para baixo e então solto, ele vibra verticalmente. A equação do movimento é $s = 2\cos t + 3\,\text{sen}\,t$, $t \geqslant 0$, onde s é medido em centímetros e t, em segundos. (Consideramos o sentido positivo como para baixo.)

(a) Encontre a velocidade e a aceleração no instante t.

(b) Faça os gráficos das funções velocidade e aceleração.

(c) Quando o corpo passa pela posição de equilíbrio pela primeira vez?

(d) A que distância da posição de equilíbrio o corpo chega?

(e) Quando a velocidade é máxima?

37. Uma escada com 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede, e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

38. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu m g}{\mu\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante chamada *coeficiente de atrito*.

(a) Encontre a taxa de variação de F em relação a θ.

(b) Quando essa taxa de variação é igual a 0?

(c) Se $m = 20$ kg, $t = 9{,}8\,\text{m/s}^2$ e $\mu = 0{,}6$, faça o gráfico de F como uma função de θ e use-o para localizar o valor de θ para o qual $dF/d\theta = 0$. Esse valor é consistente com a resposta dada na parte (b)?

39–48 Encontre o limite.

39. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\,3x}{x}$

40. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\,4x}{\text{sen}\,6x}$

41. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\text{tg}\,6t}{\text{sen}\,2t}$

42. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\text{sen}\,\theta}$

43. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\text{sen}(\cos\theta)}{\sec\theta}$

44. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\text{sen}^2\,3t}{t^2}$

45. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta + \text{tg}\,\theta}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\,(x^2)}{x}$

47. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - \text{tg}\,x}{\text{sen}\,x - \cos x}$

48. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\text{sen}\,(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

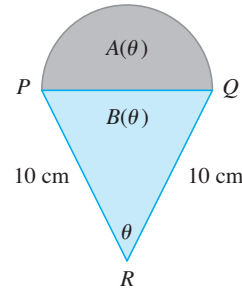
49. Derive cada identidade trigonométrica para obter uma nova identidade (ou uma familiar).

(a) $\text{tg}\,x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

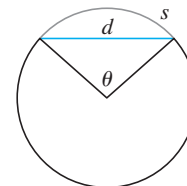
(c) $\sec x + \cos x = \dfrac{1 + \text{cotg}\,x}{\text{cossec}\,x}$

50. O semicírculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com um formato de sorvete, conforme mostra a figura. Se $A(\theta)$ for a área do semicírculo e $B(\theta)$ a área do triângulo, encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

51. A figura mostra um arco de círculo com comprimento s e uma corda com comprimento d, ambos subentendidos por um ângulo central θ. Encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}$$

3.4 REGRA DA CADEIA

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

■ Veja a Seção 1.3 para uma revisão de funções compostas.

As fórmulas de derivação que você aprendeu nas seções precedentes deste capítulo não lhe permitem calcular $F'(x)$.

Observe que F é uma função composta. De fato, se tomarmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$, então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, isto é, $F = f \circ g$. Sabemos como derivar ambas, f e g, então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de $F = f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

Resulta que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g. Esse fato é uma das mais importantes regras de derivação, chamada *Regra da Cadeia*. Ela parece plausível se interpretarmos as derivadas como taxas de variação. Considere du/dx como a taxa de variação de u em relação a x, dy/du como a taxa de variação de y em relação a u e dy/dx como a taxa de variação de y em relação a x. Se u variar duas vezes mais rápido que x e y três vezes mais rápido que u, então parece razoável que y varia seis vezes mais rápido que x, e assim esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

A REGRA DA CADEIA Se g for derivável em x e f for derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$, definida por $F(x) = f(g(x))$ será derivável em x e F' será dada pelo produto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

COMENTÁRIOS SOBRE A DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DA CADEIA Seja Δu a variação de u correspondente à variação de Δx em x, isto é:

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Então, a variação correspondente em y é

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

É tentador escrever

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \text{(1)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(Observe que $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, uma vez que g é contínua.)

$$= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

A única falha nesse raciocínio é que em (1) pode acontecer que $\Delta u = 0$ (mesmo quando $x \neq 0$) e, obviamente, não podemos dividir por 0. Não obstante, esse raciocínio pelo menos *sugere* que a Regra da Cadeia seja verdadeira. Uma demonstração completa da Regra da Cadeia será dada no fim desta seção.

A Regra da Cadeia pode ser escrita na notação linha

2 $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, na notação de Leibniz:

3 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

A Equação 3 é fácil de ser lembrada, pois se dy/du e du/dx fossem quocientes, então poderíamos cancelar du. Lembre-se, entretanto, de que du não está definida, e du/dx não deve ser interpretado como um quociente de fato.

EXEMPLO 1 Encontre $F'(x)$ se $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUÇÃO 1 (usando a Equação 2): No início desta seção expressamos F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, onde $f(u) = \sqrt{u}$ e $g(x) = x^2 + 1$. Uma vez que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 2x$$

temos

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

SOLUÇÃO 2 (usando a Equação 3): Se tomarmos $u = x^2 + 1$ e $y = \sqrt{u}$, então

$$F'(x) = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ □

Quando usarmos a Fórmula 3, deveremos ter em mente que dy/dx refere-se à derivada de y quando y é considerada uma função de x (chamada *derivada de y em relação a x*), ao passo que dy/du se refere à derivada de y quando y é considerada uma função de u (a derivada de y em relação a u). Assim, no Exemplo 1, y pode ser considerada uma função de x ($y = \sqrt{x^2 + 1}$) e também uma função de u ($y = \sqrt{u}$). Observe que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{enquanto} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

OBS. Ao usarmos a Regra da Cadeia trabalhamos de fora para dentro. A Fórmula 2 diz que *derivamos a função de fora f [na função de dentro g(x)] e então multiplicamos pela derivada da função de dentro*.

$$\frac{dy}{dx} \quad \underbrace{f}_{\text{função de fora}} \quad \underbrace{(g(x))}_{\text{calculada na função de dentro}} = \underbrace{f'}_{\text{derivada da função de fora}} \quad \underbrace{(g(x))}_{\text{calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{derivada da função de dentro}}$$

EXEMPLO 2 Derive (a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ e (b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUÇÃO

(a) Se $y = \operatorname{sen}(x^2)$, então a função de fora é a função seno, e a função de dentro é a função quadrática; logo, a Regra da Cadeia dá

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{\operatorname{sen}}_{\text{função de fora}} \underbrace{(x^2)}_{\text{calculada na função de dentro}} = \underbrace{\cos}_{\text{derivada da função de fora}} \underbrace{(x^2)}_{\text{calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{derivada da função de dentro}}$$

$$= 2x \cos(x^2)$$

(b) Observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. Aqui, a função de fora é a função quadrado, e a função de dentro é a função seno. Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \underbrace{(\operatorname{sen} x)^2}_{\text{função de dentro}} = \underbrace{2}_{\text{derivada da função de fora}} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\text{calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{derivada da função de dentro}}$$

A resposta pode ser deixada como $2 \operatorname{sen} x \cos x$ ou escrita como $\operatorname{sen} 2x$ (pela identidade trigonométrica conhecida como fórmula do ângulo duplo). □

■ Veja Página de Referências 2 ou Apêndice D.

No Exemplo 2(a) combinamos a Regra da Cadeia com a regra para derivar a função seno. Em geral, se $y = \operatorname{sen} u$, onde u é uma função derivável de x, então, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De modo análogo, todas as fórmulas para derivar funções trigonométricas podem ser combinadas com a Regra da Cadeia.

Vamos explicitar o caso especial da Regra da Cadeia, onde a função de fora f é uma função potência. Se $y = [g(x)]^n$, então podemos escrever $y = f(u) = u^n$, onde $u = g(x)$. Usando a Regra da Cadeia e em seguida a Regra da Potência, obteremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

4 **A REGRA DA POTÊNCIA COMBINADA COM A REGRA DA CADEIA** Se n for qualquer número real e $u = g(x)$ for derivável, então

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Alternativamente,

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Observe que a derivada no Exemplo 1 poderia ser calculada tomando $n = \frac{1}{2}$ na Regra 4.

EXEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUÇÃO Tomando $u = g(x) = x^3 - 1$ e $n = 100$ em (4), temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)$$
$$= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}$$ □

EXEMPLO 4 Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUÇÃO Primeiro reescreva f: $\quad f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$

Assim,

$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$$
$$= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)$$ □

EXEMPLO 5 Encontre a derivada da função

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUÇÃO Combinando a Regra da Potência, da Cadeia e do Quociente, obtemos

$$g'(t) = 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)$$

$$= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}$$ □

■ Os gráficos das funções y e y' do Exemplo 6 são mostrados na Figura 1. Observe que y' é grande quando y cresce rapidamente, e $y' = 0$ quando y tem uma tangente horizontal. Logo, nossa resposta parece ser razoável.

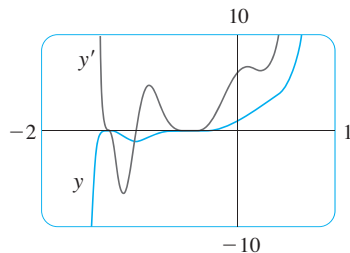



FIGURA 1

EXEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUÇÃO Neste exemplo devemos usar a Regra do Produto antes de usar a Regra da Cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^5\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)^5$$

$$= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$

$$+ (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)$$

$$= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2$$

Observando que cada termo tem o fator comum $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, podemos fatorá-lo e escrever a resposta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$ □

EXEMPLO 7 Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUÇÃO Aqui a função de dentro é $g(x) = \operatorname{sen} x$, e a função de fora é a função exponencial $f(x) = e^x$.

■ De forma geral, a Regra da Cadeia fornece

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

Logo, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$ □

Podemos usar a Regra da Cadeia para derivar uma função exponencial com qualquer base $a > 0$. Lembre-se, da Seção 1.6, de que $a = e^{\ln a}$. Logo

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

e a Regra da Cadeia dá

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x$$
$$= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

porque ln a é uma constante. Portanto, temos a fórmula

■ Não confunda a Fórmula 5 (onde x é o *expoente*) com a Regra da Potência (onde x é a *base*):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

5
$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Em particular, se $a = 2$, obtemos

6
$$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

Na Seção 3.1 demos a estimativa

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x$$

Ela é consistente com a fórmula exata (6), pois $\ln 2 \approx 0{,}693147$.

A razão para o nome "Regra da Cadeia" fica evidente se fizermos uma cadeia maior adicionando mais um elo. Suponha que $y = f(u)$, $u = g(x)$ e $x = h(t)$, onde f, g e h são funções deriváveis. Então, para calcular a derivada de y em relação a t, usamos duas vezes a Regra da Cadeia

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

EXEMPLO 8 Se $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{tg} x))$, então

$$f'(x) = \cos(\cos(\operatorname{tg} x))\frac{d}{dx}\cos(\operatorname{tg} x)$$

$$= \cos(\cos(\operatorname{tg} x))[-\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)]\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x)$$
$$= -\cos(\cos(\operatorname{tg} x))\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)\sec^2 x$$

Observe que usamos duas vezes a Regra da Cadeia. □

EXEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUÇÃO A função de fora é uma exponencial, a do meio é uma função secante, e a função de dentro é a multiplicação por três. Assim, temos

$$\frac{dy}{d\theta} = e^{\sec 3\theta} \frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta)$$

$$= e^{\sec 3\theta} \sec 3\theta \operatorname{tg} 3\theta \frac{d}{d\theta}(3\theta)$$

$$= 3e^{\sec 3\theta} \sec 3\theta \operatorname{tg} 3\theta$$ □

COMO DEMONSTRAR A REGRA DA CADEIA

Lembre-se de que se $y = f(x)$ e x variar de a a $a + \Delta x$, definimos o incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

De acordo com a definição de derivada, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Dessa forma, se denotarmos por ε a diferença entre o quociente de diferenças e a derivada, obteremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

Mas $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\, \Delta x$$

Se definirmos ε como 0 quando $\Delta x = 0$, então ε se torna uma função contínua de Δx. Assim, para uma função diferenciável f, podemos escrever

7 $$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\, \Delta x \qquad \text{onde} \qquad \varepsilon \to 0 \text{ quando } \Delta x \to 0$$

e ε é uma função contínua de Δx. Essa propriedade de funções diferenciáveis é que nos possibilita demonstrar a Regra da Cadeia.

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DA CADEIA Suponha que $u = g(x)$ é diferenciável em a e $y = f(u)$ é diferenciável em $b = g(a)$. Se Δx for um incremento em x e Δu e Δy forem os incrementos correspondentes em u e y, então poderemos usar a Equação 7 para escrever

8 $$\Delta u = g'(a)\, \Delta x + \varepsilon_1\, \Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\Delta x$$

onde $\varepsilon_1 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Da mesma forma

9 $$\Delta y = f'(b)\, \Delta u + \varepsilon_2\, \Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\Delta u$$

onde $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta u \to 0$. Se substituirmos agora a expressão para Δu da Equação 8 na Equação 9, obteremos

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2]\, [g'(a) + \varepsilon_1]\Delta x$$

logo $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2]\, [g'(a) + \varepsilon_1]$$

Quando $\Delta x \to 0$, a Equação 8 mostra que $\Delta u \to 0$. Assim, $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Isso demonstra a Regra da Cadeia. □

3.4 EXERCÍCIOS

1–6 Escreva a função composta na forma $f(g(x))$. [Identifique a função de dentro $u = g(x)$ e a de fora $y = f(u)$.] Então, encontre a derivada dy/dx.

1. $y = \text{sen}\, 4x$

2. $y = \sqrt{4 + 3x}$

3. $y = (1 - x^2)^{10}$

4. $y = \text{tg}(\text{sen}\, x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$

6. $y = \text{sen}(e^x)$

7–46 Encontre a derivada da função.

7. $F(x) = (x^3 + 4x)^7$

8. $F(x) = (x^2 - x + 1)^3$

9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$

10. $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$

11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$

12. $f(t) = \sqrt[3]{1 + \text{tg}\, t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$

16. $y = 3\cot(n\theta)$

17. $g(x) = (1 + 4x)^5(3 + x - x^2)^8$

18. $h(t) = (t^4 - 1)^3(t^3 + 1)^4$

19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$

20. $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$

22. $y = e^{-5x}\cos 3x$

23. $y = e^{x \cos x}$

24. $y = 10^{1 - x^2}$

25. $F(z) = \sqrt{\dfrac{z - 1}{z + 1}}$

26. $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

28. $y = \dfrac{e^{2u}}{e^u + e^{-u}}$

29. $y = \text{tg}(\cos x)$

30. $G(y) = \left(\dfrac{y^2}{y + 1}\right)^5$

31. $y = 2^{\text{sen}\, \pi x}$

32. $y = \text{tg}^2(3\theta)$

33. $y = \sec^2 x + \text{tg}^2 x$

34. $y = x\, \text{sen}\, \dfrac{1}{x}$

35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$

36. $F(z) = \sqrt{\dfrac{t}{t^2 + 4}}$

37. $y = \text{cotg}^2(\text{sen}\, \theta)$

38. $y = e^{k\, \text{tg} \sqrt{x}}$

39. $f(t) = \text{tg}(e^t) + e^{\text{tg}\, t}$

40. $y = \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}\, x))$

41. $f(t) = \text{sen}^2(e^{\text{sen}^2 t})$

42. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$

44. $y = 2^{3^{x^2}}$

45. $y = \cos\sqrt{\text{sen}(\text{tg}\, \pi x)}$

46. $y = [x + (x + \text{sen}^2 x)^3]^4$

47–50 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função.

47. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

48. $y = xe^{cx}$

49. $y = e^{\alpha x}\, \text{sen}\, \beta x$

50. $y = e^{e^x}$

51–54 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

51. $y = \dfrac{8}{\sqrt{4 + 3x}}$, $(4, 2)$

52. $y = \text{sen}\, x + \cos 2x$, $(\pi/6, 1)$

53. $y = \text{sen}(\text{sen}\, x)$, $(\pi, 0)$

54. $y = x^2 e^{-x}$, $(1, 1/e)$

55. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ no ponto $(0, 1)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

56. (a) A curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ é chamada *curva ponta de bala*. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 1)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

57. (a) Se $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encontre $f'(x)$.

(b) Verifique se sua resposta em (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

58. A função $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\, 2x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, aparece em aplicações a síntese de modulação de frequência (FM).

(a) Use uma calculadora gráfica para esboçar um gráfico da f e use esse gráfico para dar um esboço, mesmo que grosseiro, do gráfico de f'.

(b) Calcule $f'(x)$ e, utilizando uma calculadora gráfica, use a expressão de f' para obter seu gráfico. Compare com o obtido no item (a).

59. Encontre todos os pontos sobre o gráfico da função $f(x) = 2\, \text{sen}\, x + \text{sen}^2 x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

60. Encontre as coordenadas x de todos os pontos sobre a curva $y = \text{sen } 2x - 2 \text{ sen } x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

61. Se $F(x) = f(g(x))$, onde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, e $g'(5) = 6$, encontre $F'(5)$.

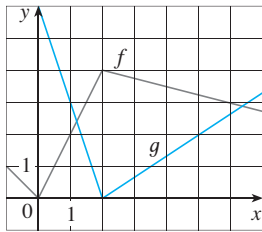
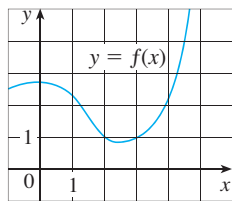
62. Se $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, onde $f(1) = 7$ e $f'(1) = 4$, encontre $h'(1)$.

63. É dada uma tabela de valores para f, g, f' e g'.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

(a) Se $h(x) = f(g(x))$, encontre $h'(1)$.
(b) Se $H(x) = g(f(x))$, encontre $H'(1)$.

64. Sejam f e g as funções do Exercício 63.
(a) Se $F(x) = f(f(x))$, encontre $F'(2)$.
(b) Se $G(x) = g(g(x))$, encontre $G'(3)$.

65. Se f e g forem as funções cujos gráficos estão mostrados, seja $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ e $w(x) = g(g(x))$. Encontre cada derivada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.
(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$

66. Se f for a função cujo gráfico está mostrado, seja $h(x) = f(f(x))$ e $g(x) = f(x^2)$. Use o gráfico de f para estimar o valor de cada uma das derivadas.
(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$

67. Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$. Seja $F(x) = f(e^x)$ e $G(x) = e^{f(x)}$. Encontre as expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

68. Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$ e seja α um número real. Seja $F(x) = f(x^\alpha)$ e $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encontre as expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

69. Seja $r(x) = f(g(h(x)))$ onde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$. Encontre $r'(1)$.

70. Se g for uma função duas vezes derivável e $f(x) = xg(x^2)$, encontre f'' em termos de g, g' e g''.

71. Se $F(x) = f(3f(4f(x)))$, onde $f(0) = 0$ e $f'(0) = 2$, encontre $F'(0)$.

72. Se $F(x) = f(xf(xf(x)))$, onde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$, encontre $F'(1)$.

73. Mostre que a função $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ satisfaz a equação diferencial $y'' + 2y' + y = 0$.

74. Para quais valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação $y'' + 5y' - 6y = 0$?

75. Encontre a 50ª derivada de $y = \cos 2x$.

76. Encontre a 1 000ª derivada de $f(x) = xe^{-x}$.

77. O deslocamento de uma partícula em uma corda vibrante é dado pela equação

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4} \text{ sen } (10\pi t)$$

onde s é medido em centímetros e t, em segundos. Encontre a velocidade da partícula após t segundos.

78. Se a equação de movimento de uma partícula for dada por $s = A \cos(\omega t + \delta)$, dizemos que a partícula está em *movimento harmônico simples*.
(a) Encontre a velocidade da partícula no instante t.
(b) Quando a velocidade é zero?

79. A Cefeu é uma constelação cujo brilho é variável. A estrela mais visível dessa constelação é a Delta Cefeu, para a qual o intervalo de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias. O brilho médio dessa estrela é de 4,0, com uma variação de $\pm 0{,}35$. Em vista desses dados, o brilho de Delta Cefeu no instante t, onde t é medido em dias, foi modelado pela função

$$B(t) = 4{,}0 + 0{,}35 \text{ sen}\left(\frac{2\pi t}{5{,}4}\right)$$

(a) Encontre a taxa de variação do brilho após t dias.
(b) Encontre, correta até duas casas decimais, a taxa de crescimento após 1 dia.

80. No Exemplo 4 da Seção 1.3 chegamos a um modelo para a duração da luz do dia (em horas) em Ancara, Turquia, no t-ésimo dia do ano:

$$L(t) = 12 + 2{,}8 \text{ sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Use esse modelo para comparar como o número de horas de luz do dia aumenta em Ancara em 21 de março e em 21 de maio.

81. O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito ou a uma força de amortecimento (tal como o amortecedor em um carro) é frequentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno ou cosseno. Suponha que a equação de movimento de um ponto nessa mola seja

$$s(t) = 2e^{-1{,}5t} \text{ sen } 2\pi t$$

onde s é medida em centímetros e t, em segundos. Encontre a velocidade após t segundos e faça o gráfico das funções posição e velocidade para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

82. Sob certas circunstâncias, um boato se propaga de acordo com a equação

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

onde $p(t)$ é a proporção da população que já ouviu o boato no instante t, e a e k são constantes positivas [na Seção 9.4 veremos que esta é uma equação razoável para $p(t)$].

(a) Encontre $\lim_{t\to\infty} p(t)$.

(b) Encontre a taxa de propagação do boato.

(c) Faça o gráfico de p para o caso $a = 10$, $k = 0{,}5$, onde t é medido em horas. Use o gráfico para estimar quanto tempo será necessário para o boato atingir 80% da população.

83. Uma partícula se move ao longo de uma reta com deslocamento $s(t)$, velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$. Mostre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique a diferença entre os significados das derivadas dv/dt e dv/ds.

84. Ar está sendo bombeado para dentro de um balão climático esférico. Em qualquer instante t, o volume do balão é $V(t)$ e seu raio é $r(t)$.

(a) O que as derivadas dV/dr e dV/dt representam?

(b) Expresse dV/dt em termos de dr/dt.

85. O *flash* de uma câmera armazena carga em um capacitor e a dispara instantaneamente quando ativado. Os dados a seguir descrevem a carga remanescente no capacitor (medida em microcoulombs, μC) no instante t (medido em segundos).

t	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
Q	100,00	81,87	67,03	54,88	44,93	36,76

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar um modelo exponencial para a carga (veja a Seção 1.5).

(b) A derivada $Q'(t)$ representa a corrente elétrica (medida em microampères, μA) que flui do capacitor para a lâmpada do *flash*. Use a parte (a) para estimar a corrente quando $t = 0{,}04$ s. Compare com o resultado do Exemplo 2 na Seção 2.1.

86. A tabela fornece a população do México (em milhões) em anos de censo no século XX.

Ano	População	Ano	População
1900	13,6	1960	34,9
1910	15,2	1970	48,2
1920	14,3	1980	66,8
1930	16,6	1990	81,2
1940	19,7	2000	97,5
1950	25,8		

(a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para ajustar uma função exponencial com os dados. Faça um gráfico dos pontos dados e do modelo exponencial. Quão bom é o ajuste?

(b) Estime as taxas de crescimento populacional em 1950 e 1960 fazendo a média de inclinações de retas secantes.

(c) Use sua exponencial da parte (a) para encontrar um modelo para as taxas de crescimento da população do México no século XX.

(d) Use seu modelo na parte (c) para estimar as taxas de crescimento em 1950 e 1960. Compare com sua estimativa da parte (b).

SCA **87.** Os SCA têm comandos que derivam funções, mas a forma da resposta pode não ser conveniente e, portanto, comandos posteriores podem ser necessários para simplificar a resposta.

(a) Use um SCA para encontrar a derivada do Exemplo 5 e compare com a resposta dele. A seguir, use o comando simplificar e compare novamente.

(b) Use um SCA para derivar a função do Exemplo 6. O que acontecerá se você usar o comando simplificar? O que acontecerá se você usar o comando fatorar? Qual forma da resposta é melhor para localizar as tangentes horizontais?

SCA **88.** (a) Use um SCA para derivar a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

e para simplificar o resultado.

(b) Onde o gráfico de f tem tangentes horizontais?

(c) Faça na mesma tela os gráficos de f e f'. Os gráficos são consistentes com sua resposta da parte (b)?

89. Use a Regra da Cadeia para demonstrar o que segue.

(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.

(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

90. Use a Regra da Cadeia e a Regra do Produto para dar uma demonstração alternativa da Regra do Quociente.
[*Sugestão*: Escreva $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

91. (a) Se n for um inteiro positivo, demonstre que

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^n x \cos nx) = n\,\text{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

(b) Encontre uma fórmula para a derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que seja similar àquela da parte (a).

92. Suponha que $y = f(x)$ seja uma curva que está sempre acima do eixo x e que não tenha uma tangente horizontal, em que f é derivável em toda a parte. Para quais valores de y a taxa de variação de y^5 em relação a x é 80 vezes a taxa de variação de y em relação a x?

93. Use a Regra da Cadeia para mostrar que, se θ for medido em graus, então

$$\frac{d}{d\theta}(\text{sen}\,\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Isso dá uma razão para a convenção de que a medida em radianos é sempre usada quando tratamos o cálculo de funções trigonométricas: as fórmulas de derivação não são simples se usarmos a medida em graus.)

94. (a) Escreva $|x| = \sqrt{x^2}$ e use a Regra da Cadeia para mostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

(b) Se $f(x) = |\text{sen}\, x|$, encontre $f'(x)$ e esboce os gráficos de f e f'. Onde f não é derivável?

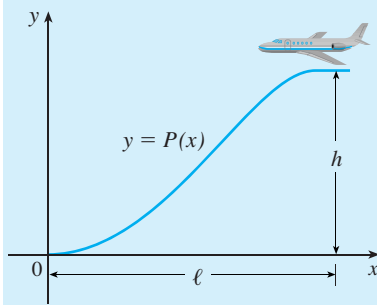
(c) Se $g(x) = \text{sen}\,|x|$, encontre $g'(x)$ e esboce os gráficos de g e g'. Onde g não é derivável?

95. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g são funções duas vezes deriváveis, mostre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

96. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g possuem três derivadas, encontre uma fórmula para d^3y/dx^3 análoga à dada no Exercício 95.

PROJETO APLICADO

ONDE UM PILOTO DEVERIA INICIAR A DESCIDA?

Um caminho de aproximação para uma aeronave pousando é mostrado na figura ao lado e ele satisfaz as seguintes condições:

(i) A altitude de cruzeiro é h quando a descida começa a uma distância horizontal ℓ do ponto de contato na origem.

(ii) O piloto deve manter uma velocidade horizontal constante v em toda a descida.

(iii) O valor absoluto da aceleração vertical não deve exceder uma constante k (que é muito menor que a aceleração da gravidade).

y
y = P(x)
h
0
ℓ
x

1. Encontre um polinômio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaça a condição (i) impondo condições adequadas a $P(x)$ e $P'(x)$ no início da descida e no ponto de contato.

2. Use as condições (ii) e (iii) para mostrar que

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leqslant k$$

3. Suponha que uma companhia aérea decida não permitir que a aceleração vertical do avião exceda $k = 1\,385$ km/h^2. Se a altitude de cruzeiro do avião for 11 000 m e a velocidade for 480 km/h, a que distância do aeroporto o piloto deveria começar a descer?

4. Trace o caminho de aproximação se as condições dadas no Problema 3 forem satisfeitas.

3.5 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

As funções encontradas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra; por exemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{ou} \qquad y = x \,\text{sen}\, x$$

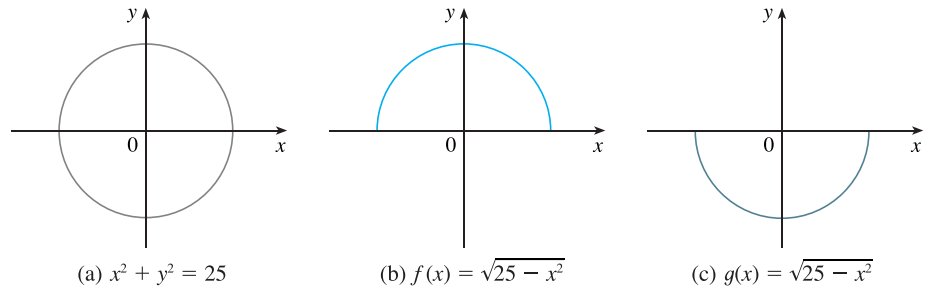
ou, em geral, $y = f(x)$. Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tal como

1 $$x^2 + y^2 = 25$$

ou

2 $$x^3 + y^3 = 6xy$$

Em alguns casos é possível resolver tais equações isolando y como uma função explícita (ou várias funções) de x. Por exemplo, se resolvermos a Equação 1 isolando y, obteremos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, logo, duas das funções determinadas pela Equação implícita 1 são $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Os gráficos de f e g são os semicírculos superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 25$ (veja a Figura 1).

FIGURA 1 (a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$

Não é fácil resolver a Equação 2 e escrever y explicitamente como uma função de x à mão. (Para um sistema de computação algébrica não há problema, mas as expressões obtidas são muito complicadas.) Não obstante, (2) é a equação da curva chamada **fólio de Descartes**, mostrada na Figura 2, e implicitamente define y como várias funções de x. Os gráficos de três dessas funções estão representados na Figura 3. Quando dizemos que f é uma função definida implicitamente pela Equação 2, isso significa que a equação

$$x^3 + [f(x)^3] = 6x\,f(x)$$

é verdadeira para todos os valores de x no domínio de f.

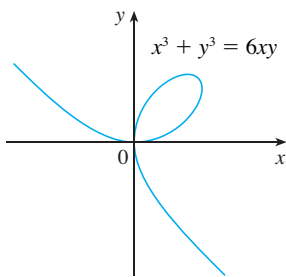



FIGURA 2 O fólio de Descartes

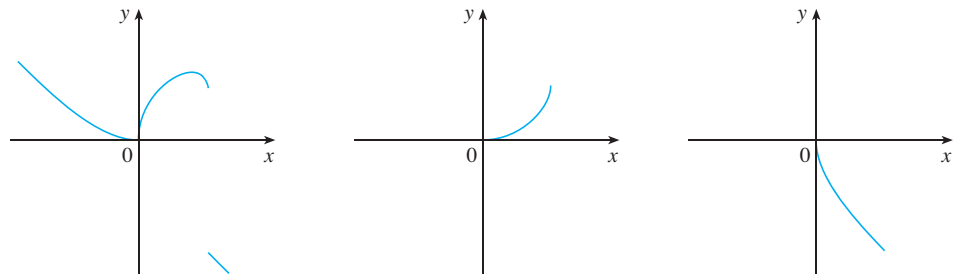



FIGURA 3 Gráficos de três funções definidas pelo fólio de Descartes

Felizmente não precisamos resolver uma equação e escrever y em termos de x para encontrar a derivada de y. Em vez disso, podemos usar o método da **derivação implícita**, que consiste em derivar ambos os lados da equação em relação a x e então isolar y' na equação resultante. Nos exemplos e exercícios desta seção suponha sempre que a equação dada determine y implicitamente como uma função derivável de x de forma que o método da derivação implícita possa ser aplicado.

EXEMPLO 1

(a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, 4)$.

SOLUÇÃO 1

(a) Derive ambos os lados da equação $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Lembrando que y é uma função de x e usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Assim,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Agora, isole dy/dx nesta equação:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) No ponto $(3, 4)$ temos $x = 3$ e $y = 4$; logo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Uma equação da reta tangente ao círculo em $(3, 4)$ é, portanto:

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad 3x + 4y = 25$$

■ O Exemplo 1 ilustra que, mesmo quando é possível resolver uma equação explicitamente e escrever y em termos de x, pode ser mais fácil usar a derivação implícita.

SOLUÇÃO 2

(b) Resolvendo a equação $x^2 + y^2 = 25$, obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. O ponto $(3, 4)$ está sobre o semicírculo superior $y = \sqrt{25 - x^2}$, e assim vamos considerar a função $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Derivando f, usando a Regra da Cadeia, temos

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{dy}{dx}(25 - x^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Logo $$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

e, como na Solução 1, uma equação da reta tangente é $3x + 4y = 25$. □

OBS. 1 A expressão $dy/dx = -x/y$ na Solução 1 dá a derivada em termos de x e y. Isso está correto independentemente de qual função y fique determinada pela equação dada. Por exemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

enquanto para $y = g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

EXEMPLO 2

(a) Encontre y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

(b) Encontre a reta tangente ao fólio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ no ponto $(3, 3)$.

(c) Em quais pontos do primeiro quadrante a reta tangente é horizontal?

SOLUÇÃO

(a) Derivando ambos os lados de $x^3 + y^3 = 6xy$ em relação a x, considerando y como uma função de x e usando a Regra da Cadeia no termo y^3 e a Regra do Produto no termo $6xy$, obtemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

FIGURA 4

FIGURA 5

ou $$x^2 + y^2 y' = 2xy' + 2y$$

Agora vamos isolar y':

$$y^2 y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

(b) Quando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

e uma olhada na Figura 4 confirma que este é um valor razoável para a inclinação em (3, 3). Logo, uma equação da tangente ao fólio em (3, 3) é

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad x + y = 6$$

(c) A reta tangente é horizontal se $y' = 0$. Usando a expressão de y da parte (a) vemos que $y' = 0$ quando $2y - x^2 = 0$ (desde que $y^2 - 2x \neq 0$). Substituindo $y = \frac{1}{2}x^2$ na equação da curva, obtemos

$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

que se simplifica para $x^6 = 16x^3$. Como $x \neq 0$ no primeiro quadrante, temos $x^3 = 16$. Se $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, então $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Assim, a tangente é horizontal em $(2^{4/3}, 2^{5/3})$, que é aproximadamente (2,5198, 3,1748). Olhando a Figura 5 vemos que nossa resposta é razoável. □

■ O matemático norueguês Niels Abel demonstrou em 1824 que não existe uma fórmula geral para as raízes de uma equação de quinto grau em termos de radicais. Mais tarde, o matemático francês Evariste Galois demonstrou que é impossível encontrar uma fórmula geral para as raízes de uma equação de n-ésimo grau (em termos de operações algébricas sobre os coeficientes) se n for qualquer inteiro maior que 4.

OBS. 2 Há uma fórmula para as três raízes de uma equação cúbica que é semelhante à fórmula quadrática, mas muito mais complicada. Se usarmos essa fórmula (ou um SCA) para resolver a equação $x^3 + y^3 = 6xy$ para y em termos de x, vamos obter as três funções determinadas pela equação:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

e

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

(Essas são as três funções cujos gráficos estão na Figura 3). Você pode ver que o método da derivação implícita poupa uma enorme quantidade de trabalho em casos como este. Além disso, a derivação implícita funciona de forma igualmente fácil em equações como

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

para as quais é *impossível* encontrar uma expressão similar para y em termos de x.

EXEMPLO 3 Encontre y' se $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUÇÃO Derivando implicitamente em relação a x e lembrando que y é uma função de x, obtemos

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2yy')$$

(Observe que usamos a Regra da Cadeia no lado esquerdo e as Regras da Cadeia e do Produto no lado direito.) Juntando os termos que envolvem y' obtemos

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

FIGURA 6

Portanto,

$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

A Figura 6, feita com o comando *implicit-plotting* de um SCA, mostra parte da curva $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$. Como uma verificação de nossos cálculos, observe que $y' = -1$ quando $x = y = 0$, e no gráfico parece que a inclinação é de aproximadamente -1 na origem. □

O exemplo seguinte ilustra como descobrir a segunda derivada de uma função implicitamente definida.

EXEMPLO 4 Encontre y'' se $x^4 + y^4 = 16$.

SOLUÇÃO Derivando a equação implicitamente em relação a x, obtemos

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

■ A Figura 7 mostra o gráfico da curva $x^4 + y^4 = 16$ do Exemplo 4. Observe que ele é uma versão esticada e achatada do círculo $x^2 + y^2 = 4$. Por esta razão, ele é às vezes chamado de círculo gordo (no inglês, *fat circle*). Ele começa muito íngreme à esquerda, mas rapidamente se torna muito achatado. Isto pode ser visto a partir da expressão

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

Isolando y' obtemos

3 $$y' = -\frac{x^3}{y^3}$$

Para encontrar y'' derivamos esta expressão, usando a Regra do Quociente e lembrando que y é uma função de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3(d/dx)(x^3) - x^3(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$

$$= \frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Se agora substituirmos a Equação 3 nesta expressão, obtemos

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

FIGURA 7

Mas os valores de x e y devem satisfazer a equação original $x^4 + y^4 = 16$. Assim, a resposta se simplifica para

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\frac{x^2}{y^7}$$ □

DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

As funções trigonométricas inversas foram revisadas na Seção 1.6. Discutimos suas continuidades na Seção 2.5 e suas assíntotas na Seção 2.6. Aqui, a derivação implícita será usada para determinar as derivadas das funções trigonométricas inversas, supondo que essas funções sejam deriváveis [de fato, qualquer que seja a função f derivável e injetora, pode ser demonstrado que sua função inversa, f^{-1}, é também derivável, exceto onde suas tangentes são verticais. Isso é plausível, pois o gráfico de uma função derivável não possui bicos ou dobras e se o refletimos em torno de $y = x$, o gráfico de sua função inversa também não terá bicos ou dobras].

Lembre-se de que a função inversa da função seno foi definida por:

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{significa que} \quad \operatorname{sen} y = x \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Derivando $\operatorname{sen} y = x$ implicitamente em relação a x obtemos

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Agora $\cos y \geqslant 0$, uma vez que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, logo:

■ Esse mesmo método pode ser utilizado para obter a fórmula da derivada de *qualquer* função inversa. Veja o Exercício 67.

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Portanto,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

■ A Figura 8 mostra o gráfico de $f(x) = \operatorname{tg}^{-1} x$ e de sua derivada $f'(x) = 1/(1 + x^2)$. Observe que f é crescente e $f'(x)$ é sempre positiva. O fato de que $\operatorname{tg}^{-1} x \to \pm\pi/2$ quando $x \to \pm\infty$ está refletido no fato de que $f'(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$.

A fórmula para a derivada da função arco tangente é deduzida de maneira análoga. Se $y = \operatorname{tg}^{-1} x$, então $\operatorname{tg} y = x$. Derivando essa última equação implicitamente em relação a x temos

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

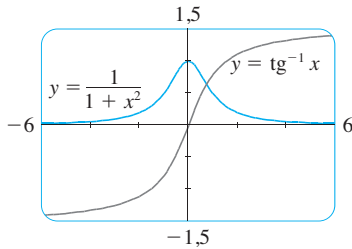
FIGURA 8

$$\boxed{\frac{dy}{dx}(\operatorname{tg}^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

EXEMPLO 5 Derive (a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1} x}$ e (b) $f(x) = x \operatorname{arctg} \sqrt{x}$

SOLUÇÃO

(a)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1} x)^{-2} \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x)$$

$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1} x)^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

■ Lembre-se de que arctg x é também uma notação utilizada para $\operatorname{tg}^{-1} x$.

(b)
$$f'(x) = x \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \left(\tfrac{1}{2} x^{-1/2}\right) + \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

As funções trigonométricas inversas que ocorrem com mais frequência são aquelas que acabamos de discutir. As derivadas das quatro funções remanescentes estão dadas na tabela a seguir. As demonstrações das fórmulas ficam como exercício.

■ As fórmulas para as derivadas de $\operatorname{cossec}^{-1} x$ e $\sec^{-1} x$ dependem das definições que foram usadas para essas funções (veja o Exercício 58).

DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossec}^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotg}^{-1} x) = -\frac{1}{1-x^2}$$

3.5 EXERCÍCIOS

1–4

(a) Encontre y' derivando implicitamente.

(b) Resolva a equação explicitamente isolando y e derive para obter y' em termos de x.

(c) Verifique que suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes, substituindo a expressão para y em sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$

2. $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

4. $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5–20 Encontre dy/dx derivando implicitamente.

5. $x^2 + y^3 = 1$

6. $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$

8. $x^2 - 2xy + y^3 = c$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

10. $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$

12. $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$

14. $y \operatorname{sen}(x^2) = x \operatorname{sen}(y^2)$

15. $e^{x/y} = x - y$

16. $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

18. $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

19. $xy = \operatorname{cotg}(xy)$

20. $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$

21. Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, ache $f'(1)$.

22. Se $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, ache $g'(0)$.

23–24 Considere y como a variável independente e x como a variável dependente e use a derivação implícita para encontrar dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$

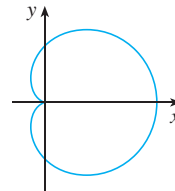
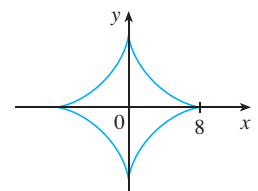
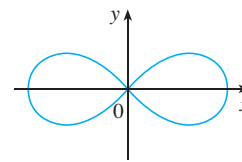
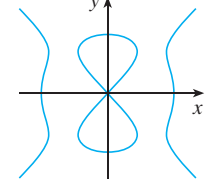
24. $y \sec x = x \operatorname{tg} y$

25–30 Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

25. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

26. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbole)

27. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$
(cardioide)

28. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$\left(-3\sqrt{3}, 1\right)$
(astroide)

29. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)

30. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
$(0, -2)$
(curva do diabo)

31. (a) A curva com equação $y^2 = 5x^4 - x^2$ é chamada **kampyle** (do grego, curvado) **de Eudoxo**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 2)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente em uma tela comum. (Se sua ferramenta gráfica puder fazer o gráfico de curvas definidas implicitamente, então use esse recurso. Se não, você poderá ainda fazer o gráfico dessa curva separando sua metade superior da inferior.)

32. (a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é denominada **cúbica de Tschirnhausen**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.
(b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?
(c) Ilustre as partes (a) e (b) fazendo o gráfico da curva e das retas tangentes sobre uma tela comum.

33–36 Encontre y'' por derivação implícita.

33. $9x^2 + y^2 = 9$ **34.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

35. $x^3 + y^3 = 1$ **36.** $x^4 + y^4 = a^4$

SCA **37.** Formas extravagantes podem ser criadas usando-se a capacidade de traçar funções definidas implicitamente de um SCA.
(a) Faça o gráfico da curva com equação
$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$
Em quantos pontos essa curva tem tangentes horizontais? Estime as coordenadas x desses pontos.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(0, 1)$ e $(0, 2)$.
(c) Encontre as coordenadas x exatas nos pontos da parte (a).
(d) Crie curvas mais extravagantes ainda modificando a equação da parte (a).

SCA **38.** (a) A curva com a equação
$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$
tem sido comparada com um "vagão sacolejante". Use um SCA para fazer essa curva e descubra o porquê desse nome.
(b) Em quantos pontos essa curva tem retas tangentes horizontais? Encontre as coordenadas x desses pontos.

39. Encontre os pontos sobre a lemniscata do Exercício 29 onde a tangente é horizontal.

40. Mostre, fazendo a derivação implícita, que a tangente à elipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
no ponto (x_0, y_0) é
$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

41. Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
no ponto (x_0, y_0).

42. Mostre que a soma das coordenadas das intersecções com os eixos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

43. Mostre, usando a derivação implícita, que qualquer reta tangente, em um ponto P, a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP.

44. A Regra da Potência pode ser demonstrada usando a derivação implícita para o caso onde n é um número racional, $n = p/q$, e $y = f(x) = x^n$ é suposta de antemão ser uma função derivável. Se $y = x^{p/q}$, então $y^q = x^p$. Use a derivação implícita para mostrar que
$$y' = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}$$

45–54 Encontre a derivada da função. Simplifique onde possível.

45. $y = \text{tg}^{-1}\sqrt{x}$ **46.** $y = \sqrt{\text{tg}^{-1}x}$

47. $y = \text{sen}^{-1}(2x + 1)$ **48.** $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,\sec^{-1}x$

49. $H(x) = (1 + x^2)\,\text{arctg}\,x$ **50.** $y = \text{tg}^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

51. $h(t) = \text{cotg}^{-1}(t) + \text{cotg}^{-1}(1/t)$ **52.** $F(\theta) = \text{arcsen}\sqrt{\text{sen}\,\theta}$

53. $y = \cos^{-1}(e^{2x})$ **54.** $y = \text{arctg}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

55–56 Encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

55. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\text{arcsen}\,x$ **56.** $f(x) = x\,\text{arctg}\,(x^2 - x)$

57. Demonstre a fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ pelo mesmo método usado para $(d/dx)(\text{sen}^{-1}x)$.

58. (a) Uma maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \Leftrightarrow \sec y = x$ e $0 \leqslant y < \pi/2$ ou $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Mostre que, se essa definição for adotada, então
$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$
(b) Outra maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \Leftrightarrow \sec y = x$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq 0$. Mostre que, se essa definição for adotada, então
$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

59–62 Duas curvas são **ortogonais** se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de intersecção. Mostre que as famílias dadas de curvas são **trajetórias ortogonais** uma em relação a outra, ou seja, toda curva de uma família é ortogonal a toda curva da outra família. Esboce ambas as famílias de curvas no mesmo sistema de coordenadas.

59. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

60. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

61. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

62. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

63. A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma "elipse girada", isto é, uma elipse cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados. Encontre os pontos nos quais essa elipse cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes nesses pontos são paralelas.

64. (a) Onde a reta normal à elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ no ponto $(-1, 1)$ intercepta a elipse uma segunda vez?
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da elipse e da reta normal.

65. Encontre todos os pontos sobre a curva $x^2y^2 + xy = 2$ onde a inclinação da reta tangente é -1.

66. Encontre as equações de ambas as retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passam pelo ponto (12, 3).

67. (a) Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua função inversa f^{-1} seja também derivável. Use a derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

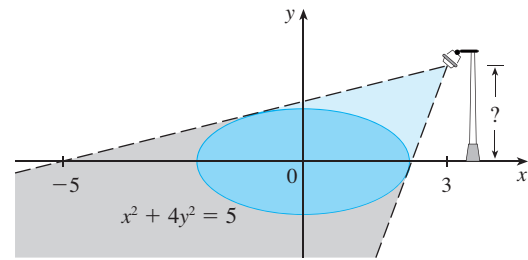
desde que o denominador não seja 0.

(b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = \frac{2}{3}$, encontre $(f^{-1})'(5)$.

68. (a) Mostre que $f(x) = 2x + \cos x$ é injetora.

(b) Qual o valor de $f^{-1}(1)$?

(c) Use a fórmula do Exercício 67(a) para determinar $(f^{-1})'(1)$.

69. A figura mostra uma lâmpada localizada três unidades à direita do eixo y e uma sombra originada pela região elíptica $x^2 + 4y^2 \leqslant 5$. Se o ponto $(-5, 0)$ estiver na borda da sombra, qual a altura da lâmpada acima do eixo x?

3.6 DERIVADAS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Nesta seção vamos usar a derivação implícita para achar as derivadas das funções logarítmicas $y = \log_a x$ e, em particular, da função logarítmica natural $y = \ln x$. [É possível demonstrar que as funções logarítmicas são deriváveis: com certeza isso é plausível a partir dos seus gráficos. (Veja a Figura 12 na Seção 1.6.)]

$$\textbf{1} \qquad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $y = \log_a x$. Então

$$a^y = x$$

■ A Fórmula 3.4.5 diz que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Derivando essa equação implicitamente em relação a x, usando a Fórmula 3.4.5, obtemos

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

e assim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$ □

Se pusermos $a = e$ na Fórmula 1, então o fator $\ln a$ no lado direito torna-se $\ln e = 1$, e obtemos a fórmula para a derivada da função logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

$$\textbf{2} \qquad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Comparando as Fórmulas 1 e 2, vemos uma das principais razões para os logaritmos naturais (logaritmos com base e) serem usados em cálculo. A fórmula de derivação é a mais simples quando $a = e$, pois $\ln e = 1$.

EXEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUÇÃO Para usar a Regra da Cadeia vamos fazer $u = x^3 + 1$. Então $y = \ln u$; logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3+1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3+1} \qquad \square$$

De forma geral, se combinarmos a Fórmula 2 com a Regra da Cadeia, como no Exemplo 1, obtemos

3 $$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

EXEMPLO 2 Encontre $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

SOLUÇÃO Usando (3), temos

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \operatorname{cotg} x \qquad \square$$

EXEMPLO 3 Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUÇÃO Dessa vez o logaritmo é a função de dentro; logo, a Regra da Cadeia dá

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \qquad \square$$

EXEMPLO 4 Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

SOLUÇÃO Usando a Fórmula 1 com $a = 10$, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \operatorname{sen} x) = \frac{1}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10} \qquad \square$$

■ A Figura 1 mostra o gráfico da função f do Exemplo 5 com o gráfico de sua derivada. Ela permite uma verificação visual de nossos cálculos. Observe que $f'(x)$ é muito grande em valor absoluto (negativo) quando f está decrescendo rapidamente.

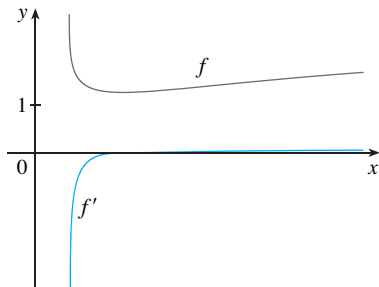



FIGURA 1

EXEMPLO 5 Encontre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUÇÃO 1

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1 - (x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2}$$

$$= \frac{x - 2 - \frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}$$

SOLUÇÃO 2 Se primeiro simplificarmos a função dada usando as propriedades do logaritmo, então a derivação ficará mais fácil:

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right]$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

(Essa resposta pode ser deixada assim, mas se usássemos um denominador comum obteríamos a mesma resposta da Solução 1.) □

■ A Figura 2 mostra o gráfico da função $f(x) = \ln|x|$ do Exemplo 6 e sua derivada $f'(x) = 1/x$. Observe que quando x é pequeno, o gráfico de $y = \ln|x|$ é íngreme e, portanto, $f'(x)$ é grande (positiva ou negativa).

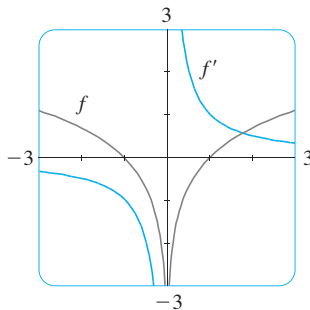



FIGURA 2

EXEMPLO 6 Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \ln|x|$.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

segue que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$ □

Assim, $f'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$.

O resultado do Exemplo 6 vale a pena ser lembrado:

4 $$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$$

DERIVAÇÃO LOGARÍTMICA

Os cálculos de derivadas de funções complicadas envolvendo produtos, quocientes ou potências podem muitas vezes ser simplificados tomando-se os logaritmos. O método usado no exemplo a seguir é chamado **derivação logarítmica**.

EXEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUÇÃO Tome o logaritmo em ambos os lados da equação e use as Propriedades do Logaritmo para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Derivando implicitamente em relação a x temos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Isolando dy/dx, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Como temos uma expressão explícita para y, podemos substituí-lo por ela e escrever

■ Se não usássemos a derivação logarítmica no Exemplo 7, teríamos de utilizar tanto a Regra do Quociente quanto a Regra do Produto. Os cálculos resultantes seriam horríveis.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$ □

PASSOS NA DERIVAÇÃO LOGARÍTMICA

1. Tome o logaritmo natural em ambos os lados de uma equação $y = f(x)$ e use as Propriedades dos Logaritmos para simplificar.
2. Derive implicitamente em relação a x.
3. Isole y' na equação resultante.

Se $f(x) < 0$ para algum valor de x, então $\ln f(x)$ não está definida, mas podemos escrever $|y| = |f(x)|$ e usar a Equação 4. Ilustramos esse procedimento demonstrando a versão geral da Regra da Potência, como prometemos na Seção 3.1.

A REGRA DA POTÊNCIA Se n for qualquer número real e $f(x) = x^n$, então

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

■ Se $x = 0$, podemos mostrar que $f'(0) = 0$ para $n > 1$ diretamente da definição de derivada.

DEMONSTRAÇÃO Seja $y = x^n$. Use a derivação logarítmica:

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0$$

Consequentemente

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

Daí

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$ □

⊘ Você deve distinguir cuidadosamente entre a Regra da Potência $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, na qual a base é variável e o expoente, constante, e a regra para diferenciar as funções exponenciais $[(a^x)' = a^x \ln a]$, na qual a base é constante e o expoente, variável.

Em geral há quatro casos para os expoentes e as bases:

1. $\frac{d}{dx}(a^b) = 0$ $\qquad$ (a e b são constantes)

2. $\frac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$

3. $\frac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$

4. Para encontrar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, a derivação logarítmica pode ser usada, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 8 Derive $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUÇÃO 1 Usando a derivação logarítmica, temos

■ A Figura 3 ilustra o Exemplo 8 mostrando os gráficos de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ e sua derivada.

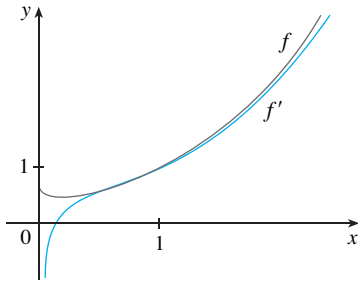



FIGURA 3

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} + (\ln x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

SOLUÇÃO 2 Outro método é escrever $x^{\sqrt{x}} = \left(e^{\ln x}\right)^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como na Solução 1)}$$

□

O NÚMERO *e* COMO UM LIMITE

Já mostramos que se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = 1/x$. Assim, $f'(1) = 1$. Agora, usamos esse fato para expressar o número e como um limite.

Da definição de derivada como um limite, temos

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1 + x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1 + x)^{1/x}$$

Como $f'(1) = 1$, temos

$$\lim_{x\to 0}\ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

Assim, pelo Teorema 2.5.8 e pela continuidade da função exponencial, temos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1 + x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1 + x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$$

FIGURA 4

5

$$e = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$$

x	$(1 + x)^{1/x}$
0,1	2,59374246
0,01	2,70481383
0,001	2,71692393
0,0001	2,71814593
0,00001	2,71826824
0,000001	2,71828047
0,0000001	2,71828169
0,00000001	2,71828181

A Fórmula 5 está ilustrada pelo gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$ da Figura 4 e na tabela para os valores pequenos de x. Isso ilustra o fato de que, correto até a sétima casa decimal,

$$e \approx 2{,}7182818$$

Se colocarmos $n = 1/x$ na Fórmula 5, então $n \to \infty$ quando $x \to 0^+$, e uma expressão alternativa para e é

6

$$e = \lim_{n\to 0}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3.6 EXERCÍCIOS

1. Explique por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais vezes no cálculo do que as outras funções logarítmicas $y = \log_a x$.

2–22 Derive a função.

2. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$

3. $f(x) = \text{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\text{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$

6. $f(x) = \log_5(xe^x)$

7. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

8. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$

9. $f(x) = \sqrt{x}\, \ln x$

10. $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

11. $F(t) = \ln \dfrac{(2t+1)^3}{(3t-1)^4}$

12. $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

13. $g(x) = \ln(x\sqrt{x^2 - 1})$

14. $F(y) = y \ln(1 + e^y)$

15. $y = \dfrac{\ln x}{1 + x}$

16. $y = \ln(x^4 \,\text{sen}^2 x)$

17. $y = \ln |2 - x - 5x^2|$

18. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20. $y = [\ln(1 + e^x)]^2$

21. $y = 2x \log_{10} \sqrt{x}$

22. $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

23–26 Encontre y' e y''.

23. $y = x^2 \ln(2x)$

24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

25. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

26. $y = \ln(\sec x + \text{tg}\, x)$

27–30 Derive f e encontre o domínio de f.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

28. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Se $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, encontre $f'(1)$.

32. Se $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, encontre $f'(0)$.

33–34 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \ln\left(xe^{x^2}\right)$, $(1, 1)$

34. $y = \ln(x^3 - 7)$, $(2, 0)$

35. Se $f(x) = \text{sen}\, x + \ln x$, encontre $f'(x)$. Verifique que sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

36. Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = (\ln x)/x$ nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1/e)$. Ilustre fazendo o gráfico da curva e de suas retas tangentes.

37–48 Use a derivação logarítmica para achar a derivada de função.

37. $y = (2x + 1)^5 (x^4 - 3)^6$

38. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2} (x^2 + 1)^{10}$

39. $y = \dfrac{\text{sen}^2 x\, \text{tg}^4 x}{(x^2 + 1)^2}$

40. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$

41. $y = x^x$

42. $y = x^{1/x}$

43. $y = x^{\text{sen}\, x}$

44. $y = \sqrt{x}^{\,x}$

45. $y = (\cos x)^x$

46. $y = (\text{sen}\, x)^{\ln x}$

47. $y = (\text{tg}\, x)^{1/x}$

48. $y = (\ln x)^{\cos x}$

49. Encontre y' se $y = \ln(x^2 + y^2)$.

50. Encontre y' se $x^y = y^x$.

51. Encontre uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = \ln(x - 1)$.

52. Encontre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

53. Use a definição da derivada para demonstrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

54. Mostre que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ para qualquer $x > 0$.

3.7 TAXAS DE VARIAÇÃO NAS CIÊNCIAS NATURAIS E SOCIAIS

Sabemos que se $y = f(x)$, então a derivada dy/dx pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x. Nesta seção, examinaremos algumas aplicações dessa ideia na física, química, biologia, economia e outras ciências.

Vamos nos recordar da Seção 2.7 que apresentou a ideia básica das taxas de variação. Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

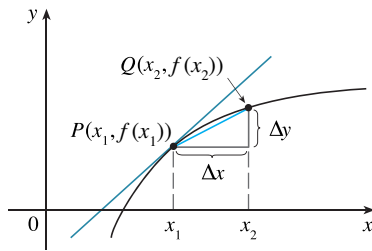
e a variação correspondente em y será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O quociente da diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é a **taxa média da variação de y em relação a x** sobre o intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretada como a inclinação da reta secante PQ da Figura 1. Seu limite quando $\Delta x \to 0$ é a derivada $f'(x_1)$, que pode ser interpretada como a **taxa instantânea de variação de y em relação a x** ou a inclinação da reta tangente em $P(x_1, f(x_1))$. Usando a notação de Leibniz, escrevemos o processo na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

m_{PQ} = taxa média de variação
$m = f'(x_1)$ = taxa instantânea de variação
FIGURA 1

Sempre que a função $y = f(x)$ tiver uma interpretação específica em uma das ciências, sua derivada terá outra interpretação específica, como uma taxa de variação. (Como discutido na Seção 2.7, as unidades dy/dx são as unidades para y divididas pela unidade para x.) Agora vamos examinar algumas dessas interpretações nas ciências naturais e sociais.

FÍSICA

Se $s = f(t)$ for a função posição de uma partícula que está se movendo em uma reta, então $\Delta s/\Delta t$ representa a velocidade média sobre um período de tempo Δt, e $v = ds/dt$ representa a **velocidade** instantânea (a taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo). A taxa instantânea de variação da velocidade com relação ao tempo é a **aceleração**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Isso já foi discutido nas Seções 2.7 e 2.8, mas agora que conhecemos as fórmulas de derivação, estamos habilitados a resolver os problemas de velocidade mais facilmente.

EXEMPLO 1 A posição de uma partícula é dada pela equação

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

onde t é medido em segundos e s em metros.
(a) Encontre a velocidade no instante t.
(b) Qual é a velocidade após 2 s? E depois de 4 s?
(c) Quando a partícula está em repouso?
(d) Quando a partícula está se movendo para a frente (isto é, no sentido positivo)?
(e) Faça um diagrama para representar o movimento da partícula.
(f) Encontre a distância total percorrida pela partícula durante os primeiros cinco segundos.
(g) Encontre a aceleração no instante t e depois de 4s.
(h) Faça os gráficos das funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
(i) Quando a partícula está acelerando? Quando está freando?

SOLUÇÃO
(a) A função velocidade é a derivada da função posição.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

(b) A velocidade depois de 2 s é a velocidade instantânea quando $t = 2$, isto é,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

A velocidade depois de 4 s é

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

(c) A partícula está em repouso quando $v(t) = 0$, isto é,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

e isso acontece quando $t = 1$ ou $t = 3$. Dessa forma, a partícula está em repouso após 1 s e depois de 3 s.

(d) A partícula move-se no sentido positivo quando $v(t) > 0$, isto é,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Essa desigualdade é verdadeira quando ambos os fatores forem positivos ($t > 3$) ou quando ambos os fatores forem negativos ($t < 1$). Assim, a partícula move-se no sentido positivo nos intervalos de tempo $t < 1$ e $t > 3$. Move-se para trás (no sentido negativo) quando $1 < t < 3$.

(e) Usando as informações da parte (d) fazemos um esquema ilustrativo do movimento da partícula, que volta e depois torna a avançar ao longo da reta (eixo s), como mostrado na Figura 2.

FIGURA 2

(f) Por causa do que aprendemos nas partes (d) e (e), precisamos calcular separadamente a distância percorrida durante os intervalos de tempo [0, 1], [1, 3] e [3, 5]. A distância percorrida no primeiro segundo é

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

De $t = 1$ a $t = 3$ a distância percorrida é

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$ a distância percorrida é

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

A distância total é $4 + 4 + 20 = 28$ m.

(g) A aceleração é a derivada da função velocidade:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

FIGURA 3

(h) A Figura 3 mostra os gráficos de s, v e a.

(i) A partícula acelera quando a velocidade é positiva e é crescente (v e a são ambas positivas) e também quando a velocidade é negativa e decrescente (v e a são ambas negativas). Em outras palavras, a partícula acelera quando a velocidade e a aceleração têm o mesmo sinal. (A partícula é empurrada no mesmo sentido de seu movimento.) A partir da Figura 3, vemos que isto ocorre quando $1 < t < 2$ e quando $t > 3$. A partícula está freando quando v e a têm sinais opostos, ou seja, quando $0 \leq t < 1$ e quando $2 < t < 3$. A Figura 4 resume o movimento da partícula.

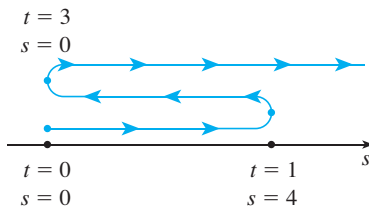
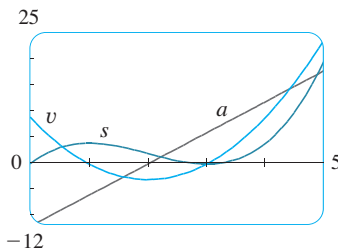
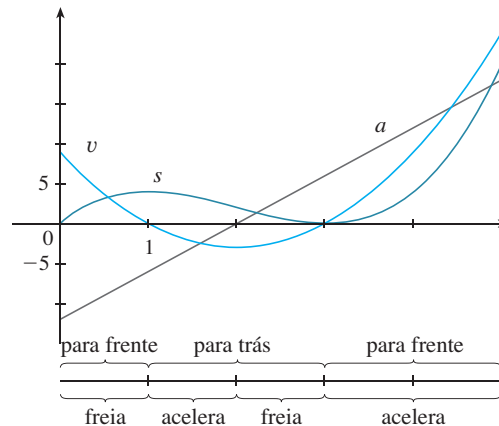



FIGURA 4

□

EXEMPLO 2 Se uma barra ou pedaço de fio forem homogêneos, então sua *densidade linear* será uniforme e estará definida como a massa por unidade de comprimento ($\rho = m/l$) medida em quilogramas por metro. Suponha, contudo, que a barra não seja homogênea, mas que sua massa, medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x, seja $m = f(x)$, conforme mostrado na Figura 5.

FIGURA 5

A massa da parte da barra que está situada entre $x = x_1$ e $x = x_2$ é dada por $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$; logo, a densidade média daquela parte da barra é

$$\text{densidade média} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se fizermos $\Delta x \to 0$ (isto é, $x_2 \to x_1$), estaremos calculando a densidade média em intervalos cada vez menores. A **densidade linear** ρ em x_1 é o limite dessa densidade média quando $\Delta x \to 0$; isto é, a densidade linear é a taxa de variação da massa em relação ao comprimento. Simbolicamente,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

Assim, a densidade linear da barra é a derivada da massa em relação ao comprimento.

Por exemplo, se $m = f(x) = \sqrt{x}$, onde x é medida em metros e m em quilogramas, então a densidade média da parte da barra dada por $1 \leqslant x \leqslant 1{,}2$ é

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1{,}2) - f(1)}{1{,}2 - 1} = \frac{\sqrt{1{,}2} - 1}{0{,}2} \approx 0{,}48 \text{ kg/m}$$

enquanto a densidade exatamente em $x = 1$ é

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x},}\right|_{x=1} = 0{,}50 \text{ kg/m}$$

□

FIGURA 6

EXEMPLO 3 Uma corrente existe sempre que cargas elétricas se movem. A Figura 6 ilustra a parte de um fio e elétrons movimentando-se através de uma superfície plana sombreada. Se ΔQ é a quantidade de carga líquida que passa através dessa superfície durante um período de tempo Δt, então a corrente média durante esse intervalo de tempo é definida como

$$\text{corrente média} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Se fizermos o limite dessa corrente média sobre intervalos de tempo cada vez menores, obteremos o que denominamos **corrente** I em um dado instante t_1:

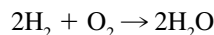
$$I = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Assim, a corrente é a taxa na qual o fluxo de carga atravessa uma superfície, medida em unidades de carga por unidade de tempo (frequentemente coulombs por segundo, chamados ampères). □

Além da velocidade, da densidade e da corrente, outras taxas de variação são importantes na física, como a potência (a taxa segundo a qual um trabalho é realizado), a taxa do fluxo de calor, o gradiente da temperatura (a taxa de variação da temperatura em relação à posição) e a taxa de decaimento radioativo de uma substância na física nuclear.

QUÍMICA

EXEMPLO 4 Uma reação química resulta na formação de uma ou mais substâncias (conhecidas como *produtos*) a partir de um ou mais materiais iniciais (ditos *reagentes*). Por exemplo, a "equação"

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

indica que duas moléculas de hidrogênio e uma molécula de oxigênio formam duas moléculas de água. Consideremos a reação

$$A + B \rightarrow C$$

onde A e B são reagentes e C é o produto. A **concentração** de um reagente A é o número de mols (1 mol = 6,022 $\times$ 10^{23} moléculas) por litro e é denotada por [A]. A concentração varia durante a reação, logo [A], [B] e [C] são funções do tempo (t). A taxa média da reação do produto C sobre um intervalo de tempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ é

$$\frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}$$

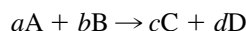
Mas os químicos estão mais interessados na **taxa de reação instantânea**, obtida fazendo-se o limite da taxa de reação média quando o intervalo de tempo Δt tende a 0:

$$\text{taxa de reação} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{d[C]}{dt}$$

Uma vez que a concentração do produto aumenta quando a reação avança, a derivada $d[C]/dt$ será positiva. (Você pode ver intuitivamente que a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função crescente é positiva.) Assim, a taxa de reação de C é positiva. A concentração de reagentes, entretanto, decresce durante a reação; logo, para tornar as taxas de reação de A e B números positivos, colocamos sinais de menos na frente das derivadas $d[A]/dt$ e $d[B]/dt$. Uma vez que [A] e [B] decrescem na mesma taxa que [C] aumenta, temos

$$\text{taxa de reação} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$$

Mais geralmente resulta que, para uma reação da forma,

$$aA + bB \rightarrow cC + dD$$

temos

$$-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[D]}{dt}$$

A taxa de reação pode ser determinada graficamente. Em alguns casos podemos usar a taxa de reação para achar fórmulas explícitas para as concentrações como funções do tempo que nos permitem calcular a taxa de reação (veja o Exercício 22). □

EXEMPLO 5 Uma das grandezas de interesse na termodinâmica é a compressibilidade. Se dada substância for mantida à temperatura constante, então seu volume V depende de sua pressão P. Podemos considerar a taxa de variação do volume em relação à pressão — isto é, a derivada dV/dP. Quando P cresce, V decresce; logo, $dV/dP < 0$. A **compressibilidade** é definida introduzindo-se o sinal negativo e dividindo essa derivada pelo volume V:

$$\text{compressibilidade isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

Assim, β mede quão rápido, por unidade de volume, o volume de uma substância decresce quando a pressão sobre ela cresce, a uma temperatura constante.

Por exemplo, o volume V (em metros cúbicos) de uma amostra do ar a 25º C está relacionado com a pressão P (em quilopascals) pela equação

$$V = \frac{5,3}{P}$$

A taxa de variação de V em relação a P quando $P = 50$ kPa é

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = -\left.\frac{5,3}{P^2}\right|_{P=50}$$

$$= -\frac{5,3}{2\,500} = -0,00212 \text{ m}^3/\text{kPa}$$

A compressibilidade naquela pressão é

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0,00212}{\dfrac{5,3}{50}} = 0,02(\text{m}^3/\text{kPa})/\text{m}^3$$

□

BIOLOGIA

EXEMPLO 6 Seja $n = f(t)$ o número de indivíduos em uma população (animal ou vegetal) no instante t. A variação no tamanho da população entre os instantes $t = t_1$ e $t = t_2$ é $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$ e, portanto, a taxa média de crescimento durante o período de tempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ é

$$\text{taxa média de crescimento} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

A **taxa de crescimento instantâneo** é obtida dessa taxa média de crescimento fazendo-se o período de tempo Δt tender a 0:

$$\text{taxa de crescimento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Estritamente falando, isso não é muito preciso, pois o gráfico real de uma função população $n = f(t)$ seria uma função escada, que é descontínua sempre que ocorre um nascimento ou morte e, portanto, não seria derivável. Contudo, para uma grande população animal ou vegetal, podemos substituir o gráfico por uma curva aproximadora lisa, como na Figura 7.

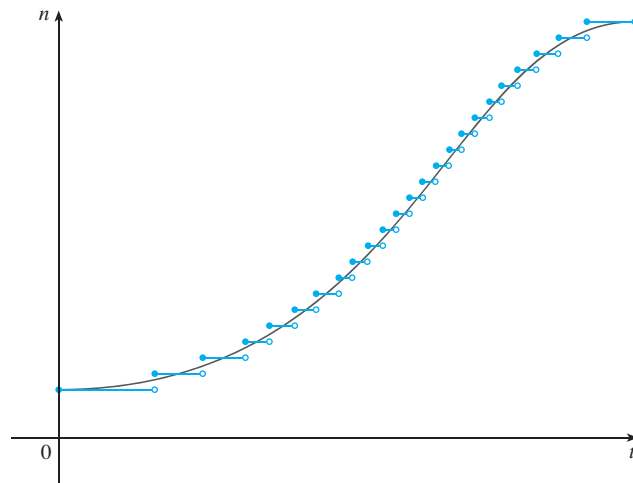



FIGURA 7
Uma curva aproximadora lisa de uma função crescimento

Para ser mais específico, considere uma população de bactérias em um meio nutriente homogêneo. Suponha que tomando amostras da população em certos intervalos, determina-se que ela duplica a cada hora. Se a população inicial for n_0 e o instante t for medido em horas, então

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$
$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$
$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

e, em geral,

$$f(t) = 2^t n_0$$

A função população é $n = n_0 2^t$.

Na Seção 3.4 mostramos que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Portanto, a taxa de crescimento da população de bactérias no instante t é

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) = n_0 2^t \ln 2$$

Por exemplo, suponha que comecemos com uma população inicial de $n_0 = 100$ bactérias. Então, a taxa de crescimento depois de 4 horas é

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1\,600 \ln 2 \approx 1\,109$$

Isso quer dizer que, depois de 4 horas, a população de bactérias está crescendo a uma taxa de cerca de 1 109 bactérias por hora. □

EXEMPLO 7 Considerando o fluxo de sangue através de um vaso sanguíneo, como uma veia ou artéria, podemos modelar a forma do vaso sanguíneo por um tubo cilíndrico de raio R e comprimento l, conforme ilustrado na Figura 8.

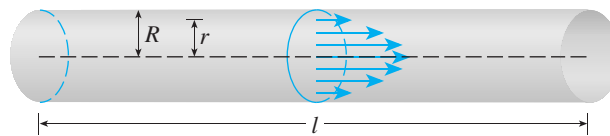



FIGURA 8
Fluxo de sangue em uma artéria

Em razão do atrito nas paredes do tubo, a velocidade v do sangue é maior ao longo do eixo central e decresce à medida que r se distancia do eixo central, cresce até que v torna-se 0 na parede. A relação entre v e r é dada pela **lei do fluxo laminar**, descoberta em 1840 pelo físico francês Jean-Louis-Marie Poiseuille. Esta lei afirma que

$$v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) \qquad \text{1}$$

onde η é a viscosidade do sangue e P é a diferença entre as pressões nos extremos do tubo. Se P e l forem constantes, então v é uma função de r com o domínio $[0, R]$.

■ Para informações mais detalhadas, veja W. Nichols e M. O'Rourke (eds.), *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental, and Clinical Principles*, 4. ed. (Nova York: Oxford University Press, 1998).

A taxa da variação média da velocidade quando nos movemos de $r = r_1$ para $r = r_2$ é dada por

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

e se fizermos $\Delta r \to 0$, obteremos o **gradiente da velocidade**, isto é, a taxa instantânea de variação da velocidade em relação a r:

$$\text{gradiente da velocidade} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Usando a Equação 1, obtemos

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para artérias humanas menores, podemos tomar $\eta = 0{,}027$, $R = 0{,}008$ cm, $l = 2$ cm e $P = 4{,}000$ dinas/cm^2, o que fornece

$$v = \frac{4\,000}{4(0{,}027)2} = (0{,}000064 - r^2)$$

$$\approx 1{,}85 \times 10^4(6{,}4 \times 10^{-5} - r^2)$$

Em $r = 0{,}002$ cm o sangue está fluindo a uma velocidade de

$$v(0{,}002) \approx 1{,}85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6})$$

$$= 1{,}11 \text{ cm/s}$$

e o gradiente da velocidade nesse ponto é

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r = 0{,}002} = -\frac{4\,000(0{,}002}{2(0{,}027)2} \approx -74 \text{ (cm/s)/cm}$$

Para sentir o que isso significa, vamos mudar nossas unidades de centímetros para micrômetros (1 cm = 10 000 μm). Então o raio da artéria é 80 μm. A velocidade no eixo central é 11 850 μm/s, que decresce para 11 110 μm/s a uma distância de $r = 20$ μm. O fato de que $dv/dr = -74$(μm/s)/μm quer dizer que quando $r = 20$ μm, a velocidade está decrescendo a uma taxa de cerca de 74 μm/s para cada micrômetro que afastarmos do centro. □

ECONOMIA

EXEMPLO 8 Suponha que $C(x)$ é o custo total que uma companhia incorre na produção de x unidades de um certo produto. A função C é chamada **função custo**. Se o número de itens produzidos aumenta de x_1 para x_2, o custo adicional será $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, e a taxa média de variação do custo será

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

O limite dessa grandeza quando $\Delta x \to 0$, isto é, a taxa de variação instantânea de variação do custo em relação ao número de itens produzidos, é denominado **custo marginal** pelos economistas:

$$\text{custo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Uma vez que x pode geralmente assumir somente os valores inteiros, pode não fazer sentido tomar $\Delta x \to 0$, mas podemos sempre substituir $C(x)$ por uma função lisa aproximadora, como no Exemplo 6.]

Fazendo $\Delta x = 1$ e n muito grande (de modo que Δx é pequeno comparado com n), temos

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Assim, o custo marginal de produção de n unidades é aproximadamente igual ao custo da produção de mais uma unidade [a $(n + 1)$-ésima unidade].

Em geral, é apropriado representar uma função custo por um polinômio

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

onde a representa os custos gerais indiretos (aluguel, aquecimento, manutenção), e os outros termos representam o custo das matérias-primas, da mão de obra e assim por diante. (O custo das matérias-primas pode ser proporcional a x, mas o custo da mão de obra poderia depender parcialmente de potências mais altas de x, em decorrência dos custos de horas extras e ineficiências envolvidas em operações de larga escala.)

Por exemplo, suponha que uma companhia tenha estimado que o custo (em dólares) de produção de x itens seja

$$C(x) = 10\,000 + 5x + 0{,}01x^2$$

Então, a função custo marginal é

$$C'(x) = 5 + 0{,}02x$$

O custo marginal no nível de produção de 500 itens é

$$C'(500) = 5 + 0{,}02(500) = \$15/\text{item}$$

Isso dá a taxa segundo a qual os custos estão crescendo em relação ao nível de produção quando $x = 500$ e prediz o custo da 501ª unidade.

O custo real da produção da 501ª unidade é

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10\,000 + 5(501) + 0{,}01(501)^2] \\ &\quad - [10\,000 + 5(500) + 0{,}01(500)^2] \\ &= \$15{,}01 \end{aligned}$$

Observe que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$. □

Os economistas também estudam a demanda marginal, a renda marginal e o lucro marginal, que são derivadas das funções demanda, renda e lucro. Isso será visto no Capítulo 4, depois de desenvolvermos as técnicas para encontrar os valores máximo e mínimo de funções.

OUTRAS CIÊNCIAS

As taxas de variação ocorrem em todas as ciências. Um geólogo se interessa em saber a taxa na qual uma massa de rocha fundida resfria pela condução de calor para o meio rochoso que a envolve. Um engenheiro quer saber a taxa segundo a qual a água escoa para dentro ou para fora de um reservatório; um geógrafo está interessado na taxa de variação da densidade populacional em uma cidade à medida que aumenta a distância de seu centro; um meteorologista está interessado na taxa de variação da pressão atmosférica em relação à altura (veja o Exercício 17 da Seção 3.8).

Em psicologia, os interessados na teoria do aprendizado estudam a chamada curva de aprendizado, que é o gráfico do desempenho $P(t)$ de alguém aprendendo alguma coisa como função do tempo de treinamento t. É de particular interesse a taxa segundo a qual o desempenho melhora à medida que o tempo passa, isto é, dP/dt.

Em sociologia, o cálculo diferencial é usado na análise da divulgação do boato (ou inovações, ou modismos, ou padrões). Se $p(t)$ denota a proporção de uma população que fica sabendo de um boato no instante t, então a derivada dp/dt representa a taxa de divulgação do boato (veja o Exercício 82 na Seção 3.4).

UMA ÚNICA IDEIA, MUITAS INTERPRETAÇÕES

A velocidade, a densidade, a corrente, a potência e o gradiente da temperatura na física; a taxa de reação e a compressibilidade na química; a taxa de crescimento e o gradiente da velocidade do sangue na biologia; o custo e o lucro marginal na economia; a taxa do fluxo do calor na geologia; a taxa de desenvolvimento do desempenho na psicologia; a taxa de divulgação de um boato na sociologia — todos esses são casos especiais de um único conceito matemático, a derivada.

Isto é uma ilustração do fato de que parte do poder da matemática está em sua abstração. Um único conceito matemático abstrato (tal como a derivada) pode ter interpretações diferentes para cada uma das ciências. Quando desenvolvemos as propriedades do conceito matemático de uma vez por todas, podemos voltar e aplicar esses resultados em todas as ciências. Isso é muito mais eficiente do que desenvolver as propriedades de conceitos especiais para cada ciência separada. O matemático francês Joseph Fourier (1768-1830) colocou isso sucintamente: "Os matemáticos comparam os mais diversos fenômenos e descobrem as analogias secretas que os unem".

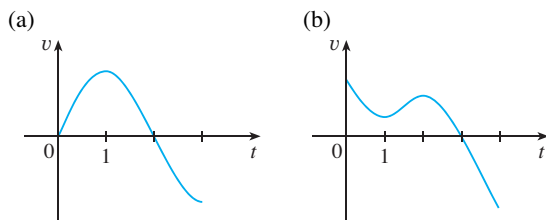
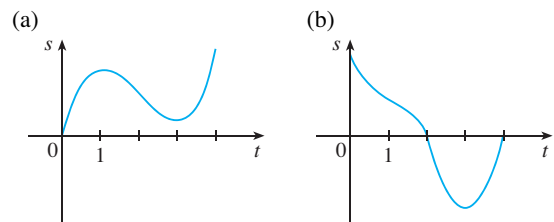
3.7 EXERCÍCIOS

1–4 Uma partícula move-se segundo a lei do movimento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, em que t é medido em segundos e s em metros.

(a) Encontre a velocidade no instante t.
(b) Qual a velocidade depois de 3 s?
(c) Quando a partícula está em repouso?
(d) Quando a partícula está se movendo no sentido positivo?
(e) Encontre a distância total percorrida durante os 8 primeiros segundos.
(f) Desenhe um diagrama como na Figura 2 para ilustrar o movimento da partícula.
(g) Encontre a aceleração no instante t e depois de 3 s.
(h) Faça os gráficos das funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leqslant t \leqslant 8$.
(i) Quando a partícula está acelerando? Quando está freando?

1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ **2.** $f(t) = 0{,}01t^4 - 0{,}04t^3$

3. $f(t) = \cos(\pi t/4)$, $t \leqslant 10$ **4.** $f(t) = te^{-t/2}$

5. São mostrados os gráficos das funções *velocidade* de duas partículas, com t medido em segundos. Quando cada partícula está acelerando? Quando está freando? Explique.

6. São mostrados os gráficos das funções *posição* de duas partículas, com t medido em segundos. Quando cada partícula está acelerando? Quando está freando? Explique.

7. A função posição de uma partícula é dada por $s = t^3 - 4{,}5t^2 - 7t$, $t \geqslant 0$
(a) Quando a partícula atinge a velocidade de 5 m/s?
(b) Quando a aceleração é 0? Qual é o significado deste valor de t?

8. Se uma bola for empurrada ladeira abaixo, sobre um plano inclinado, a uma velocidade inicial de 5 m/s, a distância que ela terá rolado, após t segundos, será dada por $s = 5t + 3t^2$.
(a) Determine sua velocidade após 2 s.
(b) Quão longe ela estará do ponto de partida quando sua velocidade atingir 35 m/s?

9. Se uma pedra for atirada verticalmente para cima sobre a superfície da Lua, com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos será $h = 10t - 0{,}83t^2$.
(a) Qual a velocidade da pedra após 3 s?
(b) Qual a velocidade da pedra quando ela atingir 25 m?

10. Se uma bola for atirada verticalmente para cima com uma velocidade de 24,5 m/s, então sua altura depois de t segundos é $s = 24{,}5t - 4{,}9t^2$.
(a) Qual a altura máxima atingida pela bola?
(b) Qual a velocidade da bola quando estiver 29,4 m acima do solo na subida? E na descida?

11. (a) Uma companhia produz *chips* de computador a partir de placas quadradas de silício. Ela quer manter o comprimento do lado da placa muito próximo de 15 mm e deseja saber como a área $A(x)$ da placa varia quando mudamos o comprimento x do lado. Encontre $A'(15)$ e explique seu significado nessa situação.

(b) Mostre que a taxa de variação da área de um quadrado em relação ao comprimento de seu lado é a metade de seu perímetro. Tente explicar geometricamente por que isso é verdade, desenhando um quadrado cujo comprimento de lado x é aumentado em Δx. Como aproximar as mudanças resultantes na área ΔA se Δx for pequeno?

12. (a) Os cristais de clorato de sódio são fáceis de crescer no formato de cubos, ao se permitir uma solução de água e clorato de sódio evaporar vagarosamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x, calcule dV/dx quando $x = 3$ mm e explique seu significado.

(b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual à metade da área da superfície do cubo. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro, mostrando um argumento análogo ao do Exercício 11(b).

13. (a) Encontre a taxa de variação média da área de um círculo em relação a seu raio r quando r varia de

(i) 2 a 3 (ii) 2 a 2,5 (iii) 2 a 2,1

(b) Encontre a taxa de variação instantânea quando $r = 2$.

(c) Mostre que a taxa de variação da área de um círculo em relação a seu raio (para qualquer r) é igual à circunferência do círculo. Tente explicar geometricamente por que isso é verdadeiro, desenhando um círculo cujo raio foi aumentado em Δr. Como você pode aproximar a variação resultante ΔA se Δr for pequeno?

14. Uma pedra caiu dentro de um lago, produzindo uma ondulação circular que cresce para fora a uma velocidade de 60 cm/s. Encontre a taxa segundo a qual a área dentro do círculo está crescendo depois de (a) 1 s, (b) 3 s e (c) 5 s. O que você pode concluir?

15. Um balão esférico começa a ser inflado. Encontre a taxa de crescimento da área da superfície ($S = 4\pi r^2$) em relação ao raio r quando r é (a) 1 pé, (b) 2 pés e (c) 3 pés. Que conclusão você pode tirar?

16. (a) O volume de uma célula esférica em crescimento é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, onde o raio r é medido em micrômetros ($1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$). Encontre a taxa de variação média de V em relação a r quando r varia de

(i) 5 a 8μm (ii) 5 a 6μm (iii) 5 a 5,1μm

(b) Encontre a taxa de variação instantânea de V em relação a r quando $r = 5\mu$m.

(c) Mostre que a taxa de variação do volume de uma esfera em relação a seu raio é igual à área de sua superfície. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro. Mostre um argumento análogo ao do Exercício 13(c).

17. A massa da parte de uma barra de metal que está situada entre o extremo esquerdo e um ponto x metros à direita é $3x^2$ kg. Encontre a densidade linear (veja o Exemplo 2) quando x for (a)1 m, (b) 2 m e (c) 3 m. Onde a densidade é maior? E menor?

18. Se um tanque tem 5 000 galões de água, que escoa pelo fundo em 40 minutos, então a Lei de Torricelli dá o volume V de água que restou no tanque depois de t minutos como

$$V = 5\,000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40$$

Encontre a taxa segundo a qual a água está escoando do tanque depois de (a) 5 min, (b) 10 min, (c) 20 min e (d) 40 min. Em que instante o escoamento é mais rápido? E mais vagaroso? Resuma o que você encontrou.

19. A quantidade de carga Q, em coloumbs (C), que passa através de um ponto em um fio até o instante t (medido em segundos) é dada por $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encontre a corrente quando (a) $t = 0{,}5$ s e (b) $t = 1$ s. [Veja o Exemplo 3. A unidade de corrente é o ampère (1 A = 1 C/s).] Em que instante a corrente é mais baixa?

20. A Lei de Gravitação de Newton diz que a intensidade F da força exercida por um corpo de massa m sobre um corpo de massa M é

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

em que G é a constante gravitacional e r é a distância entre os corpos.

(a) Se os corpos estão se movendo, encontre dF/dr e explique seu significado. O que o sinal de menos indica?

(b) Suponha que seja conhecido que a Terra atrai um objeto com uma força que decresce a uma taxa de 2 N/km quando $r = 20\,000$ km. Quão rápido essa força varia quando $r = 10\,000$?

21. A Lei de Boyle afirma que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão pelo volume permanece constante: $PV = C$.

(a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à pressão.

(b) Uma amostra de gás está em um recipiente à baixa pressão e é regularmente comprimida à temperatura constante por 10 minutos. O volume decresce mais rapidamente no início ou no final dos 10 minutos? Explique.

(c) Demonstre que a compressibilidade isotérmica (veja o Exemplo 5) é dada por $\beta = 1/P$.

22. Se, no Exemplo 4, uma molécula do produto C é produzida de uma molécula do reagente A e de uma molécula do reagente B, e as concentrações iniciais de A e B têm um mesmo valor $[A] = [B] = a$ mols/L, então

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

onde k é uma constante.

(a) Encontre a taxa de reação no instante t.

(b) Mostre que se $x = [C]$, então

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

(c) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?

(d) O que acontece com a taxa de reação quando $t \to \infty$?

(e) O que os resultados da parte (c) e (d) significam em termos práticos?

23. No Exemplo 6, consideramos uma população de bactérias que dobra a cada hora. Suponha que outra população de bactérias triplique a cada hora e comece com 400 bactérias. Encontre a expressão para o número n de bactérias depois de t horas e use-a para estimar a taxa de crescimento da população de bactérias depois de 2,5 horas.

24. O número de células de levedura em uma cultura de laboratório aumenta rapidamente no início, mas eventualmente estabiliza. A população é modelada pela função

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,7t}}$$

em que t é medido em horas. No instante $t = 0$ a população é 20 células e está crescendo a uma taxa de 12 células/hora. Encontre os valores de a e b. De acordo com este modelo, o que ocorre com a população de levedura depois de muito tempo?

25. A tabela dá a população mundial no século XX.

Ano	População (em milhões)	Ano	População (em milhões)
1900	1 650	1960	3 040
1910	1 750	1970	3 710
1920	1 860	1980	4 450
1930	2 070	1990	5 280
1940	2 300	2000	6 080
1950	2 560		

(a) Estime a taxa de crescimento populacional em 1920 e em 1980 fazendo a média das inclinações de duas retas secantes.

(b) Use uma calculadora gráfica ou computador para achar uma função cúbica (um polinômio de terceiro grau) que modele os dados (veja a Seção 1.2).

(c) Utilize o modelo da parte (b) para achar um modelo para a taxa de crescimento populacional no século XX.

(d) Use a parte (c) para estimar as taxas de crescimento em 1920 e 1980. Compare com sua estimativa da parte (a).

(e) Estime a taxa de crescimento em 1985.

26. A tabela mostra como a média de idade das mulheres japonesas quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23,0	1980	25,2
1955	23,8	1985	25.5
1960	24,4	1990	25,9
1965	24,5	1995	26,3
1970	24,2	2000	27,0
1975	24,7		

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar esses dados por um polinômio de quarto grau.

(b) Use a parte (a) para achar um modelo para $A'(t)$.

(c) Estime a taxa de variação da idade no primeiro casamento dessas mulheres em 1990.

(d) Faça o gráfico dos pontos dados e dos modelos para A e A'.

27. Considere a lei do fluxo laminar dada no Exemplo 7. Considere um vaso sanguíneo com raio 0,01 cm, comprimento 3 cm, diferença de pressão 3 000 dinas/cm^2, e viscosidade $\eta = 0,027$.

(a) Encontre a velocidade do sangue ao longo do eixo central $r = 0$, no raio $r = 0,005$ cm, e na parede $r = R = 0,01$ cm.

(b) Encontre o gradiente da velocidade em $r = 0$, $r = 0,005$ e $r = 0,01$.

(c) Onde a velocidade é máxima? Onde a velocidade varia mais?

28. A frequência da vibração de uma corda de violino é dada por

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

onde L é o comprimento da corda; T, sua tensão; ρ, sua densidade linear. [Veja o Capítulo 11 em D. E. Hall, *Musical Acoustics*, 3. ed. (Pacific Grover, CA: Brooks/Cole, 2002).]

(a) Encontre a taxa de variação da freqüência em relação

(i) ao comprimento (quando T e ρ são constantes);

(ii) à tensão (quando L e ρ são constantes);

(iii) à densidade linear (quando L e T são constantes).

(b) A intensidade de uma nota (quão alta ou baixa soa a nota) é determinada pela frequência f. (Quanto maior a frequência, maior a intensidade.) Use os sinais das derivadas da parte (a) para determinar o que acontece com a intensidade de uma nota

(i) quando o comprimento efetivo de uma corda é decrescido colocando-se o dedo sobre ela, de forma que uma porção menor da corda vibre;

(ii) quando a tensão é aumentada girando-se a cravelha (pino de afinação);

(iii) quando a densidade linear é aumentada, mudando-se a corda.

29. O custo, em dólares, da produção de x metros de certo tecido é

$$C(x) = 1\,200 + 12x - 0,1x^2 + 0,0005x^3$$

(a) Encontre a função custo marginal.

(b) Encontre $C'(200)$ e explique seu resultado. O que ele prediz?

(c) Compare $C'(200)$ com o custo de manufaturado 201º metro de tecido.

30. A função custo para uma certa mercadoria é

$$C(x) = 339 + 25x - 0{,}09x^2 + 0{,}0004x^3$$

(a) Encontre e interprete $C'(100)$.

(b) Compare $C'(100)$ com o custo de produzir o 101º item.

31. Se $p(x)$ for o valor total da produção quando há x trabalhadores em uma fábrica, então a *produtividade média* da força de trabalho da fábrica é

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Encontre $A'(x)$. Por que a companhia precisa empregar mais trabalhadores se $A'(x) > 0$?

(b) Mostre que $A'(x) > 0$ se $p'(x)$ for maior que a produtividade média.

32. Se R denota a reação do corpo a algum estímulo de intensidade x, a *sensibilidade S* é definida como a taxa de variação da reação em relação a x. Um exemplo acontece quando a luminosidade x de uma fonte de luz é aumentada e o olho reage decrescendo a área R da pupila. A fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0,4}}{1 + 4x^{0,4}}$$

tem sido usada para modelar a dependência de R em x quando R é medido em milímetros quadrados e x em uma unidade apropriada de luminosidade.

(a) Encontre a sensibilidade.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico de R e S como funções de x. Comente sobre os valores de R e S em baixos níveis de luminosidade. Isso é o que você esperaria?

33. A lei dos gases para um gás ideal à temperatura absoluta T (em kelvins), pressão P (em atmosferas) e volume V (em litros) é $PV = nRT$, em que n é o número de mols de gás e $R = 0{,}0821$ é uma constante do gás. Suponha que, em um certo instante, $P = 8{,}0$ atm, e está crescendo a uma taxa de 0,10 atm/min, e $V = 10$ L, e está decrescendo a uma taxa de 0,15 L/min. Encontre a taxa de variação de T em relação ao tempo naquele instante, se $n = 10$ mols.

34. Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um pequeno lago e removida regularmente. Um modelo para a taxa de variação da população é dado pela equação

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

na qual r_0 é a taxa de nascimento dos peixes; P_c, a população máxima que o pequeno lago pode manter (ou seja, sua *capacidade de suporte*); e β, a porcentagem da população que é removida.

(a) Qual o valor de dP/dt que corresponde à população estável?

(b) Se o pequeno lago pode manter 10 000 peixes, a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita, 4%, encontre o nível estável da população.

(c) O que acontece se β for aumentada para 5%?

35. No estudo de ecossistemas, o modelo *predador-presa* é muitas vezes usado para estudar a interação entre as espécies. Considere uma população de lobos da tundra, dada por $W(t)$, e caribus, dada por $C(t)$, no norte do Canadá. A interação foi modelada pelas equações:

$$\frac{dc}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

(a) Que valores de dC/dt e dW/dt correspondem às populações estáveis?

(b) Como representar matematicamente a afirmação: “O caribu está extinto?”.

(c) Suponha que $a = 0{,}05$, $b = 0{,}001$, $c = 0{,}05$ e $d = 0{,}0001$. Encontre todos os pares (C, W) que levam a populações estáveis. Segundo esse modelo, é possível para as espécies viverem em harmonia, ou uma ou as duas espécies acabarão por se extinguir?

3.8 CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAL

Em muitos fenômenos naturais, quantidades crescem ou decaem a uma taxa proporcional a seu tamanho. Por exemplo, se $y = f(t)$ for o número de indivíduos em uma população de animais ou de bactérias no instante t, então parece razoável esperar que a taxa de crescimento $f'(t)$ seja proporcional à população $f(t)$; ou seja, $f'(t) = kf(t)$ para alguma constante k. De fato, em condições ideais (meio ambiente ilimitado, nutrição adequada, imunidade a doenças) o modelo matemático dado pela equação $f'(t) = kf(t)$ prevê o que realmente ocorre de modo bastante preciso. Outro exemplo ocorre na física nuclear, na qual a massa de substância radioativa decai a uma taxa proporcional à massa. Na química, a taxa de reação de primeira ordem unimolecular é proporcional à concentração da substância. Em finanças, o valor de uma conta poupança com juros contabilizados continuamente aumenta a uma taxa proporcional a este valor.

Em geral, se $y(t)$ for o valor de uma quantidade y no instante t e se a taxa de variação de y com relação a t for proporcional a seu tamanho $y(t)$ em qualquer instante, então

1

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

onde k é uma constante. A Equação 1 é às vezes chamada **lei de crescimento natural** (se $k > 0$) ou **lei de decaimento natural** (se $k < 0$). Ela é chamada **equação diferencial**, pois envolve uma função desconhecida y e sua derivada dy/dt .

Não é difícil pensar em uma solução para a Equação 1. Esta equação nos pede para encontrar uma função cuja derivada seja uma constante multiplicada por ela própria. Já encontramos funções destas neste capítulo. Qualquer função exponencial da forma $y(t) = Ce^{kt}$, onde C é uma constante, satisfaz

$$y'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = ky(t)$$

Veremos na Seção 9.4 que *qualquer* função que satisfaz $dy/dt = ky$ deve ser da forma $y = Ce^{kt}$. Para perceber o significado da constante C, observamos que

$$y(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$$

Portanto, C é o valor inicial da função.

2 **TEOREMA** As únicas soluções da equação diferencial $dy/dt = ky$ são as exponenciais da forma

$$y(t) = y(0)e^{kt}$$

CRESCIMENTO POPULACIONAL

Qual é o significado da constante de proporcionalidade k? No contexto do crescimento populacional, quando $P(t)$ for o tamanho de uma população no instante t, podemos escrever

3

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

A quantidade

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

é a taxa de crescimento dividida pelo tamanho da população; ela é chamada **taxa de crescimento relativa**. De acordo com (3), em vez de dizer "a taxa de crescimento é proporcional ao tamanho da população" poderíamos dizer "a taxa de crescimento relativa é constante". Então, (2) diz que a população com uma taxa de crescimento relativa constante deve crescer exponencialmente. Observe que a taxa de crescimento relativa k aparece como o coeficiente de t na função exponencial Ce^{kt}. Por exemplo, se

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}02P$$

e t for medido em anos, então a taxa de crescimento relativa será $k = 0{,}02$ e a população estará crescendo a uma taxa relativa de 2% ao ano. Se a população no instante 0 for P_0, então a expressão para a população será

$$P(t) = P_0e^{0{,}02t}$$

EXEMPLO 1 Use o fato de que a população mundial era 2 560 milhões em 1950 e 3 040 milhões em 1960 para modelar a população do mundo na segunda metade do século XX. (Suponha que a taxa de crescimento seja proporcional ao tamanho da população.) Qual é

a taxa de crescimento relativa? Use o modelo para estimar a população do mundo em 1993 e para prever a população no ano de 2020.

SOLUÇÃO Medimos o tempo t em anos e tomamos $t = 0$ no ano de 1950. Medimos a população $P(t)$ em milhões de pessoas. Então, $P(0) = 2\,560$ e $P(10) = 3\,040$. Como estamos supondo que $dP/dt = kP$, o Teorema 2 nos dá

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 2\,560e^{kt}$$

$$P(10) = 2\,560e^{10k} = 3\,040$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3\,040}{2\,560} \approx 0{,}017185$$

A taxa de crescimento relativa é cerca de 1,7% ao ano e o modelo é

$$P(t) = 2\,560e^{0{,}017185t}$$

Estimamos que a população mundial em 1993 era

$$P(43) = 2\,560e^{0{,}017185(43)} \approx 5\,360 \text{ milhões}$$

O modelo prevê que a população em 2020 será

$$P(70) = 2\,560e^{0{,}017185(70)} \approx 8\,524 \text{ milhões}$$

O gráfico na Figura 1 mostra que o modelo é bem acurado para o fim do século XX (os pontos representam a população real), de modo que a estimativa para 1993 é bem confiável. Mas a previsão para 2020 é mais arriscada.

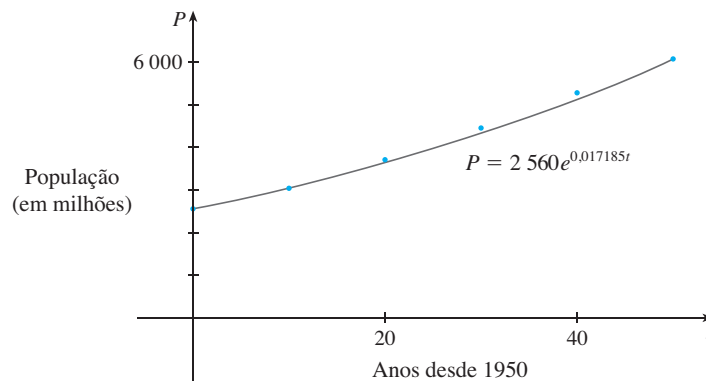



FIGURA 1
Um modelo para o crescimento da população mundial na segunda metade do século XX

□

DECAIMENTO RADIOATIVO

As substâncias radioativas decaem pela emissão espontânea de radiação. Foi determinado experimentalmente que, se $m(t)$ for a massa remanescente de uma massa inicial m_0 da substância após um tempo t, então a taxa de decaimento relativa

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

será constante. (Como dm/dt é negativo, a taxa de decaimento relativa é positiva.) Segue que

$$\frac{dm}{dt} = km$$

em que k é uma constante negativa. Em outras palavras, as substâncias radioativas decaem a uma taxa proporcional à massa restante. Isto significa que podemos usar (2) para mostrar que a massa decai exponencialmente:

$$m(t) = m_0 e^{kt}$$

Os físicos expressam a taxa de decaimento radioativo em termos da **meia-vida**, o tempo necessário para a metade de qualquer quantidade dada decair.

EXEMPLO 2 A meia-vida do rádio-226 é 1 590 anos
(a) Uma amostra de rádio-226 tem uma massa de 100 g. Encontre uma fórmula para a massa remanescente da amostra depois de t anos.
(b) Encontre a massa depois de 1 000 anos, com a precisão de um miligrama.
(c) Quando a massa será reduzida para 30 gramas?

SOLUÇÃO
(a) Seja $m(t)$ a massa de rádio-226 (em miligramas) que resta depois de t anos. Então, $dm/dt = km$ e $y(0) = 100$, de modo que (2) fornece

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

Para determinar o valor de k, usamos o fato de que $y(1\,590) = \frac{1}{2}(100)$. Logo

$$100e^{1\,590k} = 50 \qquad \text{de modo que} \qquad e^{1.590k} = \tfrac{1}{2}$$

e

$$1\,590k = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

Portanto,

$$m(t) = 100e^{-(\ln 2)t/1\,590}$$

Poderíamos usar o fato que $e^{\ln 2} = 2$ para escrever a expressão para $m(t)$ na forma alternativa

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1\,590}$$

FIGURA 2

(b) A massa depois de 1 000 anos é

$$m(1\,000) = 100e^{-(\ln 2)1\,000/1\,590} \approx 65 \text{ mg}$$

(c) Queremos encontrar o valor de t tal que $m(t) = 30$, ou seja,

$$100e^{-(\ln 2)t/1\,590} = 30 \qquad \text{ou} \qquad e^{-(\ln 2)t/1\,590} = 0{,}3$$

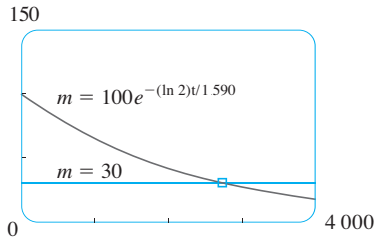
Resolvemos esta equação em t tomando o logaritmo natural em ambos os lados:

$$-\frac{\ln 2}{1\,590}\, t = \ln 0{,}3$$

Assim,

$$t = -1\,590\,\frac{\ln 0{,}3}{\ln 2} \approx 2\,762 \text{ anos}$$

□

Como uma verificação de nosso trabalho no Exemplo 2, usamos uma ferramenta gráfica para traçar o gráfico de $m(t)$ na Figura 2 junto com a reta horizontal $m = 30$. As curvas se interceptam quando $t \approx 2\,800$, e isto coincide com a resposta da parte (c).

LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

A Lei de Resfriamento de Newton afirma que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperaturas entre o objeto e o meio circundante, desde que esta diferença não seja muito grande. (A lei também se aplica ao aquecimento.) Se tomarmos $T(t)$ como a temperatura do objeto no instante t e T_s como a temperatura do meio circundante, então podemos formular a Lei de Resfriamento de Newton como uma equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

em que k é uma constante. Esta equação não é exatamente a mesma que a Equação 1. Assim, fazemos a mudança de variáveis $y(t) = T(t) - T_s$. Como T_s é constante, temos $y'(t) = T'(t)$ e a equação se torna

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Podemos então usar (2) para encontrar uma expressão para y, da qual podemos encontrar T.

EXEMPLO 3 Uma garrafa de refrigerante que está à temperatura ambiente (22 ºC) é colocada em um refrigerador, no qual a temperatura é 7 ºC. Depois de meia hora o refrigerante esfriou para 16 ºC.

(a) Qual a temperatura do refrigerante depois de mais meia hora?

(b) Quanto tempo demora para o refrigerante resfriar até 10 ºC?

SOLUÇÃO

(a) Seja $T(t)$ a temperatura do refrigerante depois de t minutos. A temperatura circundante é $T_s = 7$ ºC, de modo que a Lei de Resfriamento de Newton afirma que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 7)$$

Se tomarmos $y = T - 7$, então $y(0) = T(0) - 7 = 22 - 7 = 15$, e assim y é solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 15$$

e, por (2) temos

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 15e^{kt}$$

Foi-nos dado também que $T(30) = 16$, de forma que $y(30) = 16 - 7 = 9$ e

$$15e^{30k} = 9 \quad e^{30k} = \tfrac{3}{5}$$

Tomando logaritmos, temos

$$k = \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{30} \approx -0{,}01703$$

Logo

$$y(t) = 15e^{-0{,}01703t}$$

$$T(t) = 7 + 15e^{-0{,}01703t}$$

$$T(60) = 7 + 15e^{-0{,}01703(60)} \approx 12{,}4$$

Assim, depois de mais meia hora, o refrigerante terá resfriado para cerca de 12 ºC.

(b) Teremos $T(t) = 10$ quando

$$7 + 15e^{-0{,}01703t} = 10$$

$$e^{-0{,}01703t} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

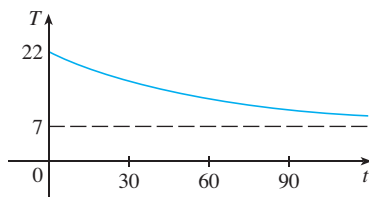
$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0{,}01703} \approx 94{,}5$$

O refrigerante é resfriado para 10 ºC depois de 1 hora e 35 minutos. □

FIGURA 3

Observe que, no Exemplo 3, temos

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}(7 + 15e^{-0{,}01703t}) = 7 + 15 \cdot 0 = 7$$

o que era de se esperar. O gráfico da função temperatura é mostrado na Figura 3.

JUROS CAPITALIZADOS CONTINUAMENTE

EXEMPLO 4 Se $ 1 000 forem investidos a 6% de juros, capitalizados anualmente, então depois de 1 ano o investimento valerá $\$1\,000(1{,}06) = \$1\,060$, depois de 2 anos valerá $\$[1\,000(1{,}06)]1{,}06 = \$1\,123{,}60$, e depois de t anos valerá $\$1\,000(1{,}06)^t$. Em geral, se uma quantia A_0 for investida a uma taxa de juros r ($r = 0{,}06$ neste exemplo), então depois de t anos, ela valerá $A_0(1 + r)^t$. Usualmente, entretanto, os juros são capitalizados com mais frequência, digamos n vezes em um ano. Então, em cada período de capitalização, a taxa de juros é r/n e existem nt períodos de capitalização em t anos, de modo que o valor do investimento é

$$A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Por exemplo, depois de três anos a 6%de juros, um investimento de $1 000 valerá

$$\$1\,000(1{,}06)^3 = \$1\,191{,}02 \qquad \text{com capitalização anual}$$

$$\$1\,000(1{,}03)^6 = \$1\,194{,}05 \qquad \text{com capitalização semestral}$$

$$\$1\,000(1{,}015)^{12} = \$1\,195{,}62 \qquad \text{com capitalização trimestral}$$

$$\$1\,000(1{,}005)^{36} = \$1\,196{,}68 \qquad \text{com capitalização mensal}$$

$$\$1\,000\left(1 + \frac{0{,}06}{365}\right)^{365 \cdot 3} = \$1\,197{,}20 \qquad \text{com capitalização diária}$$

Você pode ver que os juros pagos aumentam conforme o número de períodos de capitalização (n) aumenta. Se fizermos $n \to \infty$, então estaremos capitalizando os juros **continuamente** e o valor do investimento será

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}$$

$$= A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt}$$

$$= A_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \qquad (\text{onde } m = n/r)$$

Mas o limite nesta expressão é igual ao número e. (Veja a Equação 3.6.6.) Assim, com capitalização contínua de juros a uma taxa de juros r, a quantia depois de t anos será

$$A(t) = A_0e^{rt}$$

Se derivarmos esta função, obtemos

$$\frac{dA}{dt} = rA_0e^{rt} = rA(t)$$

que é o mesmo que dizer que, com capitalização contínua de juros, a taxa de aumento de um investimento é proporcional a seu tamanho.

Voltando ao exemplo dos $ 1 000 investidos por três anos, a 6% de juros, vemos que com a capitalização contínua dos juros, o valor do investimento será

$$A(3) = \$1\,000e^{(0{,}06)3} = \$1\,197{,}22$$

Observe quão próximo isto está da quantia que calculamos com capitalização diária, $ 1 197,20. Mas a quantia é mais fácil de calcular se usarmos capitalização contínua. □

3.8 EXERCÍCIOS

1. Uma população de protozoários se desenvolve a uma taxa de crescimento relativa constante de 0,7944 membro por dia. No dia zero, a população consistia em dois membros. Encontre o tamanho da população depois de seis dias.

2. Um habitante comum do intestino humano é a bactéria *Escherichia coli*. Uma célula desta bactéria em um meio nutriente líquido se divide em duas células a cada 20 minutos. A população inicial de uma cultura é de 60 células.

(a) Encontre a taxa de crescimento relativa.

(b) Encontre uma expressão para o número de células depois de t horas.

(c) Encontre o número de células após 8 horas.

(d) Encontre a taxa de crescimento depois de 8 horas.

(e) Quando a população atingirá 20 000 células?

3. Uma cultura de bactérias inicialmente contém 100 células e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de uma hora a população cresceu para 420.

(a) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.

(b) Encontre o número de bactérias após 3 horas.

(c) Encontre a taxa de crescimento depois de 3 horas.

(d) Quando a população atingirá 10 000 células?

4. Uma cultura de bactérias cresce a uma taxa de crescimento relativa constante. Depois de 2 horas existem 600 bactérias e depois de 8 horas a contagem é 75 000.

(a) Encontre a população inicial.

(b) Encontre uma expressão para a população depois de t horas.

(c) Encontre o número de células após 5 horas.

(d) Encontre a taxa de crescimento depois de 5 horas.

(e) Quando a população atingirá 200 000 células?

5. A tabela dá estimativas da população mundial, em milhões, de 1750 a 2000.

Ano	População	Ano	População
1750	790	1900	1 650
1800	980	1950	2 560
1850	1 260	2000	6 080

(a) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1750 e 1800 para prever a população do mundo em 1900 e 1950. Compare com os valores da tabela.

(b) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1850 e 1900 para prever a população do mundo em 1950. Compare com o valor da tabela.

(c) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1900 e 1950 para prever a população do mundo em 2000. Compare com o valor da tabela e tente explicar a discrepância.

6. A tabela dá a população da Índia, em milhões, para a segunda metade do século XX.

Ano	População
1951	361
1961	439
1971	548
1981	683
1991	846
2001	1 029

(a) Use o modelo exponencial e os valores do censo para 1951 e 1961 para prever a população em 2001. Compare com o valor da tabela.

(b) Use o modelo exponencial e os valores do censo para 1961 e 1981 para prever a população em 2001. Compare com o valor da tabela. A seguir, use este modelo para prever a população nos anos de 2010 e 2020.

(c) Trace ambas as funções exponenciais nas partes (a) e (b) com um gráfico da população real. Estes modelos são razoáveis?

7. As experiências mostram que se a reação química

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \tfrac{1}{2}O_2$$

ocorrer a 45ºC, a taxa de reação do pentóxido de dinitrogênio é proporcional à sua concentração da seguinte forma:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0{,}0005[N_2O_5]$$

(a) Encontre uma expressão para a concentração $[N_2O_5]$ depois de t segundos se a concentração inicial for C.

(b) Quanto tempo levará para que a reação reduza a concentração de N_2O_5 para 90% de seu valor original?

8. O bismuto-210 tem uma meia-vida de 5,0 dias.

(a) Uma amostra tem originalmente uma massa de 800 mg. Encontre uma fórmula para a massa remanescente depois de t dias.

(b) Encontre a massa remanescente depois de 30 dias.

(c) Quando a massa se reduzirá a 1 mg?

(d) Esboce o gráfico da função massa.

9. A meia-vida do césio-137 é 30 anos. Suponha que tenhamos uma amostra de 100 mg.

(a) Encontre a massa remanescente após t anos.

(b) Quanto da amostra restará depois de 100 anos?

(c) Depois de quanto tempo restará apenas 1 mg?

10. Uma amostra de trítio-3 decai para 94,5% de sua quantidade original depois de um ano.

(a) Qual é a meia-vida do trítio-3?

(b) Quanto tempo levaria para a amostra decair para 20% de sua quantidade original?

11. Os cientistas podem determinar a idade de objetos antigos pelo método de datação por *carbono radioativo*. O bombardeamento da parte superior da atmosfera por raios cósmicos converte o nitrogênio em um isótopo radioativo do carbono, ^{14}C, com meia-

-vida de cerva de 5 730 anos. A vegetação absorve o dióxido de carbono através da atmosfera e a vida animal assimila ^{14}C através da cadeia alimentar. Quando uma planta ou animal morre, para de repor seu carbono e a quantidade de ^{14}C começa a decrescer por decaimento radioativo. Portanto o nível de radioatividade também deve decrescer exponencialmente.

Foi descoberto que um fragmento de pergaminho tinha cerca de 74% de ^{14}C do que os materiais das plantas têm atualmente na terra. Estime a idade do papiro.

12. Uma curva passa pelo ponto $(0, 5)$ e tem a propriedade de que a inclinação da curva em todo ponto P é duas vezes a coordenada y de P. Qual é a equação da curva?

13. Um peru assado é tirado de um forno quando a sua temperatura atinge 85 ºC e ele é colocado sobre uma mesa em um cômodo em que a temperatura é 22 ºC.

(a) Se a temperatura do peru for 65 ºC depois de meia hora, qual será a temperatura depois de 45 minutos?

(b) Quando o peru terá esfriado para 40 ºC?

14. Um termômetro é tirado de uma sala na qual a temperatura é 20 ºC e levado para fora, onde a temperatura é 5 ºC. Depois de 1 minuto a leitura no termômetro é 12 ºC.

(a) Qual será a leitura no termômetro depois de mais um minuto?

(b) Quando a leitura no termômetro será 6 ºC?

15. Quando uma bebida gelada é tirada da geladeira, sua temperatura é 5 ºC. Depois de 25 minutos em uma sala a 20 ºC, sua temperatura terá aumentado para 10 ºC.

(a) Qual é a temperatura da bebida depois de 50 minutos?

(b) Quando a temperatura será 15 ºC?

16. Uma xícara de café recém coado tem a temperatura de 95 ºC em uma sala a 20 ºC. Quando sua temperatura for 70 ºC, ele estará esfriando a uma taxa de 1 ºC por minuto. Quando isto ocorre?

17. A taxa de variação da pressão atmosférica P com relação à altitude h é proporcional a P, desde que a temperatura seja constante. A 15 ºC a pressão é 101,3 kPa no nível do mar e 87,14 kPa em $h = 1\,000$ m.

(a) Qual é a pressão a uma altitude de 3 000 m?

(b) Qual é a pressão no topo do Monte McKinley, a uma altitude de 6 187 m?

18. (a) Se \$ 1 000 forem emprestados a 8% de juros, encontre as quantias devidas ao fim de três anos se os juros forem compostos (i) anualmente, (ii) trimestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente, (vi) a cada hora ou (vii) continuamente.

(b) Suponha que \$ 1 000 sejam emprestados e que os juros sejam capitalizados continuamente. Se $A(t)$ for a quantia devida depois de t anos, em que $0 \leqslant t \leqslant 3$, trace $A(t)$ para cada uma das taxas de juros 6%, 8% e 10% em uma mesma tela.

19. (a) Se \$ 3 000 forem investidos a 5% de juros, encontre o valor do investimento ao fim de 5 anos, para juros capitalizados (i) anualmente, (ii) semestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente ou (vi) continuamente.

(b) Se $A(t)$ for a quantia do investimento no instante t para o caso da capitalização contínua, escreva uma equação diferencial e uma condição inicial satisfeitas por $A(t)$.

20. (a) Quanto tempo levará para um investimento dobrar de valor se a taxa de juros for 6%, capitalizados continuamente?

(b) Qual é a taxa de juros anual equivalente?

3.9 TAXAS RELACIONADAS

Quando bombeamos ar para dentro de um balão, tanto o volume quanto o raio do balão crescem, e suas taxas de crescimento estão relacionadas. Mas é muito mais fácil medir diretamente a taxa de crescimento do volume do que a do raio.

Em um problema de taxas relacionadas, a ideia é calcular a taxa de variação de uma grandeza em termos da taxa de variação da outra (que pode ser medida mais facilmente). O procedimento é achar uma equação que relacione as duas grandezas e então usar a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados em relação ao tempo.

■ De acordo com os Princípios de Resolução de Problema discutidos no Capítulo 1, na página 65, o primeiro passo é entender o problema. Isso inclui lê-lo cuidadosamente, identificando o que foi dado e as incógnitas, e introduzir uma notação adequada.

EXEMPLO 1 Ar está sendo bombeado para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa de 100 cm^3/s. Quão rápido o raio do balão está crescendo quando o diâmetro for 50 cm?

SOLUÇÃO Vamos começar identificando duas coisas:

a *informação dada*:

a taxa de crescimento do volume do ar é 100 cm^3/s

e a *incógnita*:

a taxa de crescimento do raio quando o diâmetro é 50 cm

Para expressar matematicamente essas grandezas, introduzimos alguma *notação* sugestiva:

Seja V o volume do balão e r o seu raio.

■ O segundo estágio da resolução do problema é idealizar um esquema que vincule o que foi dado à incógnita.

A chave está em lembrar que taxas de variação são derivadas. Neste problema, o volume e o raio são ambos funções do tempo t. A taxa de crescimento do volume em relação ao tempo é a derivada dV/dt e a taxa de crescimento do raio é dr/dt. Podemos, portanto, reapresentar o que foi dado e a incógnita como a seguir:

$$\textit{Dado:} \quad \frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\textit{Incógnita:} \quad \frac{dr}{dt} \quad \text{quando } r = 25 \text{ cm}$$

Para ligar dV/dt e dr/dt primeiro relacionamos V e r pela fórmula para o volume de uma esfera:

■ Observe que, embora dV/dt seja constante, dr/dt *não* é constante.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Para usar a informação dada, derivamos cada lado dessa equação em relação a t. Para derivar o lado direito precisamos usar a Regra da Cadeia:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Agora, isolamos a incógnita:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Se colocarmos $r = 25$ e $dV/dt = 100$ nessa equação, obteremos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

O raio do balão está crescendo a uma taxa de $1/(25\pi) \approx 0{,}0127$ cm/s. □

FIGURA 1

EXEMPLO 2 Uma escada com 5 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 1m/s, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a 3 m da parede?

SOLUÇÃO Primeiro desenhe um diagrama e ponha legendas como na Figura 1. Sejam x metros a distância da base da escada à parede, e y metros a distância do topo da escada ao solo. Observe que x e y são ambos funções de t (tempo, medido em segundos).

Foi-nos dado que $dx/dt = 1$ m/s e devemos encontrar dy/dt quando $x = 3$ m (veja a Figura 2). Neste problema, a relação entre x e y é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 25$$

FIGURA 2

Derivando cada lado em relação a t usando a Regra da Cadeia, temos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

e isolando a taxa desejada, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 3$, o Teorema de Pitágoras fornece $y = 4$; logo, substituindo esses valores e $dx/dt = 1$, temos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}(1) = -\frac{3}{4} \text{ m/s}$$

O fato de dy/dt ser negativo indica que a distância do topo da escada ao solo está *decrescendo* a uma taxa de $\frac{3}{4}$ m/s. Em outras palavras, o topo da escada está deslizando para baixo a uma taxa de $\frac{3}{4}$ m/s. □

EXEMPLO 3 Um tanque de água tem a forma de um cone circular invertido, com base de raio de 2 m e altura igual a 4 m. Se a água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 2 m^3/min, encontre a taxa pela qual o nível da água estará se elevando quando a água tiver 3 m de profundidade.

FIGURA 3

SOLUÇÃO Primeiro vamos esboçar o cone e colocar legendas, como na Figura 3. Seja V, r e h o volume da água, o raio da superfície e a altura no instante t, onde t está medido em minutos.

Foi-nos dado que $dV/dt = 2$ m^3/min e devemos encontrar dh/dt quando $h = 3$ m. As grandezas V e h estão relacionadas pela equação

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

mas é muito útil expressar V como uma função apenas de h. Para eliminar r, usamos os triângulos semelhantes da Figura 3 para escrever

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

e a expressão para V torna-se

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Agora podemos derivar cada lado em relação a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

logo

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Substituindo $h = 3$ m e $dV/dt = 2$ m^3/min, temos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

O nível da água estará subindo a uma taxa de $8/(9\pi) \approx 0{,}28$ m/min. □

■ O que aprendemos nos Exemplos 1–3 que nos ajudará a resolver os problemas futuros?

ESTRATÉGIA É útil lembrar-se de alguns dos princípios de resolução de problemas do Capítulo 1, na página 65, e adaptá-los para as taxas relacionadas como demonstrou nossa experiência nos Exemplos 1–3:

1. Leia cuidadosamente o problema.
2. Se possível, faça um diagrama.
3. Introduza uma notação. Atribua símbolos para todas as grandezas que são funções do tempo.
4. Expresse a informação dada e a taxa pedida em termos das derivadas.
5. Escreva uma equação que relacione as várias grandezas do problema. Se necessário, use a geometria da situação para eliminar uma das variáveis por substituição (como no Exemplo 3).

ATENÇÃO Um erro comum é substituir a informação numérica dada (para as grandezas que variam com o tempo) cedo demais. Isso deve ser feito somente após a derivação. (O Passo 7 segue o Passo 6.) Por exemplo, no Exemplo 3 tratamos com valores genéricos de h até que finalmente, na última etapa, substituímos $h = 3$. (Se tivéssemos feito $h = 3$ antes, teríamos obtido $dV/dt = 0$, que está claramente errado.)

6. Use a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados da equação em relação a t.
7. Substitua a informação dada na equação resultante e resolva-a para determinar a taxa desconhecida.

Os exemplos a seguir são ilustrações desta estratégia.

EXEMPLO 4 O carro A segue em direção ao oeste a 90 km/h e o carro B segue rumo ao norte a 100 km/h. Ambos estão se dirigindo para a intersecção de duas estradas. A que taxa os carros se aproximam um do outro quando o carro A está a 60 m e o carro B está a 80 m da intersecção?

FIGURA 4

SOLUÇÃO Desenhamos a Figura 4, onde C é a intersecção das estradas. Em um dado instante t, seja x a distância do carro A a C, seja y a distância do carro B a C, e seja z a distância entre os carros, em que x, y e z são medidos em quilômetros.

Foi-nos dado que $dx/dt = -90$ km/h e $dy/dt = -100$ km/h. (As derivadas são negativas porque x e y são decrescentes.) Devemos encontrar dz/dt. A equação que relaciona x, y e z é dada pelo Teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Derivando cada lado em relação a t, temos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Para $x = 0{,}06$ km e $y = 0{,}08$ km, pelo Teorema de Pitágoras, $z = 0{,}1$ km; logo

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0{,}1}\,[0{,}06(-90) + 0{,}08(-100)] = -134$$

Os carros aproximam-se um do outro a uma taxa de 134 km/h. □

FIGURA 5

EXEMPLO 5 Um homem anda ao longo de um caminho reto a uma velocidade de 1,5 m/s. Um holofote localizado no chão a 6 m do caminho é mantido focalizado no homem. A que taxa o holofote está girando quando o homem está a 8 m do ponto do caminho mais próximo da luz?

SOLUÇÃO Desenhamos a Figura 5, onde x é a distância entre o homem e o ponto do caminho mais próximo ao holofote. Seja θ o ângulo entre o feixe do holofote e a perpendicular ao caminho.

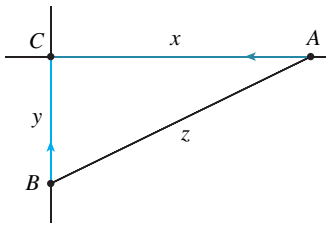
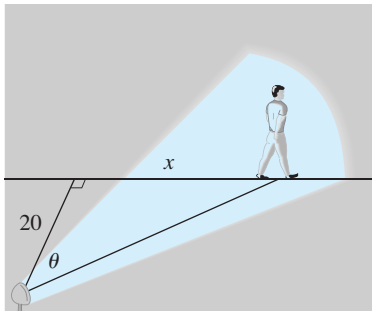
Foi-nos dado que $dx/dt = 1{,}5$ m/s e nos foi pedido para encontrar $d\theta/dt$ quando $x = 8$. A equação que relaciona x e θ pode ser escrita a partir da Figura 5:

$$\frac{x}{6} = \operatorname{tg}\theta \qquad x = 6\operatorname{tg}\theta$$

Derivando cada lado em relação a t, obtemos

$$\frac{dx}{dt} = 6\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

logo $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{6}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt} = \frac{1}{6}\cos^2\theta\,(1{,}5) = \frac{1}{4}\cos^2\theta$$

Quando $x = 8$, o comprimento do feixe é 10, logo $\cos\theta = \frac{4}{5}$ e

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

O holofote está girando a uma taxa de 0,16 rad/s. □

3.9 EXERCÍCIOS

1. Se V for o volume de um cubo com aresta de comprimento x e, à medida que o tempo passa, o cubo se expandir, encontre dV/dt em termos de dx/dt.

2. (a) Se A for a área do círculo com raio r e, à medida que o tempo passa, o círculo se expandir, encontre $dAdt$ em termos de dr/dt.
(b) Suponha que petróleo vaze por uma ruptura de um petroleiro e espalhe-se em um padrão circular. Se o raio do petróleo derramado crescer a uma taxa constante de 1 m/s, quão rápido a área do vazamento está crescendo quando o raio é igual a 30 m?

3. Cada lado de um quadrado está aumentando a uma taxa de 6 cm/s. Com que taxa a área do quadrado estará aumentando quando a área do quadrado for 16 cm^2?

4. O comprimento de um retângulo está crescendo a uma taxa de 8 cm/s e sua largura está crescendo a uma taxa de 3 cm/s. Quando o comprimento for 20 cm e a largura for 10 cm, quão rapidamente estará crescendo a área do retângulo?

5. Um tanque cilíndrico com raio 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m^3/min. Quão rápido estará aumentando a altura da água?

6. O raio de uma esfera está aumentando a uma taxa de 4 mm/s. Quão rápido o volume estará aumentando quando o diâmetro for 80 mm?

7. Se $y = x^3 + 2x$ e $dx/dt = 5$, encontre dy/dt quando $x = 2$.

8. Se $x^2 + y^2 = 25$ e $dy/dt = 6$, encontre dx/dt quando $y = 4$.

9. Se $z^2 = x^2 + y^2$, $dx/dt = 2$ e $dy/dt = 3$, encontre dz/dt quando $x = 5$ e $y = 12$.

10. Uma partícula move-se ao longo da curva $y = \sqrt{1 + x^3}$. Quando ela atinge o ponto (2, 3), a coordenada y está crescendo a uma taxa de 4 cm/s. Quão rápido está variando a coordenada x do ponto naquele instante?

11–14

(a) Quais são as quantidades dadas no problema?
(b) Qual é a incógnita?
(c) Faça um desenho da situação para qualquer instante t.
(d) Escreva uma equação que relacione as quantidades.
(e) Termine a resolução do problema.

11. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 2 km, a 800 km/h, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta quando ele está a 3 km além da estação.

12. Se uma bola de neve derrete de forma que a área de sua superfície decresce a uma taxa de 1 cm^2/min, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10 cm.

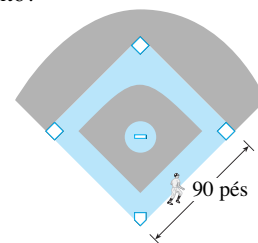
13. Uma luz de rua é colocada no topo de um poste de 5 metros de altura. Um homem com 2 m de altura anda, afastando-se do poste com velocidade de 1,5 m/s ao longo de uma trajetória reta. Com que velocidade se move a ponta de sua sombra quando ele está a 10 m do poste?

14. Ao meio-dia, o navio A está a 150 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o leste a 35 km/h, e o navio B está navegando para norte a 25 km/h. Quão rápido varia a distância entre os navios às 4 horas da tarde?

15. Dois carros iniciam o movimento partindo de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a 30 km/h e o outro para o oeste a 72 km/h. A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois?

16. Um holofote sobre o chão ilumina uma parede 12 m distante dele. Se um homem de 2 m de altura anda do holofote em direção à parede a uma velocidade de 1,6 m/s, quão rápido decresce o comprimento de sua sombra sobre a parede quando ele está a 4 m dela?

17. Um homem começa a andar para o norte a 1,2 m/s a partir de um ponto P. Cinco minutos depois uma mulher começa a andar para o sul a 1,6 m/s de um ponto a 200 m a leste de P. A que taxa as pessoas estão se distanciando 15 minutos depois de a mulher começar a andar?

18. Uma quadra de beisebol é um quadrado com 90 pés. Um batedor atinge a bola e corre em direção à primeira base com uma velocidade de 24 pés/s.
(a) A que taxa decresce sua distância da segunda base quando ele está a meio caminho da primeira base?
(b) A que taxa aumenta sua distância da terceira base no mesmo momento?

19. A altura de um triângulo cresce a uma taxa de 1 cm/min, enquanto a área do triângulo cresce a uma taxa de 2 cm^2/min. A que taxa varia a base do triângulo quando a altura é 10 cm e a área, 100 cm^2?

20. Um bote é puxado em direção ao ancoradouro por uma corda que está atada na proa do bote e que passa por uma polia sobre o ancoradouro (colocada 1 m mais alto que a proa). Se a corda for puxada a uma taxa de 1 m/s, quão rápido se aproxima o bote do ancoradouro, quando ele estiver a 8 m dele?

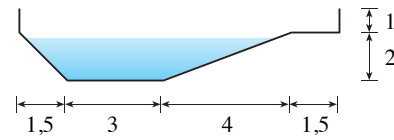
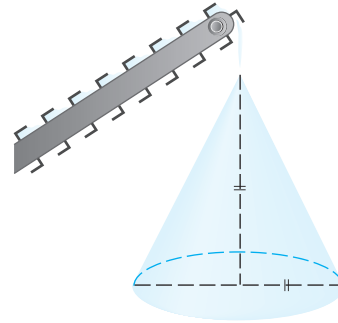
21. Ao meio-dia, um navio A está 100 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o sul a 35 km/h, e o B está indo para o norte a 25 km/h. Quão rápido estará variando a distância entre eles às 4 horas da tarde?

22. Uma partícula se move ao longo da curva $y = \sqrt{x}$. Quando a partícula passa pelo ponto (4, 2), sua coordenada x cresce a uma taxa de 3 cm/s. Quão rápido está variando a distância da partícula à origem nesse instante?

23. Está vazando água de um tanque cônico invertido a uma taxa de 10 000 cm^3/min. Ao mesmo tempo, está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6 m de altura e o diâmetro no topo é de 4 m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de 20 cm/min quando a altura da água for 2 m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.

24. Um cocho tem 6 m de comprimento, e suas extremidades têm a forma de triângulos isósceles com 1 m de base e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchido com água a uma taxa de 1,2 m^3/min, quão rápido estará se elevando o nível da água quando ela tiver 30 cm de profundidade?

25. Um cocho de água tem 10 m de comprimento e uma secção transversal com a forma de um trapezoide isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80 cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchida com água a uma taxa de 0,2 m^3/min, quão rápido estará subindo o nível da água quando ela tiver 30 cm de profundidade?

26. Uma piscina tem 5 m de largura por 10 m de comprimento, 1 m de profundidade na parte rasa, e 3 m na parte mais funda. Sua secção transversal está mostrada na figura. Se a piscina for enchida a uma taxa de 0,1 m^3/min, quão rápido estará subindo o nível da água quando sua profundidade no ponto mais profundo for de 1 m?

27. Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de 3 m^3/min, constituindo uma pilha na forma de cone com o diâmetro da base e altura sempre igual. Quão rápido cresce a altura da pilha quando está a 3 m de altura?

28. Uma pipa a 50 m acima do solo move-se horizontalmente a uma velocidade de 2 m/s. A que taxa decresce o ângulo entre a linha e a horizontal depois de 100 m de linha serem soltos?

29. Dois lados de um triângulo são 4 m e 5 m, e o ângulo entre eles está crescendo a uma taxa de 0,06 rad/s. Encontre a taxa segundo a qual a área está crescendo quando o ângulo entre os lados de comprimento fixo for $\pi/3$.

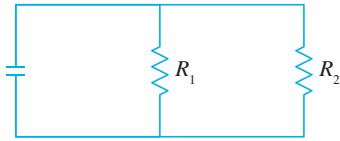
30. Quão rápido estará o ângulo entre o chão e a escada variando no Exemplo 2 quando a parte de baixo da escada estiver a 3 m da parede?

31. A Lei de Boyle afirma que quando uma amostra de gás está sendo comprimida a uma temperatura constante, a pressão P e o volume V satisfazem a equação $PV = C$, onde C é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume é de 600 cm^3, a pressão é 150 kPa e a pressão cresce a uma taxa de 20 kPa/min. A que taxa está decrescendo o volume nesse instante?

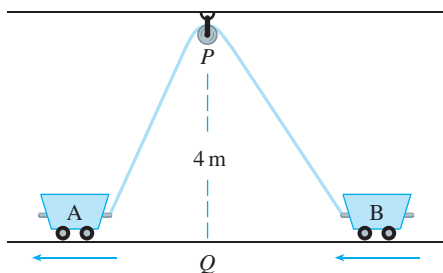
32. Quando o ar se expande adiabaticamente (sem ganhar ou perder calor), sua pressão P e volume V estão relacionados pela equação $PV^{1,4} = C$, onde C é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume é de 400 cm^3 e a pressão, 80 kPa, e está decrescendo a uma taxa de 10 kPa/min. A que taxa está crescendo o volume nesse instante?

33. Se dois resistores com resistências R_1 e R_2 estão conectados em paralelo, como na figura, então a resistência total R, medida em ohms (Ω), é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Se R_1 e R_2 estão crescendo a taxas de 0,3 Ω/s e 0,2 Ω/s, respectivamente, quão rápido estará variando R quando $R_1 = 80$ Ω e $R_2 = 100$ Ω?

34. Nos peixes, o peso B do cérebro como uma função do peso corporal W foi modelado pela função potência $B = 0{,}007W^{2/3}$, onde B e W são medidos em gramas. Um modelo para o peso corporal como uma função do comprimento corporal L (medido em centímetros) é $W = 0{,}12L^{2{,}53}$. Se, em 10 milhões de anos, o comprimento médio de uma certa espécie de peixes evoluiu de 15 cm para 20 cm a uma taxa constante, quão rápido estava crescendo o cérebro dessa espécie quando o comprimento médio era de 18 cm?

35. Dois lados de um triângulo têm comprimento 12 m e 15 m. O ângulo entre eles aumenta à taxa 2º/min. Com que velocidade estará aumentando o terceiro lado quando o ângulo dos lados de comprimento fixo estiver em 60º?

36. Duas carretas, A e B, estão conectadas por uma corda de 12 m que passa por uma polia P (veja a figura). O ponto Q no chão está 4 m diretamente abaixo de P e entre as carretas. A carreta A está sendo puxada, afastando-se de Q a uma velocidade de 0,5 m/s. Quão rápido se move a carreta B em direção a Q no instante em que A está a 3 m de Q?

37. Uma câmera de televisão está posicionada a 1 200 m de uma base de lançamento de foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa que possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete em subida. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com uma velocidade de 200 m/s quando já tiver subido 900 m.

(a) Quão rápido estará variando a distância da câmera ao foguete naquele momento?

(b) Se a câmera de televisão se mantiver sempre na direção do foguete, quão rápido estará variando o ângulo de elevação dela naquele mesmo momento?

38. Um farol está localizado em uma pequena ilha, e a distância entre ele e o ponto P mais próximo dele em uma costa reta do continente é de 3 km. Sua luz gira quatro revoluções por minuto. Quão rápido estará se movendo o feixe de luz ao longo da costa quando ele estiver a 1 km de P?

39. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 5 km e passa diretamente sobre um telescópio no chão. Quando o ângulo de elevação for $\pi/3$, este ângulo estará decrescendo a uma taxa de $\pi/6$ rad/min. Quão rapidamente estará o avião se movendo naquele instante?

40. Uma roda-gigante com raio de 10 m está girando a uma taxa de uma revolução a cada dois minutos. Quão rápido um passageiro estará subindo quando seu assento estiver 16 m acima do nível do solo?

41. Um avião voando a uma velocidade constante de 300 km/h passa sobre uma estação de radar no solo a uma altitude de 1 km e subindo em um ângulo de 30º. A que taxa está crescendo a distância do avião em relação à estação de radar 1 minuto mais tarde?

42. Duas pessoas começam a andar a partir do mesmo ponto. Uma vai para o leste a 4 km/h e a outra, para o nordeste a 2 km/h. Quão rápido está variando a distância entre as pessoas após 15 minutos?

43. Um velocista corre em uma pista circular de raio 100 m a uma velocidade constante de 7 m/s. Seu amigo está parado a uma distância de 200 m do centro da pista. Quão rápido estará variando a distância entre os amigos quando estiverem a uma distância de 200 m?

44. O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8 mm, enquanto o das horas tem 4 mm de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre a ponta dos ponteiros à 1 hora?

3.10 APROXIMAÇÕES LINEARES E DIFERENCIAIS

Vimos que uma curva fica muito perto de sua reta tangente nas proximidades do ponto de tangência. De fato, dando um *zoom* em torno de um ponto sobre o gráfico de uma função derivável, notamos que o gráfico se assemelha cada vez mais à sua reta tangente (veja a Figura 2 na Seção 2.7). Essa observação é a base para um método de encontrar valores aproximados de funções.

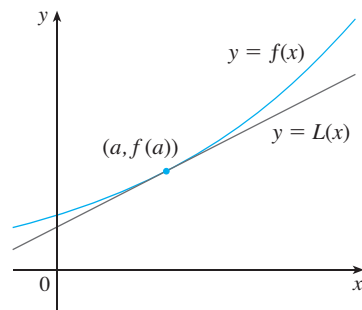



FIGURA 1

A ideia é que pode ser fácil calcular um valor $f(a)$ de uma função, mas difícil (ou mesmo impossível) calcular os valores de f em pontos próximos. Assim, nos contentamos com os valores facilmente calculados da função L, cujo gráfico é a reta tangente a f em $(a, f(a))$. (Veja a Figura 1.)

Em outras palavras, usamos a reta tangente em $(a, f(a))$ como uma aproximação para a curva $y = f(x)$ quando x está próximo de a. Uma equação dessa reta tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

e a aproximação

$$\boxed{1} \qquad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

é denominada **aproximação linear** ou **aproximação pela reta tangente** de f em a. A função linear cujo gráfico é essa reta tangente, isto é,

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é chamada **linearização** de f em a.

EXEMPLO 1 Encontre a linearização da função $f(x) = \sqrt{x + 3}$ em $a = 1$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{3{,}98}$ e $\sqrt{4{,}05}$. Essas aproximações estão superestimadas ou subestimadas?

SOLUÇÃO A derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ é

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

e assim temos $f(1) = 2$ e $f'(1) = \frac{1}{4}$. Colocando esses valores na Equação 2, vemos que a linearização é

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

A aproximação linear correspondente (1) é

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(quando } x \text{ está próximo de 1)}$$

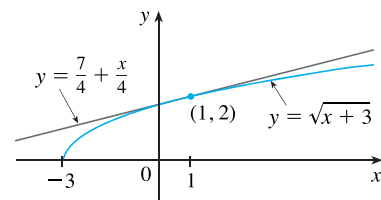
Em particular, temos

$$\sqrt{3{,}98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0{,}98}{4} = 1{,}995 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{4{,}05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1{,}05}{4} = 2{,}0125$$

A aproximação linear está ilustrada na Figura 2. Vemos que, realmente, a aproximação pela reta tangente é uma boa aproximação para a função dada quando x está próximo de 1. Vemos também que nossas aproximações são superestimadas, pois a reta tangente está acima da curva.

Naturalmente, uma calculadora nos daria aproximações para $\sqrt{3{,}98}$ e $\sqrt{4{,}05}$, mas a aproximação linear funciona *em todo um intervalo*. □

FIGURA 2

Na tabela a seguir comparamos as estimativas da aproximação linear do Exemplo 1 com os valores verdadeiros. Observe na tabela, e também na Figura 2, que a aproximação pela reta tangente dá boas estimativas quando x está próximo de 1, mas a precisão da aproximação deteriora à medida que x se afasta de 1.

	x	De $L(x)$	Valor real
$\sqrt{3,9}$	0,9	1,975	1,97484176...
$\sqrt{3,98}$	0,98	1,995	1,99499373...
$\sqrt{4}$	1	2	2,00000000...
$\sqrt{4,05}$	1,05	2,0125	2,01246117...
$\sqrt{4,1}$	1,1	2,025	2,02484567...
$\sqrt{5}$	2	2,25	2,23606797...
$\sqrt{6}$	3	2,5	2,44948974...

Quão boa é a aproximação obtida no Exemplo 1? O exemplo a seguir mostra que usando uma calculadora gráfica ou computador podemos determinar o intervalo dentro do qual uma aproximação linear fornece uma precisão especificada.

FIGURA 3

FIGURA 4

EXEMPLO 2 Para que valores de x a aproximação linear

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

tem precisão de 0,5? O que se pode dizer sobre uma precisão de 0,1?

SOLUÇÃO Uma precisão de 0,5 significa que as funções devem diferir por menos que 0,5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0,5$$

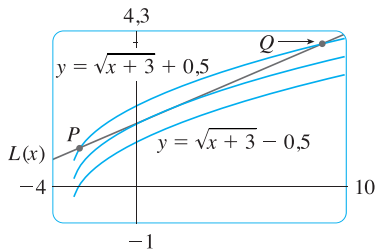
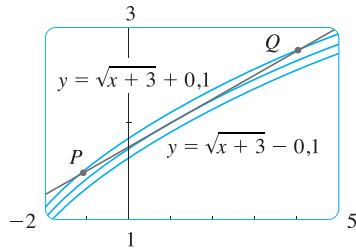
Assim, podemos escrever

$$\sqrt{x+3} - 0,5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0,5$$

o que diz que a aproximação linear deve ficar entre as curvas obtidas deslocando-se a curva $y = \sqrt{x+3}$ para cima e para baixo por uma distância de 0,5. A Figura 3 mostra que a reta tangente $y = (7 + x)/4$ intercepta a curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0,5$ em P e Q. Dando um *zoom* e usando o cursor, estimamos que a coordenada x de P é cerca de $-2,66$ e que a coordenada x de Q é cerca de 8,66. Assim, vemos do gráfico que a aproximação

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

tem precisão dentro de 0,5 quando $-2,6 < x < 8,6$. (Arredondamos a favor da segurança.)

Analogamente, da Figura 4, vemos que a aproximação tem precisão de 0,1 quando $-1,1 < x < 3,9$. □

APLICAÇÕES À FÍSICA

As aproximações lineares são muitas vezes usadas em física. Ao analisar as consequências de uma equação, um físico às vezes precisa simplificar uma função, substituindo-a por sua aproximação linear. Por exemplo, ao deduzir uma fórmula para o período de um pêndulo, os livros de física obtêm a expressão $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para a aceleração tangencial e então substituem sen θ por θ com a observação de que sen θ está muito próximo de θ se θ não for grande. (Veja, por exemplo, *Physics: Calculus*, de Eugene Hecht, 2. ed., Pacific Grove, CA, Brooks/Cole, 2000, p. 431.) Você pode verificar que a linearização da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = 0$ é $L(x) = x$, e assim a aproximação linear em 0 é

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(veja o Exercício 42). Assim, a dedução da fórmula para o período de um pêndulo usa a aproximação pela reta tangente para a função seno.

Outro exemplo ocorre na teoria da óptica, na qual os raios de luz que chegam em ângulos rasos em relação ao eixo ótico são chamados *raios paraxiais*. Na ótica paraxial (ou gaussiana), tanto sen θ como cos θ são substituídos por suas linearizações. Em outras palavras, as aproximações lineares

$$\text{sen}\,\theta \approx \theta \qquad \text{e} \qquad \cos\theta \approx 1$$

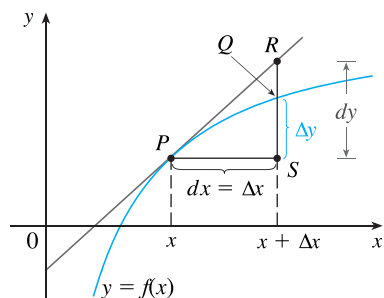
são usadas, pois θ está próximo de 0. Os resultados de cálculos feitos com essas aproximações tornam-se a ferramenta teórica básica para projetar as lentes. (Veja *Optics*, de Eugene Hecht, 4. ed., Reading, MA: Addison–Wesley, 2002, p. 154.)

Na Seção 11.11, no Volume II, vamos apresentar outras aplicações da ideia de aproximação linear na física.

DIFERENCIAIS

■ Se $dx \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da Equação 3 por dx para obter

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Já vimos equações similares antes, mas agora o lado esquerdo pode genuinamente ser interpretado como uma razão de diferenciais.

As ideias por trás das aproximações lineares são algumas vezes formuladas na terminologia e notação de *diferenciais*. Se $y = f(x)$, onde f é uma função derivável, então a **diferencial** dx é uma variável independente; isto é, a dx pode ser dado um valor real qualquer. A **diferencial** dy é então definida em termos de dx pela equação

$$dy = f'(x)dx \tag{3}$$

Assim dy é uma variável dependente; ela depende dos valores de x e dx. Se a dx for dado um valor específico e x for algum número específico no domínio de f, então o valor numérico de dy está determinado.

FIGURA 5

O significado geométrico de diferenciais está ilustrado na Figura 5. Seja $P(x, f(x))$ e $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ pontos sobre o gráfico de f e façamos $dx = \Delta x$. A variação correspondente em y é

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

A inclinação da reta tangente PR é a derivada $f'(x)$. Assim, a distância direta de S a R é $f'(x)\,dx = dy$. Consequentemente, dy representa a distância que a reta tangente sobe ou desce (a variação na linearização), enquanto Δy representa a distância que a curva $y = f(x)$ sobe ou desce quando x varia por uma quantidade dx.

EXEMPLO 3 Compare os valores de Δy e dy se $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ e x variar (a) de 2 para 2,05 e (b) de 2 para 2,01.

SOLUÇÃO

(a) Temos que

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2{,}05) = (2{,}05)^3 + (2{,}05)^2 - 2(2{,}05) + 1 = 9{,}717625$$

$$\Delta y = f(2{,}05) - f(2) = 0{,}717625$$

■ A Figura 6 mostra a função do Exemplo 3 e uma comparação de dy e Δy quando $a = 2$. A janela retangular é [1,8, 2,5] por [6, 18].

Em geral, $$dy = f'(x)dx = (3x^2 + 2x - 2)dx$$

Quando $x = 2$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$ temos

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}05 = 0{,}7$$

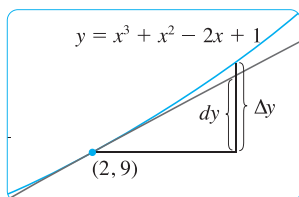
FIGURA 6

(b) $$f(2{,}01) = (2{,}01)^3 + (2{,}01)^2 - 2(2{,}01) + 1 = 9{,}140701$$

$$\Delta y = f(2{,}01) - f(2) = 0{,}140701$$

Quando $dx = \Delta x = 0{,}01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}01 = 0{,}14$$

□

Observe que no Exemplo 3 a aproximação $\Delta y \approx dy$ torna-se melhor à medida que Δx fica menor. Observe também que é muito mais fácil calcular dy do que Δy. Para as funções mais complicadas pode ser impossível calcular exatamente Δy. Nesses casos, a aproximação por diferenciais é especialmente útil.

Na notação de diferenciais, a aproximação linear (1) pode ser escrita como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por exemplo, para a função $f(x) = \sqrt{x + 3}$ do Exemplo 1, temos

$$dy = f'(x)dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Se $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, então

$$dy = \frac{0{,}05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0{,}0125$$

e
$$\sqrt{4{,}05} = f(1{,}05) \approx f(1) + dy = 2{,}0125$$

exatamente como encontramos no Exemplo 1.

Nosso exemplo final ilustra o uso de diferenciais na estimativa de erros que ocorrem em virtude de medidas aproximadas.

EXEMPLO 4 O raio de uma esfera tem 21 cm, com um possível erro de medida de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo cometido ao usar esse valor de raio para calcular o volume da esfera?

SOLUÇÃO Se o raio da esfera for r, então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se o erro na medida do valor de r for denotado por $dr = \Delta r$, então o erro correspondente no cálculo do valor de V é ΔV, que pode ser aproximado pela diferencial

$$dV = 4\pi r^2\, dr$$

Quando $r = 21$ e $dr = 0{,}05$, temos

$$dV = 4\pi(21)^2 0{,}05 \approx 277$$

O erro máximo no volume calculado é de cerca de 277 cm³. □

OBS. Embora o erro possível no Exemplo 4 possa parecer muito grande, uma ideia melhor é dada pelo **erro relativo**, que é calculado dividindo-se o erro pelo volume total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\, dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r}$$

Assim, o erro relativo no volume é cerca de três vezes o erro relativo no raio. No Exemplo 4, o erro relativo no raio é de aproximadamente $dr/r = 0{,}05/21 \approx 0{,}0024$ e produz um erro relativo de cerca de 0,007 no volume. Os erros também poderiam ser expressos como **erros percentuais** de 0,24% no raio e 0,7% no volume.

3.10 EXERCÍCIOS

1–4 Encontre a linearização $L(x)$ da função em a.

1. $f(x) = x^3,\quad a = 1$

2. $f(x) = \ln x,\quad a = 1$

3. $f(x) = \cos x,\quad a = \pi/2$

4. $f(x) = x^{3/4},\quad a = 16$

5. Encontre a aproximação linear da função $f(x) = \sqrt{1 - x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{0{,}9}$ e $\sqrt{0{,}99}$. Ilustre fazendo os gráficos de f e da reta tangente.

6. Encontre a aproximação linear da função $g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt[3]{0{,}95}$ e $\sqrt[3]{1{,}1}$. Ilustre fazendo os gráficos de g e da reta tangente.

7–10 Verifique a aproximação linear dada em $a = 0$. A seguir, determine os valores de x para os quais a aproximação linear tem precisão de 0,1.

7. $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

8. $\operatorname{tg} x \approx x$

9. $1/(1 + 2x)^4 \approx 1 - 8x$

10. $e^x \approx 1 + x$

11–14 Encontre a diferencial da função.

11. (a) $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = \ln\sqrt{1 + t^2}$

12. (a) $y = s/(1 + 2s)$ (b) $y = e^{-u} \cos u$

13. (a) $y = \dfrac{u + 1}{u - 1}$ (b) $y = (1 + r^3)^{-2}$

14. (a) $y = e^{\operatorname{tg} \pi t}$ (b) $y = \sqrt{1 + \ln z}$

15–18 (a) Encontre a diferencial dy e (b) calcule dy para os valores dados de x e dx.

15. $y = e^{x/10}, \quad x = 0, \quad dx = 0{,}1$

16. $y = 1/(x + 1), \quad x = 1, \quad dx = -0{,}01$

17. $y = \operatorname{tg} x, \quad x = \pi/4, \quad dx = -0{,}1$

18. $y = \cos x, \quad x = \pi/3, \quad dx = 0{,}05$

19–22 Calcule Δy e dy para os valores dados de x e $dx = \Delta x$. A seguir, esboce um diagrama como o da Figura 5, mostrando os segmentos de reta com comprimentos dx, dy e Δy.

19. $y = 2x - x^2, \quad x = 2, \quad \Delta x = -0{,}4$

20. $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \quad \Delta x = 1$

21. $y = 2/x, \quad x = 4, \quad \Delta x = 1$

22. $y = e^x, \quad x = 0, \quad \Delta x = 0{,}5$

23–28 Use uma aproximação linear (ou diferencial) para estimar o número dado.

23. $(2{,}001)^5$

24. $e^{-0{,}015}$

25. $(8{,}06)^{2/3}$

26. 1/1 002

27. tg 44°

28. $\sqrt{99{,}8}$

29–31 Explique em termos de aproximações lineares ou de diferenciais por que a aproximação é razoável.

29. $\sec 0{,}08 \approx 1$

30. $(1{,}01)^6 \approx 1{,}06$

31. $\ln 1{,}05 \approx 0{,}05$

32. Sejam $f(x) = (x - 1)^2$, $g(x) = e^{-2x}$
e $h(x) = 1 + \ln(1 - 2x)$.

(a) Determine as linearizações para f, g e h em $a = 0$. O que você observa? Como explicar o que aconteceu?

(b) Faça os gráficos de f, g e h e de suas aproximações lineares. Para qual função a aproximação é melhor? Para qual é pior? Justifique.

33. A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível no cálculo (a) do volume do cubo e (b) da área da superfície do cubo.

34. O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 cm.

(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada do disco.

(b) Qual o erro relativo? Qual o erro percentual?

35. A circunferência de uma esfera mede 84 cm, com erro possível de 0,5 cm.

(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada da superfície. Qual o erro relativo?

(b) Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo no volume calculado. Qual o erro relativo?

36. Use as diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05 cm de tinta a um domo com diâmetro de 50 m.

37. (a) Utilize as diferenciais para achar uma fórmula para o volume aproximado de uma fina camada cilíndrica com altura h, raio interno r e espessura Δr.

(b) Qual é o erro envolvido no uso da fórmula da parte (a)?

38. Sabe-se que um lado de um triângulo retângulo mede 20 cm de comprimento e o ângulo oposto foi medido como 30º, com um possível erro de ± 1º.

(a) Use diferenciais para estimar o erro no cálculo da hipotenusa.

(b) Qual é o erro percentual?

39. Se uma corrente I passar por um resistor com resistência R, a Lei de Ohm afirma que a queda de voltagem é $V = RI$. Se V for constante e R for medida com um certo erro, use diferenciais para mostrar que o erro relativo no cálculo de I é aproximadamente o mesmo (em módulo) que o erro relativo em R.

40. Quando o sangue flui ao longo de um vaso sanguíneo, o fluxo F (o volume de sangue por unidade de tempo que passa por um dado ponto) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso:

$$F = kR^4$$

(Isso é conhecido como a Lei de Poiseuille; mostraremos por que isso é verdadeiro na Seção 8.4.) Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter-balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue.

Mostre que a variação relativa em F é cerca de quatro vezes a variação relativa em R. Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo do sangue?

41. Estabeleça as seguintes regras para trabalhar com as diferenciais (onde c denota uma constante e u e v são funções de x).

(a) $dc = 0$ (b) $d(cu) = c\,du$

(c) $d(u + v) = du + dv$ (d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

(e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ (f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

42. Em *Physics: Calculus*, de Eugene Hecht, 2. ed., Pacific Grove, CA, Brooks/Cole, 2002, p. 431, durante a dedução da fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para o período de um pêndulo de comprimento L, o autor obtém a equação $a_T = -g$ sen θ para a aceleração tangencial do peso do pêndulo. Ele então afirma: "para ângulos pequenos, o valor de θ em radianos é muito próximo do valor de sen θ; eles diferem por menos do que 2% até cerca de 20°".

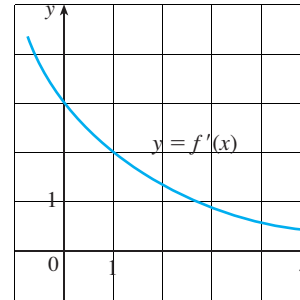
(a) Verifique a aproximação linear em 0 para a função seno:

$$\text{sen}\, x \approx x$$

(b) Use uma ferramenta gráfica para determinar os valores de x para os quais sen x e x difiram por menos do que 2%. Então, verifique a afirmação de Hecht, convertendo de radianos para graus.

43. Suponha que a única informação que temos sobre uma função f é que $f(1) = 5$ e que o gráfico de sua *derivada* é como mostrado.

(a) Use a aproximação linear para estimar $f(0{,}9)$ e $f(1{,}1)$.

(b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.

44. Suponha que não tenhamos uma fórmula para $g(x)$, mas sabemos que $g(2) = -4$ e $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para todo x.

(a) Use uma aproximação linear para estimar $g(1{,}95)$ e $g(2{,}05)$.

(b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.

PROJETO DE LABORATÓRIO

POLINÔMIOS DE TAYLOR

A aproximação pela reta tangente é a melhor aproximação de primeiro grau (linear) para $f(x)$ próximo de $x = a$, pois $f(x)$ e $L(x)$ têm a mesma taxa de variação (derivada) em a. Para uma aproximação melhor que a linear, vamos tentar uma aproximação de segundo grau (quadrática) $P(x)$. Em outras palavras, aproximaremos uma curva por uma parábola em vez de uma reta. Para nos assegurarmos de que é uma boa aproximação, estipularemos o seguinte:

(i) $P(a) = f(a)$ (P e f devem ter o mesmo valor em a.)

(ii) $P'(a) = f'(a)$ (P e f devem ter a mesma taxa de variação em a.)

(iii) $P''(a) = f''(a)$ (A inclinação de P e f deve variar segundo a mesma taxa.)

1. Encontre a aproximação quadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para a função $f(x) = \cos x$ que satisfaça as condições (i), (ii) e (iii) com $a = 0$. Faça o gráfico de P, de f e da aproximação linear $L(x) = 1$ em uma mesma tela. Comente a qualidade das aproximações P e L de f.

2. Determine os valores de x para os quais a aproximação quadrática $f(x) = P(x)$ do Problema 1 tem precisão de 0,1. [*Sugestão*: Faça o gráfico de $y = P(x)$, $y = \cos x - 0{,}1$ e $y = \cos x + 0{,}1$ na mesma tela.]

3. Para aproximar uma função f por uma função quadrática P nas proximidades de um número a, é melhor escrever P na forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Mostre que a função quadrática que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encontre a aproximação quadrática para $f(x) = \sqrt{x + 3}$ nas proximidades de a = 1. Faça os gráficos de f, da aproximação quadrática e da aproximação linear do Exemplo 2 da Seção 3.10 na mesma tela. O que você conclui?

5. Em vez de ficarmos satisfeitos com aproximações lineares ou quadráticas para $f(x)$ nas proximidades de $x = a$, vamos tentar encontrar aproximações melhores por polinômios de graus mais altos. Procuramos por um polinômio de grau n

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n e suas n primeiras derivadas tenham os mesmos valores, em $x = a$, que f e suas n primeiras derivadas. Derivando repetidamente e fazendo $x = a$, mostre que essas condições estão satisfeitas se $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ e em geral

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

onde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. O polinômio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

é chamado **polinômio de Taylor de grau *n* de *f* centrado em *a***.

6. Encontre o polinômio de Taylor de oitavo grau, centrado em $a = 0$, para a função $f(x) = \cos x$. Faça os gráficos de f junto com os polinômios de Taylor T_2, T_4, T_6, T_8 na janela retangular $[-5, 5]$ por $[-1{,}4;\ 1{,}4]$ e comente quão bem eles aproximam f.

3.11 FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Certas combinações das funções exponenciais e^x e e^{-x} surgem frequentemente em matemática e suas aplicações e, por isso, merecem nomes especiais. Elas são análogas, de muitas maneiras, às funções trigonométricas e possuem a mesma relação com a hipérbole que as funções trigonométricas têm com o círculo. Por essa razão são chamadas coletivamente de **funções hiperbólicas**, e, individualmente, de **seno hiperbólico, cosseno hiperbólico** e assim por diante.

DEFINIÇÕES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Os gráficos do seno e cosseno hiperbólico podem ser esboçados usando uma ferramenta gráfica, como nas Figuras 1 e 2.

FIGURA 1
$y = \text{senh}\, x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

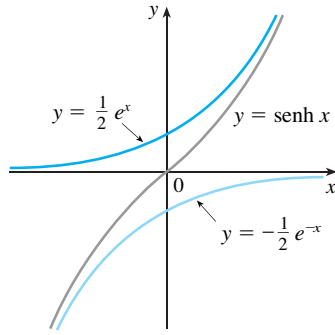
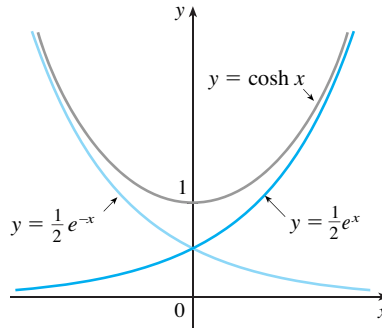



FIGURA 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

FIGURA 3
$y = \text{tgh}\, x$

FIGURA 4
Uma catenária $y = c + a \cosh(x/a)$

FIGURA 5
Onda do mar idealizada

Observe que senh possui domínio e imagem iguais a $\mathbb{R}$, enquanto cosh tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $[1, \infty)$. O gráfico de tgh está mostrado na Figura 3. Tem assíntotas horizontais $y = \pm 1$ (veja o Exercício 23).

Alguns dos usos matemáticos de funções hiperbólicas serão vistos no Capítulo 7. As aplicações na ciência e engenharia ocorrem sempre que uma entidade, como a luz, a velocidade, a eletricidade ou a radioatividade, é gradualmente absorvida ou extinguida, pois o decaimento pode ser representado por funções hiperbólicas. A aplicação mais famosa é o uso do cosseno hiperbólico para descrever a forma de um fio dependurado. Pode ser demonstrado que se um cabo flexível pesado (como uma linha de telefone ou de eletricidade) estiver suspenso entre dois pontos na mesma altura, então ele assume a forma de uma curva com a equação $y = c + a \cosh(x/a)$, chamada *catenária* (veja a Figura 4). (A palavra latina *catena* significa "cadeia".)

Outra aplicação das funções hiperbólicas ocorre na descrição das ondas do mar. A velocidade de uma onda de água com comprimento L se movendo através de uma massa de água de profundidade d é modelada pela função

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\,\text{tgh}\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

onde g é a aceleração da gravidade. (Veja a Figura 5 e o Exercício 49.)

As funções hiperbólicas satisfazem diversas identidades que são análogas às bem conhecidas identidades trigonométricas. Listaremos algumas aqui, deixando a maioria das demonstrações para os exercícios.

IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

$$\text{senh}(-x) = -\text{senh}\, x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \text{tgh}^2 x = \text{sech}^2 x$$

$$\text{senh}(x + y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x\, \text{senh}\, y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$$

EXEMPLO 1 Demonstre (a) $\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$ e (b) $1 - \text{tgh}^2 x = \text{sech}^2 x$.

SOLUÇÃO

(a)
$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(b) Vamos começar com a identidade demonstrada na parte (a):

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Se dividirmos ambos os lados por $\cosh^2 x$, obteremos

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

ou

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$ □

A identidade demonstrada no Exemplo 1(a) fornece um indício para a razão do nome "funções hiperbólicas".

FIGURA 6

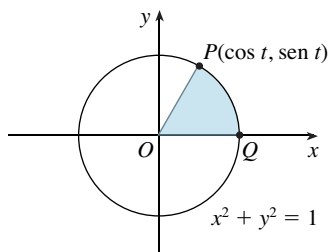
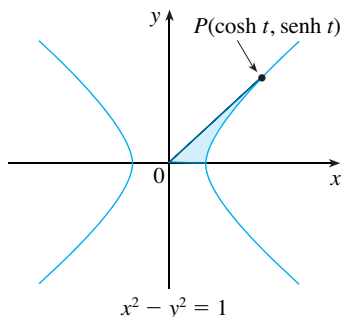
Se t for qualquer número real, então o ponto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ está sobre o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$, pois $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. De fato, t pode ser interpretado como a medida em radianos de $\angle POQ$ da Figura 6. Por essa razão, as funções trigonométricas são algumas vezes chamadas funções *circulares*.

Da mesma maneira, se t for qualquer número real, então o ponto $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ está sobre o ramo direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, pois $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ e $\cosh t \geqslant 1$. Dessa vez, t não representa a medida de um ângulo. Entretanto, resulta que t representa o dobro da área sombreada do setor hiperbólico da Figura 7, da mesma forma que no caso trigonométrico t representa o dobro da área sombreada do setor circular na Figura 6.

FIGURA 7

As derivadas das funções hiperbólicas são facilmente calculadas. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Vamos listar as fórmulas de derivação para as funções hiperbólicas na Tabela 1. As demonstrações restantes ficarão como exercícios. Observe a analogia com as fórmulas de derivação para as funções trigonométricas, mas esteja alerta — os sinais algumas vezes são diferentes.

1 DERIVADAS DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossech} x) = -\operatorname{cossech} x \operatorname{cotgh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cossech}^2 x$$

EXEMPLO 2 Qualquer uma dessas regras de derivação pode ser combinada com a Regra da Cadeia. Por exemplo,

$$\frac{d}{dx}(\cosh \sqrt{x}) = \operatorname{senh} \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{\operatorname{senh} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$ □

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Você pode ver pelas Figuras 1 e 3 que senh e tgh são funções injetoras; logo, elas têm funções inversas denotadas por senh^{-1} e tgh^{-1}. A Figura 2 mostra que cosh não é injetora,

mas quando restrita ao domínio $[0, \infty)$ torna-se injetora. A inversa da função cosseno hiperbólico está definida como a inversa dessa função restrita.

2

$$\begin{aligned} y = \operatorname{senh}^{-1}x \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{senh} y = x \\ y = \cosh^{-1}x \quad &\Leftrightarrow \quad \cosh y = x \quad \text{e} \quad y \geqslant 0 \\ y = \operatorname{tgh}^{-1}x \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{tgh} y = x \end{aligned}$$

As inversas das demais funções hiperbólicas são definidas analogamente (veja o Exercício 28).

Podemos esboçar os gráficos de senh^{-1}, $\cosh^{-1}$ e tgh^{-1} nas Figuras 8, 9 e 10 usando as Figuras 1, 2 e 3.

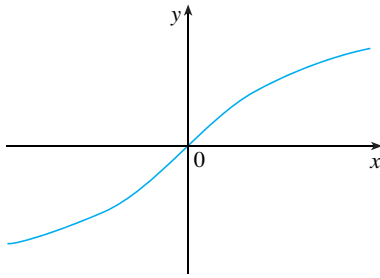



FIGURA 8 $y = \operatorname{senh}^{-1}x$
Domínio $= \mathbb{R}$ Imagem $= \mathbb{R}$

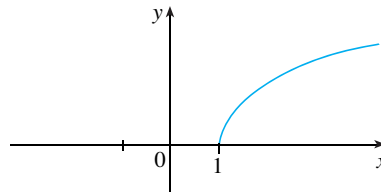



FIGURA 9 $y = \cosh^{-1}x$
Domínio $= [1, \infty)$ Imagem $= [0, \infty)$

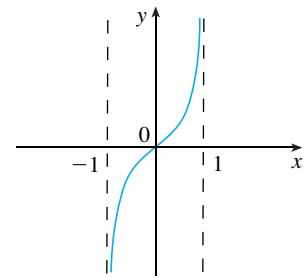



FIGURA 10 $y = \operatorname{tgh}^{-1}x$
Domínio $= (-1, 1)$ Imagem $= \mathbb{R}$

Uma vez que as funções hiperbólicas estão definidas em termos das funções exponenciais, não é surpreendente descobrir que as das funções hiperbólicas inversas podem ser expressas em termos de logaritmos. Especificamente, temos:

■ A Fórmula 3 está demonstrada no Exemplo 3. As demonstrações das Fórmulas 4 e 5 são pedidas nos Exercícios 26 e 27.

3 $$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

4 $$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

5 $$\operatorname{tgh}^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

EXEMPLO 3 Mostre que $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

SOLUÇÃO Seja $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Então

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

logo

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

ou, multiplicando por e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Isso é realmente uma equação quadrática em e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

Resolvendo com a fórmula quadrática, obtemos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Observe que $e^y > 0$, mas $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ (pois $x < \sqrt{x^2 + 1}$). Assim, o sinal de menos é inadmissível e temos

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Consequentemente, $$y = \ln(e^y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(Veja o Exercício 25 para outro método.) □

■ Observe que as fórmulas para as derivadas de $\text{tgh}^{-1}x$ e $\text{cotgh}^{-1}x$ parecem idênticas. Mas os domínios dessas funções não têm nenhum ponto em comum: $\text{tgh}^{-1}x$ é definida para $|x| < 1$, enquanto $\text{cotgh}^{-1}x$ é definida para $|x| > 1$.

DERIVADAS DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

$$\frac{d}{dx}(\text{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\text{cossech}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tgh}^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\text{cotgh}^{-1} x) = -\frac{1}{1 - x^2}$$

As funções hiperbólicas inversas são todas deriváveis, pois as funções hiperbólicas são deriváveis. As fórmulas na Tabela 6 podem ser demonstradas pelo método para as funções inversas ou derivando as Fórmulas 3, 4 e 5.

EXEMPLO 4 Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\text{senh}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

SOLUÇÃO 1 Seja $y = \text{senh}^{-1}x$. Então, $\text{senh}\, y = x$. Se derivarmos essa equação implicitamente em relação a x, obteremos

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Uma vez que $\cosh^2 y - \text{senh}^2 y = 1$ e $\cosh y \geqslant 0$, temos $\cosh y = \sqrt{1 + \text{senh}^2 y}$, logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUÇÃO 2 Da Equação 3 (demonstrada no Exemplo 3), temos

$$\frac{d}{dx}(\text{senh}^{-1} x) = \frac{d}{dx}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{d}{dx}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ □

EXEMPLO 5 Encontre $\dfrac{d}{dx}[\text{tgh}^{-1}(\text{sen}\, x)]$.

SOLUÇÃO Usando a Tabela 6 e a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}[\text{tgh}^{-1}(\text{sen}\, x)] = \frac{1}{1-(\text{sen}\, x)^2}\frac{d}{dx}(\text{sen}\, x)$$

$$= \frac{1}{1-\text{sen}^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x$$ □

3.11 EXERCÍCIOS

1–6 Encontre o valor numérico de cada expressão.

1. (a) senh 0 (b) cosh 0

2. (a) tgh 0 (b) tgh 1

3. (a) senh(ln 2) (b) senh 2

4. (a) cosh 3 (b) cosh(ln 3)

5. (a) sech 0 (b) $\cosh^{-1} 1$

6. (a) senh 1 (b) $\text{senh}^{-1} 1$

7–19 Demonstre a identidade.

7. $\text{senh}(-x) = -\text{senh}\, x$
(Isso mostra que senh é uma função ímpar.)

8. $\cosh(-x) = \cosh x$
(Isso mostra que cosh é uma função par.)

9. $\cosh x + \text{senh}\, x = e^x$

10. $\cosh x - \text{senh}\, x = e^{-x}$

11. $\text{senh}(x+y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x\, \text{senh}\, y$

12. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$

13. $\text{cotg}^2 x - 1 = \text{cossech}^2 x$

14. $\text{tgh}(x+y) = \dfrac{\text{tgh}\, x + \text{tgh}\, y}{1 + \text{tgh}\, x\, \text{tgh}\, y}$

15. $\text{senh}\, 2x = 2\, \text{senh}\, x \cosh x$

16. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \text{senh}^2 x$

17. $\text{tgh}(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

18. $\dfrac{1+\text{tgh}\, x}{1-\text{tgh}\, x} = e^{2x}$

19. $(\cosh x + \text{senh}\, x)^n = \cosh nx + \text{senh}\, nx$
(n qualquer número real)

20. Se $\text{tgh}\, x = \frac{12}{13}$, encontre os valores das outras funções hiperbólicas em x.

21. Se $\cosh x = \frac{5}{3}$ e $x > 0$, encontre os valores das outras funções hiperbólicas em x.

22. (a) Use os gráficos de senh, cosh e tgh das Figuras 1–3 para fazer os gráficos de cossech, sech e cotgh.
(b) Verifique os gráficos que você esboçou na parte (a) usando uma ferramenta gráfica para produzi-los.

23. Use as definições das funções hiperbólicas para achar os seguintes limites.
(a) $\lim_{x\to\infty} \text{tgh}\, x$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \text{tgh}\, x$
(c) $\lim_{x\to\infty} \text{senh}\, x$ (d) $\lim_{x\to-\infty} \text{senh}\, x$
(e) $\lim_{x\to\infty} \text{sech}\, x$ (f) $\lim_{x\to\infty} \text{cotgh}\, x$
(g) $\lim_{x\to 0^+} \text{cotgh}\, x$ (h) $\lim_{x\to 0^-} \text{cotgh}\, x$
(i) $\lim_{x\to-\infty} \text{cossech}\, x$

24. Demonstre as fórmulas dadas na Tabela 1 para as derivadas das funções (a) cosh, (b) tgh, (c) cossech, (d) sech e (e) cotgh.

25. Dê uma solução alternativa para o Exemplo 3 tomando $y = \text{senh}^{-1} x$ e então usando o Exercício 9 e o Exemplo 1(a), com x substituído por y.

26. Demonstre a Equação 4.

27. Demonstre a Equação 5 usando (a) o método do Exemplo 3 e (b) o Exercício 18, com x substituído por y.

28. Para cada uma das seguintes funções (i) dê uma definição como aquelas em (2), (ii) esboce o gráfico e (iii) encontre uma fórmula similar à Equação 3.
(a) cossech^{-1} (b) sech^{-1} (c) cotgh^{-1}

29. Demonstre as fórmulas dadas na Tabela 6 para as derivadas das funções a seguir

(a) $\cosh^{-1}$ (b) tgh^{-1} (c) $\operatorname{cossech}^{-1}$
(d) sech^{-1} (e) $\operatorname{cotgh}^{-1}$

30–47 Encontre a derivada. Simplifique quando possível.

30. $f(x) = e^x \operatorname{senh} x$

31. $f(x) = \operatorname{tgh} 3x$

32. $g(x) = \cosh^4 x$

33. $h(x) = \cosh(x^4)$

34. $y = x \operatorname{cotgh}(1 + x^2)$

35. $y = e^{\cosh 3x}$

36. $f(t) = \operatorname{cossech} t(1 - \ln \operatorname{cosseh} t)$

37. $f(t) = \operatorname{sech}^2(e^t)$

38. $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$

39. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tgh} x)$

40. $y = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x}}$

41. $G(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

42. $y = x^2 \operatorname{senh}^{-1}(2x)$

43. $y = \operatorname{tgh}^{-1}\sqrt{x}$

44. $y = x \operatorname{tgh}^{-1} x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

45. $y = x \operatorname{senh}^{-1}(x/3) - \sqrt{9 + x^2}$

46. $y = \operatorname{sech}^{-1}\sqrt{1 - x^2}, \quad x > 0$

47. $y = \operatorname{cotgh}^{-1}\sqrt{x^2 + 1}$

---

48. O Gateway Arch em St. Louis foi projetado por Eero Saarinen e construído usando a equação

$$y = 211{,}49 - 20{,}96 \cosh 0{,}03291765x$$

para a curva central do arco, em que x e y são medidos em metros e $|x| \leqslant 91{,}20$.

(a) Trace a curva central.
(b) Qual é a altura do arco em seu centro?
(c) Em quais pontos a altura é 100 m?
(d) Qual é a inclinação do arco nos pontos da parte (c)?

49. Se uma onda de comprimento L se move à velocidade v em um corpo de água de profundidade d, então

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

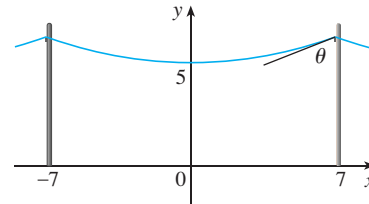
em que g é a aceleração da gravidade. (Veja a Figura 5.) Explique por que a aproximação

$$v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

é adequada para águas profundas.

50. Um cabo flexível pendurado sempre tem a forma de uma catenária $y = c + a \cosh(x/a)$, em que c e a são constantes e a > 0 (veja a Figura 4 e o Exercício 52). Faça o gráfico de vários membros da família de funções $y = a \cosh(x/a)$. Como o gráfico muda quando a varia?

51. Uma linha de telefone é pendurada entre dois postes separados 14 m, na forma da catenária $y = 20 \cosh(x/20) - 15$, em que x e y são medidas em metros.

(a) Encontre a inclinação dessa curva onde ela encontra o poste à direita.
(b) Encontre o ângulo θ entre a reta tangente e o poste.

52. Usando os princípios da física, pode ser mostrado que quando um cabo é pendurado entre dois postes, ele toma a forma de uma curva $y = f(x)$, que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

na qual ρ é a densidade linear do cabo, g é a aceleração da gravidade e T é a tensão no cabo no ponto mais baixo, e o sistema de coordenada é apropriadamente escolhido. Verifique que a função

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right)$$

é uma solução dessa equação diferencial.

53. (a) Mostre que qualquer função da forma

$$y = A \operatorname{senh} mx + B \cosh mx$$

satisfaz a equação diferencial $y'' = m^2 y$.

(b) Encontre $y = y(x)$ tal que $y = 9y''$, $y(0) = -4$, e $y'(0) = 6$.

54. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{senh} x}{e^x}$.

55. Em quais pontos da curva $y = \cosh x$ a tangente tem inclinação 1?

56. Se $x = \ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)$, mostre que $\sec \theta = \cosh x$.

57. Mostre que se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então existem números α e β tais que $ae^x + be^{-x}$ é igual à $\alpha \operatorname{senh}(x + \beta)$ ou à $\alpha \cosh(x + \beta)$. Em outras palavras, que quase todas as funções da forma $f(x) = ae^x + be^{-x}$ são funções seno ou cosseno hiperbólicas expandidas e deslocadas.

3 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Enuncie cada regra da derivação tanto em símbolos quanto em palavras.
(a) A Regra da Potência
(b) A Regra da Multiplicação por Constante
(c) A Regra da Soma
(d) A Regra da Diferença
(e) A Regra do Produto
(f) A Regra do Quociente
(g) A Regra da Cadeia

2. Determine a derivada de cada função.
(a) $y = x^n$ (b) $y = e^x$ (c) $y = a^x$
(d) $y = \ln x$ (e) $y = \log_a x$ (f) $y = \operatorname{sen} x$
(g) $y = \cos x$ (h) $y = \operatorname{tg} x$ (i) $y = \operatorname{cossec} x$
(j) $y = \sec x$ (k) $y = \operatorname{cotg} x$ (l) $y = \operatorname{sen}^{-1}x$
(m) $y = \cos^{-1}x$ (n) $y = \operatorname{tg}^{-1}x$ (o) $y = \operatorname{senh} x$
(p) $y = \cosh x$ (q) $y = \operatorname{tgh} x$ (r) $y = \operatorname{senh}^{-1}x$
(s) $y = \cosh^{-1}x$ (t) $y = \operatorname{tgh}^{-1}x$

3. (a) Como é definido o número e?
(b) Expresse e como um limite.
(c) Por que a função exponencial natural $y = e^x$ é usada mais frequentemente em cálculo do que as outras funções exponenciais $y = a^x$?
(d) Por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais frequentemente em cálculo do que as demais funções logarítmicas $y = \log_a x$?

4. (a) Explique como funciona a derivação implícita.
(b) Explique como funciona a derivação logarítmica.

5. (a) Escreva uma expressão para a linearização de f em a.
(b) Se $y = f(x)$, escreva uma expressão para a diferencial dy.
(c) Se $dx = \Delta x$, desenhe uma figura mostrando o significado geométrico de Δy e dy.

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se f e g forem deriváveis, então
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Se f e g forem deriváveis, então
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Se f e g forem diferenciáveis, então
$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

4. Se f for derivável, então $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Se f for derivável, então $\dfrac{d}{dx}f(\sqrt{x}) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Se $y = e^2$, então $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg}^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. Se $g(x) = x^5$, então $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

12. Uma equação de reta tangente à parábola $y = x^2$ em $(-2, 4)$ é $y - 4 = 2x(x + 2)$.

EXERCÍCIOS

1–50 Calcule y'.

1. $y = (x^4 - 3x^2 + 5)^3$

2. $y = \cos(\text{tg}\, x)$

3. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

4. $y = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{2x + 1}}$

5. $y = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

7. $y = e^{\text{sen}\, 2\theta}$

8. $y = e^{-t}(t^2 - 2t + 2)$

9. $y = \dfrac{t}{1 - t^2}$

10. $y = e^{mx} \cos nx$

11. $y = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$

12. $y = (\text{arcsen}\, 2x)^2$

13. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

14. $y = \dfrac{1}{\text{sen}(x - \text{sen}\, x)}$

15. $xy^4 + x^2y = x + 3y$

16. $y = \ln(\text{cossec}\, 5x)$

17. $y = \dfrac{\sec 2\theta}{1 + \text{tg}\, 2\theta}$

18. $x^2 \cos y + \text{sen}\, 2y = xy$

19. $y = e^{cx}(c\, \text{sen}\, x - \cos x)$

20. $y = \ln(x^2 e^x)$

21. $y = 3^{x \ln x}$

22. $y = \sec(1 + x^2)$

23. $y = (1 - x^{-1})^{-1}$

24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

25. $\text{sen}\,(xy) = x^2 - y$

26. $y = \sqrt{\text{sen}\, \sqrt{x}}$

27. $y = \log_5(1 + 2x)$

28. $y = (\cos x)^x$

29. $y = \ln \text{sen}\, x - \frac{1}{2}\text{sen}^2 x$

30. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{(2x + 1)^3(3x - 1)^5}$

31. $y = x\, \text{tg}^{-1}(4x)$

32. $y = e^{\cos x} + \cos\,(e^x)$

33. $y = \ln |\sec 5x + \text{tg}\, 5x|$

34. $y = 10^{\text{tg}\, \pi\theta}$

35. $y = \text{cotg}(3x^2 + 5)$

36. $y = \sqrt{t \ln(t^4)}$

37. $y = \text{sen}\left(\text{tg}\sqrt{1 + x^3}\right)$

38. $y = \text{arctg}\left(\text{arcsen}\sqrt{x}\right)$

39. $y \;\; \text{tg}^2(\text{sen}\, \theta)$

40. $xe^y = y - 1$

41. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$

42. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$

43. $y = x\, \text{senh}(x^2)$

44. $y = \dfrac{\text{sen}\, mx}{x}$

45. $y = \ln(\cosh 3x)$

46. $y = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$

47. $y = \cosh^{-1}(\text{senh}\, x)$

48. $y = x\, \text{tgh}^{-1}\sqrt{x}$

49. $y = \cos\left(e^{\sqrt{\text{tg}\, 3x}}\right)$

50. $y = \text{sen}^2\left(\cos\sqrt{\text{sen}\, \pi x}\right)$

51. Se $f(t) = \sqrt{4t + 1}$ encontre $f''(2)$.

52. Se $g(\theta) = \theta\, \text{sen}\, \theta$, determine $g''(\pi/6)$.

53. Encontre y'' se $x^6 + y^6 = 1$.

54. Encontre $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = 1/(2 - x)$.

55. Use a indução matemática (página 66) para mostrar que se $f(x) = xe^x$ então $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

56. Calcule $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{t^3}{\text{tg}^3(2t)}$

57–59 Encontre uma equação da tangente à curva no ponto dado.

57. $y = 4\, \text{sen}^2 x, \quad (\pi/6, 1)$

58. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad (0, -1)$

59. $y = \sqrt{1 + 4\, \text{sen}\, x}, \quad (0, 1)$

60–61 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto dado.

60. $x^2 + 4xy + y^2 = 13, \quad (2, 1)$

61. $y = (2 + x)e^{-x}, \quad (0, 2)$

62. Se $f(x) = xe^{\text{sen}\, x}$, encontre $f'(x)$. Faça o gráfico de f e f' na mesma tela e comente.

63. (a) Se $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, encontre $f'(x)$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = x\sqrt{5 - x}$ nos pontos $(1, 2)$ e $(4, 4)$.
(c) Ilustre a parte (b) fazendo o gráfico da curva e das retas tangentes.
(d) Verifique se a resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

64. (a) Se $f(x) = 4x - \text{tg}\, x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encontre f' e f''.
(b) Verifique se as respostas da parte (a) são razoáveis comparando os gráficos de f, f' e f''.

65. Em quais pontos da curva $y = \text{sen}\, x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, a reta tangente é horizontal?

66. Encontre os pontos sobre a elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ onde a reta tangente tem inclinação 1.

67. Se $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, mostre que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}$$

68. (a) Derivando a fórmula do ângulo duplo

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

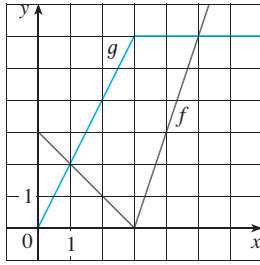
obtenha a fórmula do ângulo duplo para a função seno.
(b) Derivando a fórmula de adição

$$\text{sen}(x + a) = \text{sen}\, x \cos a + \cos x\, \text{sen}\, a$$

obtenha a fórmula de adição para a função cosseno.

69. Suponha que $h(x) = f(x)g(x)$ e $F(x) = f(g(x))$, onde $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ e $f'(5) = 11$. Encontre (a) $h'(2)$ e (b) $F'(2)$.

70. Se f e g forem as funções cujos gráficos estão a seguir, seja $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ e $C(x) = f(g(x))$.

Encontre (a) $P'(2)$, (b) $Q'(2)$ e (c) $C'(2)$.

71–78 Encontre f' em termos de g'.

71. $f(x) = x^2 g(x)$

72. $f(x) = g(x^2)$

73. $f(x) = [g(x)]^2$

74. $f(x) = g(g(x))$

75. $f(x) = g(e^x)$

76. $f(x) = e^{g(x)}$

77. $f(x) = \ln |g(x)|$

78. $f(x) = g(\ln x)$

79–81 Encontre h' em termos de f' e g'.

79. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

80. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

81. $h(x) = f(g(\text{sen } 4x))$

82. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$ na janela retangular $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.
(b) Em qual intervalo a taxa de variação média é maior: $[1, 2]$ ou $[2, 3]$?
(c) Em qual valor de x a taxa de variação instantânea é maior: $x = 2$ ou $x = 5$?
(d) Verifique sua estimativa visual na parte (c) calculando $f'(x)$ e comparando os valores numéricos de $f'(2)$ e $f'(5)$.

83. Em qual ponto sobre a curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ a reta tangente é horizontal?

84. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = e^x$ que seja paralela à reta $x - 4y = 1$.
(b) Encontre uma equação da tangente à curva $y = e^x$ que passe pela origem.

85. Encontre uma parábola $y = ax^2 + bx + c$ que passe pelo ponto $(1, 4)$ e cujas retas tangentes em $x = -1$ e $x = 5$ tenham inclinações 6 e -2, respectivamente.

86. A função $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, onde a, b e K são constantes positivas e $b > a$, é usada para modelar a concentração de uma droga injetada na corrente sanguínea no instante t.
(a) Mostre que $\lim_{t \to \infty} C(t) = 0$.
(b) Encontre $C'(t)$, a taxa segundo a qual a droga é eliminada da circulação.
(c) Quando essa taxa é igual a zero?

87. Uma equação de movimento da forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa uma oscilação amortecida de um objeto. Encontre a velocidade e a aceleração do objeto.

88. Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal de forma que sua coordenada no instante t seja $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geq 0$, onde b e c são constantes positivas.
(a) Encontre as funções velocidade e aceleração.
(b) Mostre que a partícula se move sempre no sentido positivo.

89. Uma partícula se move sobre uma reta vertical de forma que sua coordenada no instante t seja $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geq 0$.
(a) Encontre as funções velocidade e aceleração.
(b) Quando a partícula se move para cima? E para baixo?
(c) Encontre a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 3$.
(d) Trace as funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leq t \leq 3$.
(e) Quando a partícula está acelerando? Quando está freando?

90. O volume de um cone circular reto é $V = \pi r^2 h/3$, onde r é o raio da base e h é a altura.
(a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à altura se o raio for mantido constante.
(b) Encontre a taxa de variação do volume em relação ao raio se a altura for mantida constante.

91. A massa de parte de um fio é $x(1 + \sqrt{x})$ kg, onde x é medido em metros a partir de uma extremidade do fio. Encontre a densidade linear do fio quando $x = 4$ m.

92. O custo, em dólares, da produção de x unidades de um certo bem é

$$C(x) = 920 + 2x - 0{,}02x^2 + 0{,}00007x^3$$

(a) Encontre a função custo marginal.
(b) Encontre $C'(100)$ e explique seu significado.
(c) Compare $C'(100)$ com o custo da produção do 101º item.

93. Uma cultura de bactérias contém inicialmente 200 células e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de meia hora a população aumentou para 360 células.
(a) Encontre o número de bactérias depois de t horas.
(b) Encontre o número de bactérias depois de 4 horas.
(c) Encontre a taxa de crescimento depois de 4 horas.
(d) Quando a população atingirá 10 000?

94. O cobalto-60 tem a meia-vida de 5,24 anos.
(a) Encontre a massa remanescente de uma amostra de 100 mg depois de 20 anos.
(b) Quanto tempo levaria para a massa decair para 1 mg?

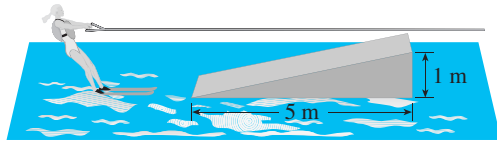
95. Seja $C(t)$ a concentração de uma droga na corrente sanguínea. À medida que o corpo elimina a droga, $C(t)$ diminui a uma taxa que é proporcional à quantidade da droga presente naquele instante. Assim, $C'(t) = -kC(t)$, em que k é um número positivo chamado *constante de eliminação* da droga.
(a) Se C_0 for a concentração no instante $t = 0$, encontre a concentração no instante t.
(b) Se o corpo eliminar a metade da droga em 30 horas, quanto tempo levará para eliminar 90% da droga?

96. Uma xícara de chocolate quente tem a temperatura de 80 ºC em uma sala mantida a 20 ºC. Depois de meia hora, o chocolate quente esfriou para 60 ºC.
(a) Qual a temperatura do chocolate depois de mais meia hora?
(b) Quando o chocolate terá esfriado para 40 ºC?

97. O volume de um cubo cresce a uma taxa de 10 cm^3/min. Com que rapidez estará crescendo sua área quando o comprimento de uma das arestas for 30 cm?

98. Um copo de papel tem a forma de um cone com 10 cm de altura e 3 cm de raio (no topo). Se for colocada água dentro do copo a uma taxa de 2 cm^3/s, com que rapidez o nível da água se elevará quando ela tiver 5 cm de profundidade?

99. Um balão sobe a uma velocidade constante de 2 m/s e um rapaz anda de bicicleta ao longo de uma estrada reta a uma velocidade de 5 m/s. Ao passar sobre o ciclista o balão está 15 m acima dele. Com que velocidade cresce a distância entre o balão e o rapaz 3 segundos mais tarde?

100. Uma esquiadora aquática sobe a rampa mostrada na figura a uma velocidade de 10 m/s. Com que velocidade ela estará subindo quando deixar a rampa?

101. O ângulo de elevação do Sol está decrescendo a uma taxa de 0,25 rad/h. Com que velocidade está crescendo a sombra de um prédio de 400 metros de altura quando o ângulo de elevação do Sol é $\pi/6$?

102. (a) Encontre a aproximação linear para $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ nas proximidades de 3.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico de f e da aproximação linear.
(c) Para quais valores de x a aproximação linear tem precisão de 0,1?

103. (a) Encontre a linearização de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ em $a = 0$. Determine a aproximação linear correspondente e use-a para dar um valor aproximado de $\sqrt[3]{1{,}03}$.
(b) Determine os valores de x para os quais a aproximação linear dada na parte (a) tem precisão de 0,1.

104. Calcule dy se $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ e $dx = 0{,}2$.

105. Uma janela tem o formato de um quadrado com um semicírculo em cima. A base da janela mede 60 cm com um possível erro na medida de 0,1 cm. Use as diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo da área da janela.

106–108 Expresse o limite como uma derivada e calcule-o.

106. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{17} - 1}{x - 1}$

107. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

108. $\lim_{\theta \to \pi/3} \dfrac{\cos \theta - 0{,}5}{\theta - \pi/3}$

109. Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$.

110. Suponha que f seja uma função derivável tal que $f(g(x)) = x$ e $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Mostre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

111. Encontre $f'(x)$ sabendo-se que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

112. Mostre que o comprimento da parte de qualquer reta tangente à astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ cortada pelos eixos coordenados é constante.

Antes de você olhar todo o exemplo, cubra a solução e tente resolvê-lo sozinho.

EXEMPLO 1 Quantas retas são tangentes a ambas as parábolas $y = -1 - x^2$ e $y = 1 + x^2$? Encontre as coordenadas dos pontos nos quais essas tangentes tocam as parábolas.

SOLUÇÃO É essencial fazer o diagrama para este problema. Assim, esboçamos as parábolas $y = 1 + x^2$ (que é a parábola-padrão $y = x^2$ deslocada uma unidade para cima) e $y = -1 - x^2$ (obtida refletindo-se a primeira parábola em torno do eixo x). Se tentarmos traçar uma reta tangente a ambas as parábolas, logo descobriremos que existem somente duas possibilidades, conforme ilustrado na Figura 1.

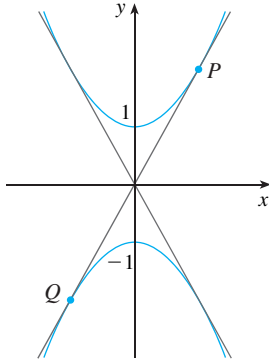



FIGURA 1

Seja P um ponto no qual uma dessas tangentes toca a parábola de cima e seja a sua coordenada x. (A escolha de notação para a incógnita é importante. Naturalmente, poderíamos ter usado b, c, x_0 ou x_1 em vez de a. Contudo, não é recomendável usar x no lugar de a, pois ele poderia ser confundido com a variável x da equação da parábola.) Então, uma vez que P está sobre a parábola $y = 1 + x^2$, sua coordenada y deve ser $1 + a^2$. Em virtude da simetria mostrada na Figura 1, as coordenadas do ponto Q onde a tangente toca a parábola de baixo devem ser $(-a, -(1 + a^2))$.

Para usar a informação dada de que a reta é uma tangente, equacionamos a inclinação da reta PQ como a inclinação da reta tangente em P. Temos que

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}$$

Se $f(x) = 1 + x^2$, então a inclinação da reta tangente em P é $f'(a) = 2a$. Dessa forma, a condição que precisamos usar é

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a$$

Resolvendo essa equação, obtemos $1 + a^2 = 2a^2$, logo $a^2 = 1$ e $a = \pm 1$. Portanto, os pontos são $(1, 2)$ e $(-1, -2)$. Por simetria, os pontos remanescentes são $(-1,2)$ e $(1,-2)$. □

EXEMPLO 2 Para quais valores de c a equação $\ln x = cx^2$ tem exatamente uma solução?

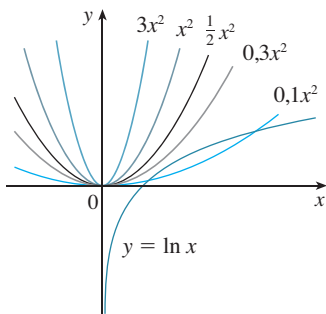
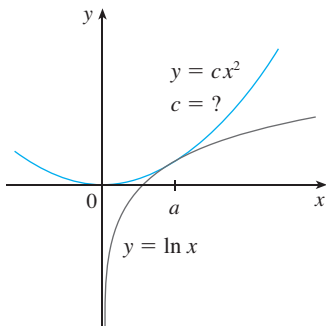
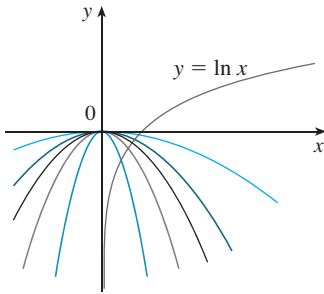
SOLUÇÃO Um dos princípios mais importantes na resolução de problemas é fazer um diagrama, mesmo que o problema dado não mencione explicitamente uma situação geométrica. O presente problema pode ser reformulado geometricamente da seguinte forma: para quais valores de c a curva $y = \ln x$ intercepta a curva $y = cx^2$ em exatamente um ponto?

FIGURA 2

Vamos começar fazendo os gráficos de $y = \ln x$ e $y = cx^2$ para os diversos valores de c. Sabemos que, para $c \neq 0$, $y = cx^2$ é uma parábola que se abre para cima se $c > 0$ e para baixo se $c < 0$. A Figura 2 mostra as parábolas $y = cx^2$ para vários valores positivos de c. A maior parte delas não intercepta $y = \ln x$, e uma intercepta duas vezes. Suspeitamos que deve haver um valor de c (em algum lugar entre 0,1 e 0,3) para o qual as curvas se interceptam exatamente uma vez, como na Figura 3.

FIGURA 3

Para encontrar aquele valor particular de c, seja a a coordenada x do único ponto de intersecção. Em outras palavras, $\ln a = ca^2$, e a é a única solução para a equação dada. Vemos a partir da Figura 3 que as curvas somente se tocam, portanto têm uma reta tangente comum quando $x = a$. Isso significa que as curvas $y = \ln x$ e $y = cx^2$ têm a mesma inclinação quando $x = a$. Logo,

$$\frac{1}{a} = 2ca$$

Resolvendo as equações $\ln a = ca^2$ e $1/a = 2ca$, obtemos

$$\ln a = ca^2 = c \cdot \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$$

Assim, $a = e^{1/2}$ e

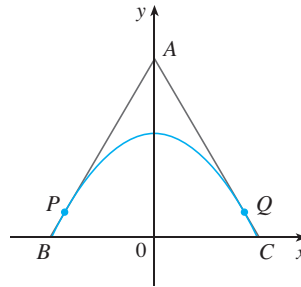
$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

FIGURA 4

Para os valores negativos de c temos a situação ilustrada na Figura 4: todas as parábolas $y = cx^2$ com os valores negativos de c interceptam $y = \ln x$ exatamente uma vez. E não devemos esquecer de $c = 0$: a curva $y = 0x^2 = 0$ é tão-somente o eixo x, que intercepta $y = \ln x$ exatamente uma vez.

Resumindo, os valores pedidos de c são $c = 1/(2e)$ e $c \leqslant 0$. □

PROBLEMAS

1. Encontre os pontos P e Q sobre a parábola $y = 1 - x^2$ de forma que o triângulo ABC formado pelo eixo x e pelas retas tangentes em P e Q seja equilátero.

2. Encontre o ponto onde as curvas $y = x^3 - 3x + 4$ e $y = 3(x^2 - x)$ são tangentes uma à outra, isto é, têm uma reta tangente comum. Ilustre esboçando as curvas e a tangente em comum.

3. Mostre que as retas tangentes à parábola $y = ax^2 + bx + c$ em quaisquer dois pontos com coordenadas x dadas por p e q devem se interceptar em um ponto cuja coordenada x está no ponto médio de p e q.

4. Mostre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{cotg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}\right) = -\cos 2x$$

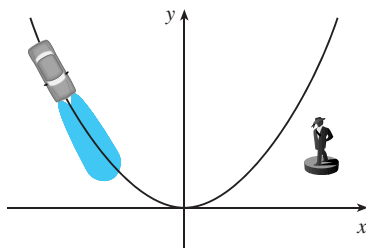
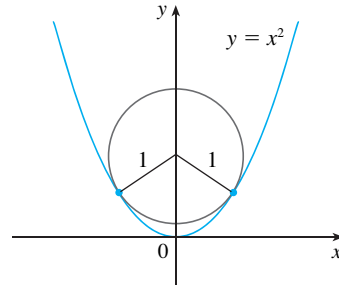
5. Mostre que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} x)$.

6. Um carro viaja à noite em uma estrada com formato de uma parábola com seu vértice na origem. O carro começa em um ponto a 100 m a oeste e 100 m ao norte da origem e viaja na direção leste. A 100 m a leste e a 50 m ao norte da origem existe uma estátua. Em que ponto da estrada os faróis do carro vão iluminar a estátua?

FIGURA PARA O PROBLEMA 6

7. Demonstre que $\dfrac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$.

8. Encontre a n-ésima derivada da função $f(x) = x^n/(1 - x)$.

9. A figura mostra um círculo de raio 1 inscrito na parábola $y = x^2$. Encontre o centro do círculo.

10. Se f for derivável em a, onde $a > 0$, calcule o seguinte limite em termos de $f'(a)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

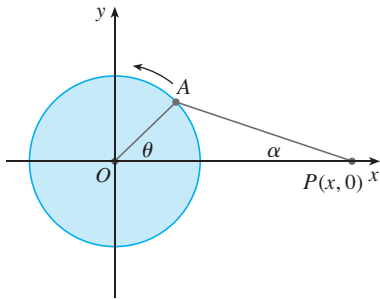



FIGURA PARA O PROBLEMA 11

11. A figura mostra uma roda de raio 40 cm que gira e uma barra de conexão AP com o comprimento 1,2 m. O pino P pode escorregar para a frente e para trás ao longo do eixo x à medida que a roda gira no sentido anti-horário a uma taxa de 360 revoluções por minuto.

(a) Encontre a velocidade angular da barra de conexão, $d\alpha/dt$, em radianos por segundo, quando $\theta = \pi/3$.

(b) Expresse a distância $x = |OP|$ em termos de θ.

(c) Encontre uma expressão para a velocidade do pino P em termos de θ.

12. As retas tangentes T_1 e T_2 são traçadas em dois pontos P_1 e P_2 na parábola $y = x^2$ e se interceptam em um ponto P. Outra reta tangente T é traçada em um ponto entre P_1 e P_2, e intercepta T_1 em Q_1 e T_2 em Q_2. Mostre que

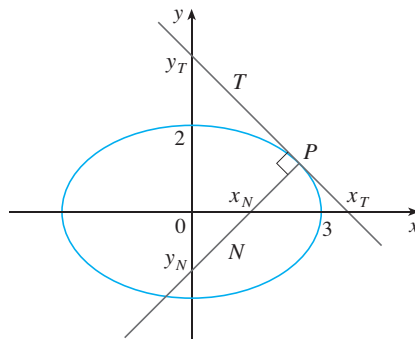
$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

13. Mostre que

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax} \operatorname{sen} bx) = r^n e^{ax} \operatorname{sen}(bx + n\theta)$$

onde a e b são números positivos, $r^2 = a^2 + b^2$, e $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(b/a)$.

14. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x - \pi}$.

15. Sejam T e N as retas tangente e normal à elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ em um ponto qualquer P sobre a elipse, no primeiro quadrante. Sejam x_T e y_T as itersecções com o eixo x e y de T e x_N e y_N as intersecções de N. À medida que P se move ao longo da elipse no primeiro quadrante (mas sem estar nos eixos), que valores podem assumir x_T, y_T, x_N e y_N? Tente primeiro conjecturar a resposta somente olhando na figura. Então, use o cálculo para resolver o problema e veja quão boa está sua intuição.

16. Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(3 + x)^2 - \text{sen } 9}{x}$.

17. (a) Use a identidade para $\text{tg}(x - y)$ (veja a Equação 14b do Apêndice D) para mostrar que, se duas retas L_1 e L_2 se interceptam com um ângulo α, então

$$\text{tg } \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 - m_1 m_2}$$

em que m_1 e m_2 são as inclinações de L_1 e L_2, respectivamente.

(b) O **ângulo entre as curvas** C_1 e C_2 em um ponto de intersecção P é definido como o ângulo entre as retas tangentes a C_1 e C_2 em P (se existirem). Use a parte (a) para encontrar, com precisão de um grau, o ângulo entre cada par de curvas em cada ponto de intersecção.

(i) $y = x^2$ e $y = (x - 2)^2$

(ii) $x^2 - y^2 = 3$ e $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

18. Seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre a parábola $y^2 = 4px$ com foco $F(p, 0)$. Seja α o ângulo entre a parábola e o segmento de reta FP e seja β o ângulo entre a reta horizontal $y = y_1$ e a parábola, como na figura. Demonstre que $\alpha = \beta$. (Assim, por um princípio da óptica geométrica, a luz de uma fonte localizada em F será refletida ao longo de uma reta paralela ao eixo x. Isso explica por que os *paraboloides*, superfícies obtidas por rotações de parábolas sobre seus eixos, são usados como forma de alguns faróis de automóveis e espelhos para os telescópios.)

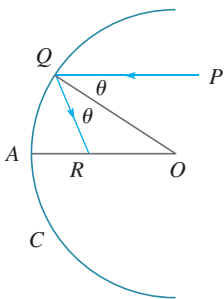
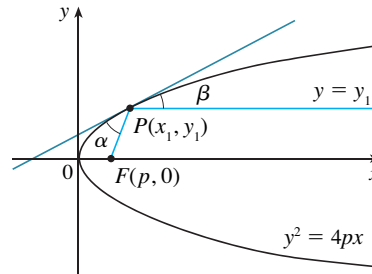



FIGURA PARA O PROBLEMA 19

19. Suponhamos que o espelho parabólico do Problema 18 tenha sido substituído por um esférico. Embora o espelho não tenha foco, podemos mostrar a existência de um foco *aproximado*. Na figura, C é um semicírculo com centro O. O raio de luz vindo na direção do espelho, paralelo ao eixo, ao longo da reta PQ será refletido para o ponto R sobre o eixo, de modo que $\angle PQO = \angle OQR$ (o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão). O que acontecerá ao ponto R se P for tomado cada vez mais próximo do eixo?

20. Se f e g forem funções diferenciáveis com $f(0) = g(0) = 0$ e $g'(0) \neq 0$, mostre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

21. Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(a + 2x) - 2\,\text{sen}(a + x) + \text{sen } a}{x^2}$.

SCA **22.** (a) A função cúbica $f(x) = x(x - 2)(x - 6)$ tem três raízes distintas: 0, 2 e 6. Faça o gráfico da f e de suas retas tangentes nos pontos *médios* de cada par de zeros. O que você percebe?

(b) Suponha que a função cúbica $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ tenha três zeros distintos: a, b e c. Demonstre, usando um sistema de computação algébrica, que a reta tangente ao gráfico de f no ponto médio dos dois zeros a e b intercepta o gráfico da f no terceiro zero.

23. Para quais valores de k a equação $e^{2x} = k\sqrt{x}$ tem exatamente uma solução?

24. Para quais números positivos a é verdadeiro que $a^x \geqslant 1 + x$ para todo x?

25. Se

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$$

mostre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

26. Dada uma elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, em que $a \neq b$, encontre a equação do conjunto de todos os pontos para os quais existem duas tangentes à curva cujas inclinações são (a) recíprocas e (b) recíprocas negativas.

27. Encontre os dois pontos sobre a curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que têm uma reta tangente comum.

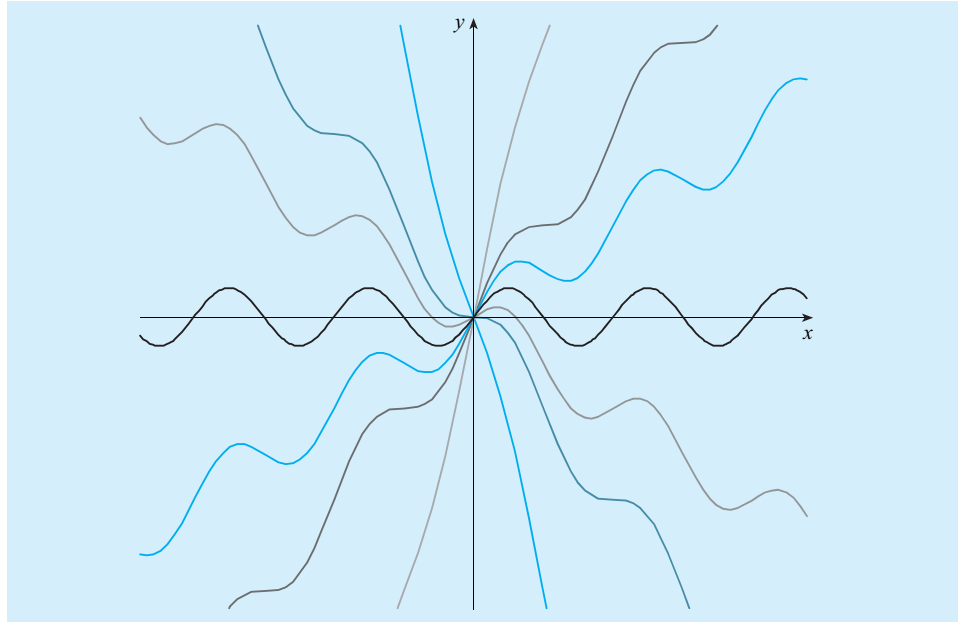
28. Suponha que três pontos sobre a parábola $y = x^2$ têm a seguinte propriedade: suas retas normais se interceptam em um ponto comum. Mostre que a soma de suas coordenadas x é 0.

29. Um *ponto de rede* no plano é um ponto com coordenadas inteiras. Suponha que círculos com raio r sejam feitos usando-se todos os pontos de rede como centros. Encontre o menor valor de r para o qual toda reta com inclinação $\frac{2}{5}$ intercepta alguns desses círculos.

30. Um cone de raio r centímetros e altura h centímetros é submerso a uma taxa de 1 cm/s, primeiro a ponta, em um cilindro alto, com raio R cm, parcialmente cheio de água. Com que velocidade se elevará o nível de água no instante em que o cone fica completamente submerso?

31. Um recipiente com a forma de um cone invertido tem 16 cm de altura e 5 cm de raio no topo. Ele está parcialmente cheio com um líquido que vaza pelos lados a uma taxa proporcional à área do recipiente que está em contato com o líquido. (A área de um cone é $\pi r l$, na qual r é o raio e l é o comprimento da geratriz.) Se estivermos derramando líquido no recipiente a uma taxa de 2 cm^3/min, então a altura do líquido decrescerá a uma taxa de 0,3 cm/min quando a altura for 10 cm. Se nosso objetivo for manter constante a altura do líquido em 10 cm, a que taxa deveríamos derramar líquido no recipiente?

4

APLICAÇÕES DA DERIVAÇÃO

O cálculo revela todos os aspectos importantes dos gráficos de funções.
O gráfico ilustra membros da família $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$.

Já estudamos algumas das aplicações da derivada; agora, porém, com o auxílio das regras de derivação, estamos em posição de estudar as aplicações da derivação em maior profundidade. Aprenderemos como as derivadas afetam o formato do gráfico de uma função e, em particular, como nos ajudam a localizar os valores máximos e mínimos de funções. Muitos problemas práticos requerem minimizar um custo ou maximizar uma área, ou, de alguma forma, encontrar a melhor saída de uma situação. Em particular, poderemos pesquisar a forma ótima de uma lata e explicar a localização de um arco-íris no céu.

4.1 <NONE>VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

Algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os *problemas de otimização*, em que devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa. A seguir, listamos alguns dos problemas de otimização que resolveremos neste capítulo:

- Qual é a forma de uma lata que minimiza o custo de manufatura?
- Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial? (Esta é uma questão importante para os astronautas que têm de suportar os efeitos da aceleração.)
- Qual o raio de uma traqueia contraída que expele mais rapidamente o ar durante uma tosse?
- Sob que ângulo os vasos sanguíneos devem ramificar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue?

Esses problemas podem ser reduzidos a encontrar os valores máximo ou mínimo de uma função. Vamos primeiro explicar exatamente o que queremos dizer por valores máximo e mínimo.

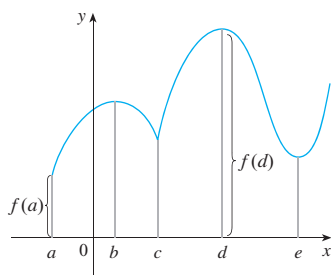



FIGURA 1
Valor mínimo $f(a)$, valor máximo $f(d)$

1 DEFINIÇÃO Uma função f tem **máximo absoluto** (ou **máximo global**) em c se $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x em D, onde D é o domínio de f. O número $f(c)$ é chamado **valor máximo** de f em D. Analogamente, f tem um **mínimo absoluto** em c se $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x em D, e o número $f(c)$ é denominado **valor mínimo** de f em D. Os valores máximo e mínimo de f são chamados **valores extremos** de f.

A Figura 1 mostra o gráfico de uma função f com um máximo absoluto em d e um mínimo absoluto em a. Observe que $(d, f(d))$ é o ponto mais alto do gráfico, enquanto $(a, f(a))$ é o ponto mais baixo. Na Figura 1, se considerarmos somente os valores de x próximos de b [por exemplo, se restringirmos nossa atenção ao intervalo (a, c)], então $f(b)$ é o maior desses valores de $f(x)$ e é chamado *valor máximo local* de f. Da mesma forma, $f(c)$ é denominado *valor mínimo local* de f, pois $f(c) \leqslant f(x)$ para x nas proximidades de c [no intervalo (b, d), por exemplo]. A função f tem também um mínimo local em e. Em geral, temos a seguinte definição.

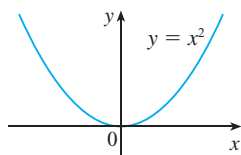



FIGURA 2
Valor mínimo 0, nenhum máximo

2 DEFINIÇÃO Uma função f tem um **máximo local** (ou **máximo relativo**) em c se $f(c) \geqslant f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c. [Isso significa que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.] Analogamente, f tem um **mínimo local** em c se $f(c) \leqslant f(x)$ quando x estiver próximo de c.

EXEMPLO 1 A função $f(x) = \cos x$ assume seu valor máximo (local e absoluto) 1 um número infinito de vezes, uma vez que $\cos 2n\pi = 1$ para todo inteiro n e $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo x. Da mesma forma, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ é seu valor mínimo, onde n é qualquer inteiro. □

EXEMPLO 2 Se $f(x) = x^2$, então $f(x) \geqslant f(0)$, pois $x^2 \geqslant 0$ para todo x. Portanto, $f(0) = 0$ é o valor mínimo absoluto (e local) de f. Isso corresponde ao fato de que a origem é o ponto mais baixo sobre a parábola $y = x^2$ (veja a Figura 2). Porém, não há um ponto mais alto sobre a parábola e, dessa forma, a função não tem um valor máximo. □

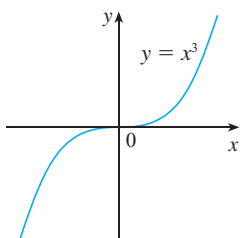



FIGURA 3
Nenhum mínimo, nenhum máximo

EXEMPLO 3 Do gráfico da função $f(x) = x^3$, mostrado na Figura 3, vemos que essa função não tem um valor máximo absoluto nem um valor mínimo absoluto. De fato, ela também não tem nenhum valor extremo local. □

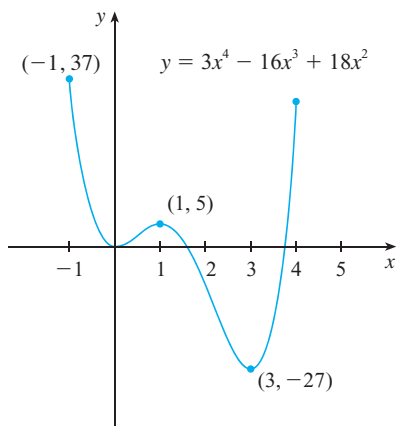



FIGURA 4

EXEMPLO 4 O gráfico da função

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

está mostrado na Figura 4. Você pode ver que $f(1) = 5$ é um máximo local, enquanto o máximo absoluto é $f(-1) = 37$. [Esse máximo absoluto não é um máximo local, pois ocorre em um extremo do intervalo.] Também, $f(0) = 0$ é um mínimo local, e $f(3) = -27$ é tanto um mínimo local como um mínimo absoluto. Observe que em $x = 4$, f não tem um máximo local nem um máximo absoluto. □

Vimos que algumas funções têm valores extremos, enquanto outras não têm. O teorema a seguir dá condições para garantir que uma função tenha valores extremos.

3 **O TEOREMA DO VALOR EXTREMO** Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

O Teorema do Valor Extremo está ilustrado na Figura 5. Observe que um valor extremo pode ser assumido mais de uma vez. Embora o Teorema do Valor Extremo seja intuitivamente muito plausível, ele é difícil de ser demonstrado e, assim, omitimos sua demonstração.

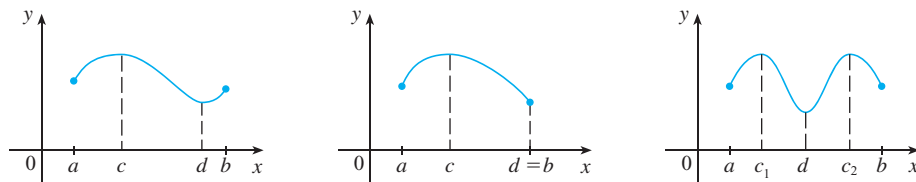



FIGURA 5

As Figuras 6 e 7 mostram que uma função pode não possuir valores extremos se for omitida uma das duas hipóteses (continuidade ou intervalo fechado) do Teorema do Valor Extremo.

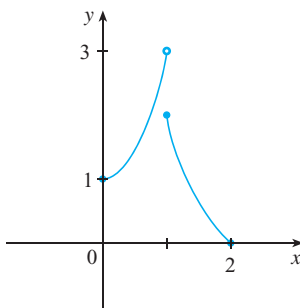



FIGURA 6
Esta função tem um valor mínimo $f(2) = 0$, mas não tem valor máximo

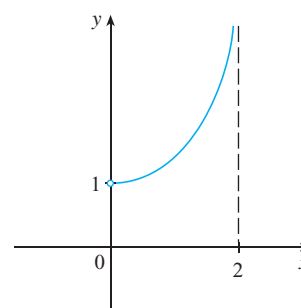



FIGURA 7
Esta função contínua g não tem nem máximo nem mínimo

A função f, cujo gráfico está mostrado na Figura 6, está definida no intervalo fechado $[0, 2]$, mas não tem valor máximo. [Observe que a imagem de f é $[0, 3)$. A função assume valores arbitrariamente próximos de 3, porém nunca atinge o valor 3.] Isso não contradiz o Teorema do Valor Extremo, pois f não é contínua. [Não obstante, uma função descontínua *pode* ter valores máximo e mínimo. Veja o Exercício 13(b).]

A função g da Figura 7 é contínua no intervalo aberto $(0, 2)$, mas não tem nem valor máximo nem mínimo. [A imagem de g é $(1, \infty)$. A função assume valores arbitrariamente grandes.] Isso não contradiz o Teorema do Valor Extremo, pois o intervalo $(0, 2)$ não é fechado.

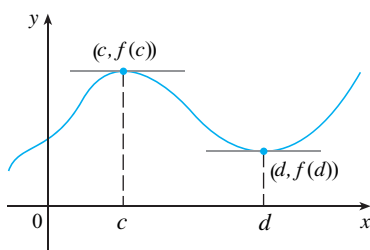



FIGURA 8

■ O Teorema de Fermat é assim designado em homenagem a Pierre Fermat (1601-1665), um advogado francês que tinha por passatempo favorito a matemática. Apesar de seu amadorismo, Fermat foi, junto com Descartes, um dos inventores da geometria analítica. Seus métodos para encontrar as tangentes às curvas e os valores máximo e mínimo (antes da invenção de limites e derivadas) fazem dele um precursor de Newton na criação do cálculo diferencial.

O Teorema do Valor Extremo afirma que uma função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo; contudo, não diz como encontrar esses valores extremos. Vamos começar procurando os valores extremos locais.

A Figura 8 mostra o gráfico de uma função f com um máximo local em c e um mínimo local em d. Parece que nos pontos de máximo e de mínimo as retas tangentes são horizontais e, portanto, cada uma tem inclinação 0. Sabemos que a derivada é a inclinação da reta tangente; assim, parece que $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$. O teorema a seguir afirma que isso é sempre verdadeiro para as funções diferenciáveis.

4 TEOREMA DE FERMAT Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que f tenha um máximo local em c. Então, de acordo com a Definição 2, $f(c) \geqslant f(x)$ se x estiver suficientemente próximo de c, o que implica que se h estiver suficientemente próximo de 0, sendo h positivo ou negativo, então

$$f(c) \geqslant f(c+h)$$

e, portanto,

$$f(c+h) - f(c) \leqslant 0 \tag{5}$$

Podemos dividir ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo. Assim, se $h > 0$ e h for suficientemente pequeno, temos

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Tomando o limite à direita de ambos os lados dessa desigualdade (usando o Teorema 2.3.2), obtemos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Mas, uma vez que $f'(c)$ existe, temos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

e assim mostramos que $f'(c) \leqslant 0$.

Se $h < 0$, então o sentido da desigualdade (5) é invertido quando dividimos por h:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

Logo, tomando o limite à esquerda, temos

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Mostramos que $f'(c) \leqslant 0$ e também que $f'(c) \leqslant 0$. Uma vez que ambas as desigualdades devem ser verdadeiras, a única possibilidade é que $f'(c) = 0$.

Demonstramos o Teorema de Fermat para o caso de um máximo local. O caso de mínimo local pode ser demonstrado de forma análoga, ou pode ser deduzido do caso já demonstrado por meio do Exercício 76 (veja o Exercício 77). □

Os exemplos a seguir chamam nossa atenção para o fato de que não devemos esperar demais do Teorema de Fermat. Não podemos esperar localizar os valores extremos impondo $f'(x) = 0$ e isolando x.

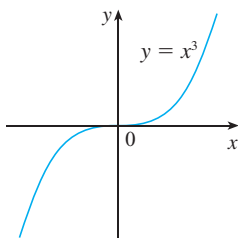



FIGURA 9
Se $f(x) = x^3$, então $f'(0) = 0$, mas f não tem mínimo nem máximo

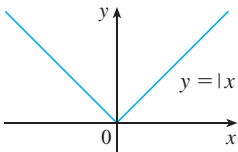



FIGURA 10
Se $f(x) = |x|$, então $f(0) = 0$ é um valor mínimo, mas $f'(0)$ não existe

EXEMPLO 5 Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$, logo $f'(0) = 0$. Porém, f não tem máximo nem mínimo em 0, como podemos ver em seu gráfico na Figura 9. (Ou observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, mas $x^3 < 0$ para $x < 0$.) O fato de que $f'(0) = 0$ significa simplesmente que a curva $y = x^3$ tem uma reta tangente horizontal em $(0, 0)$. Em vez de $y = x^3$ ter máximo ou mínimo em $(0, 0)$, a curva cruza sua tangente horizontal aí. □

EXEMPLO 6 A função $f(x) = |x|$ tem seu valor mínimo (local e absoluto) em 0; contudo, esse valor não pode ser encontrado tomando $f'(x) = 0$, pois, conforme mostramos no Exemplo 5 da Seção 2.8, $f'(0)$ não existe (veja a Figura 10). □

ATENÇÃO Os Exemplos 5 e 6 mostram que devemos ser muito cuidadosos no uso do Teorema de Fermat. O Exemplo 5 mostra que, mesmo quando $f'(c) = 0$, não é necessário existir um máximo ou um mínimo em c. (Em outras palavras, a recíproca do Teorema de Fermat em geral é falsa.) Além disso, pode existir um valor extremo mesmo quando $f'(c)$ não existir (como no Exemplo 6).

O Teorema de Fermat sugere que devemos pelo menos *começar* procurando por valores extremos de f nos números c onde $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe. Esses números têm um nome especial.

6 DEFINIÇÃO Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

EXEMPLO 7 Encontre os números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

■ A Figura 11 mostra um gráfico da função f do Exemplo 7. Ele confirma nossa resposta, pois há uma tangente horizontal quando $x = 1{,}5$ e uma tangente vertical quando $x = 0$.

FIGURA 11

SOLUÇÃO A Regra do Produto nos dá que

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[O mesmo resultado poderia ter sido obtido escrevendo-se primeiro $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Portanto, $f'(x) = 0$ se $12 - 8x = 0$, isto é, $x = \frac{3}{2}$, e $f(x)$ não existe quando $x = 0$. Assim, os números críticos são $\frac{3}{2}$ e 0. □

Em termos de números críticos, o Teorema de Fermat pode ser reescrito como a seguir (compare a Definição 6 com o Teorema 4):

7 Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um número crítico de f.

Para encontrar um máximo ou um mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado, observamos que ou ele é local [nesse caso ocorre em um número crítico, por (7)] ou acontece em uma extremidade do intervalo. Assim, o seguinte procedimento de três etapas sempre funciona.

O MÉTODO DO INTERVALO FECHADO Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.
3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

EXEMPLO 8 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUÇÃO Uma vez que f é contínua em $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, podemos usar o Método do Intervalo Fechado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

FIGURA 12

Uma vez que $f'(x)$ existe para todo x, os únicos números críticos de f ocorrem quando $f'(x) = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = 2$. Observe que cada um desses números críticos está no intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Os valores de f nesses números críticos são

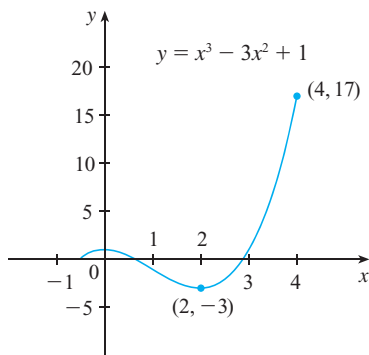
$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Os valores de f nas extremidades do intervalo são

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando esses quatro números, vemos que o valor máximo absoluto é $f(4) = 17$ e o valor mínimo absoluto, $f(2) = -3$.

Observe que neste exemplo o máximo absoluto ocorre em uma extremidade, enquanto o mínimo absoluto acontece em um número crítico. O gráfico de f está esboçado na Figura 12. □

Se você tiver uma calculadora gráfica ou um computador com software gráfico, poderá estimar facilmente os valores máximo e mínimo. Mas, como mostra o próximo exemplo, o cálculo é necessário para encontrar valores *exatos*.

EXEMPLO 9

(a) Use uma ferramenta gráfica para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

(b) Utilize o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

FIGURA 13

SOLUÇÃO

(a) A Figura 13 mostra um gráfico de f na janela retangular $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Movendo o cursor próximo ao ponto de máximo, vemos que a coordenada y não varia muito nas vizinhanças do máximo. O valor máximo absoluto é cerca de 6,97 e ocorre quando $x \approx 5{,}2$. Analogamente, movendo o cursor para próximo do ponto de mínimo, vemos que o valor mínimo absoluto é cerca de $-0{,}68$ e ocorre quando $x \approx 1{,}0$. Seria possível obter mais precisão nas estimativas por meio de um *zoom* em direção aos pontos máximo e mínimo, mas, em vez disso, vamos usar o cálculo.

(b) A função $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$ é contínua em $[0, 2\pi]$. Uma vez que $f'(x) = 1 - 2\cos x$, temos $f'(x) = 0$ quando $\cos x = \frac{1}{2}$ e isso ocorre quando $x = \pi/3$ ou $5\pi/3$. Os valores de f nesses pontos críticos são

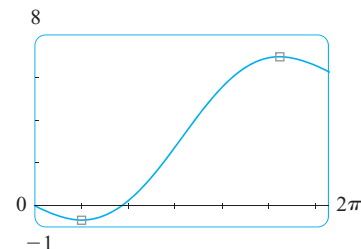
$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \text{ sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}684853$$

e

$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \text{ sen} \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6{,}968039$$

Os valores de f nas extremidades são

$$f(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6{,}28$$

Comparando esses quatros números e usando o Método do Intervalo Fechado, vemos que o valor mínimo absoluto é $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$, enquanto o valor máximo absoluto é $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Os valores da parte (a) servem como uma verificação de nosso trabalho. □

EXEMPLO 10 O telescópio espacial Hubble foi colocado em órbita em 24 abril de 1990 pelo ônibus espacial *Discovery*. Um modelo para a velocidade do ônibus durante essa missão, do lançamento em $t = 0$ até a ejeção do foguete auxiliar em $t = 126$ s, é dado por

$$v(t) = 0{,}0003968t^3 - 0{,}02752t^2 + 7{,}196t - 0{,}9397$$

(em metros/segundo). Usando esse modelo, estime os valores máximo e mínimo absolutos da *aceleração* do ônibus entre o lançamento e a ejeção do foguete auxiliar.

SOLUÇÃO São pedidos os valores extremos não da função velocidade dada, mas, em vez disso, da função aceleração. Assim, precisamos primeiro derivar para encontrar a aceleração:

$$a(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}(0{,}0003968t^3 - 0{,}02752t^2 + 7{,}196t - 0{,}9397)$$

$$= 0{,}0011904t^2 - 0{,}05504t + 7{,}196$$

Vamos aplicar agora o Método do Intervalo Fechado à função contínua a no intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Sua derivada é

$$a'(t) = 0{,}0023808t - 0{,}05504$$

O único número crítico ocorre quando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0{,}05504}{0{,}0023808} \approx 23{,}12$$

Calculando o valor de $a(t)$ no número crítico e nas extremidades, temos,

$$a(0) = 7{,}196 \qquad a(t_1) \approx 6{,}56 \qquad a(126) \approx 19{,}16$$

Assim, a aceleração máxima é cerca de 19,16 m/s^2, e a aceleração mínima, cerca de 6,56 m/s^2. □

4.1 EXERCÍCIOS

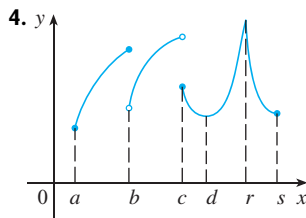
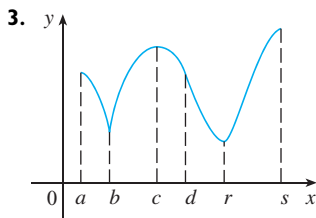
1. Explique a diferença entre mínimo local e mínimo absoluto.

2. Suponha que f seja uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$.

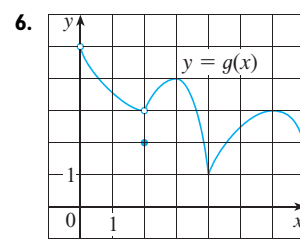
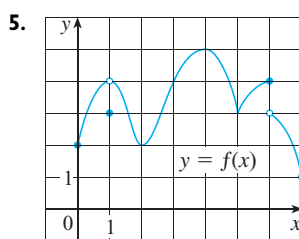
(a) Que teorema garante a existência de valores máximo e mínimo absolutos para f?

(b) Quais as etapas que você deve seguir para encontrar esses valores máximo e mínimo?

3–4 Para cada um dos números a, b, c, d, r e s, diga se a função cujo gráfico é dado tem um máximo ou mínimo absoluto, um máximo ou mínimo local, ou nem máximo, nem mínimo.

3. **4.**

5–6 Use o gráfico para dizer quais os valores máximos e mínimos locais e absolutos da função.

5.

6.

7–10 Esboce o gráfico de uma função f que seja contínua em $[1, 5]$ e tenha as propriedades dadas.

7. Máximo absoluto em 3, mínimo absoluto em 2, mínimo local em 4.

8. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 1, máximo local em 2 e mínimo local em 4.

9. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 2, máximo local em 3 e mínimo local em 2 e 4.

10. f não tem máximos ou mínimos locais, mas 2 e 4 são números críticos.

11. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja derivável em 2.

(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja contínua, mas não derivável em 2.

(c) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e não seja contínua em 2.

12. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha máximo absoluto, mas não tenha máximo local.

(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo local, mas não tenha máximo absoluto.

13. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo absoluto, mas não tenha mínimo absoluto.

(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que seja descontínua, mas tenha tanto máximo absoluto como mínimo absoluto.

14. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha dois máximos locais e um mínimo local, mas nenhum mínimo absoluto.

(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha três mínimos locais, dois máximos locais e sete números críticos.

15–28 Esboce o gráfico de f à mão e use seu esboço para encontrar os valores máximos e mínimos locais e absolutos de f. (Use os gráficos e as transformações das Seções 1.2 e 1.3.)

15. $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geqslant 1$

16. $f(x) = 3 - 2x, \quad x \leqslant 5$

17. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$

18. $f(x) = x^2, \quad 0 < x \leqslant 2$

19. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x < 2$

20. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$

21. $f(x) = x^2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 2$

22. $f(x) = 1 + (x + 1)^2, \quad -2 \leqslant x < 5$

23. $f(t) = 1/t, \quad 0 < t < 1$

24. $f(\theta) = \operatorname{tg} \theta, \quad -\pi/4 \leqslant \theta < \pi/2$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 4 & \text{se } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

29–44 Encontre os números críticos da função.

29. $f(x) = 5x^2 + 4x$

30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

31. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$

32. $f(x) = x^3 + x^2 + x$

33. $s(t) = 3t^4 + 4t^3 - 6t^2$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

41. $f(\theta) = 2 \cos \theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $g(\theta) = 4\theta - \operatorname{tg} \theta$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2} \ln x$

45–46 É dada uma fórmula para a derivada de uma função. Quantos números críticos ela tem?

45. $f'(x) = 5e^{-0,1|x|} \operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100 \cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

47–62 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = 18x + 15x^2 - 4x^3, \quad [-3, 4]$

51. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2, \quad [-3, 2]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

54. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, \quad [-4, 4]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}\,(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad [0, 1]$

63. Se a e b são números positivos, ache o valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b, 0 \leqslant x \leqslant 1$.

64. Use um gráfico para estimar os números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ com precisão de uma casa decimal.

65–68

(a) Use um gráfico para estimar os valores máximo e mínimo absolutos da função com precisão de duas casas decimais.

(b) Use o cálculo para encontrar os valores máximo e mínimo exatos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

66. $f(x) = e^{x^3 - x}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leqslant x \leqslant 0$

69. Entre 0 ºC e 30 ºC, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula

$$V = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000679T^3$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

70. Um objeto com massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda presa ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

onde μ é uma constante positiva chamada *coeficiente de atrito* e $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Mostre que F é minimizada quando $\operatorname{tg} \theta = \mu$.

71. Um modelo para o preço médio norte-americano para o açúcar refinado entre, 1993 e 2003, é dado pela função

$$S(t) = -0{,}00003237t^5 + 0{,}0009037t^4 - 0{,}008956t^3 + 0{,}03629t^2 - 0{,}04458t + 0{,}4074$$

onde t é medido em anos a partir de agosto de 1993. Estime os instantes nos quais o açúcar esteve mais barato e mais caro entre 1993 e 2003.

72. Em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49. A tabela a seguir fornece os dados da velocidade do ônibus entre o lançamento e a ejeção dos foguetes auxiliares.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56,4
Fim da manobra de inclinação	15	97,2
Regulador de combustível a 89%	20	136,2
Regulador de combustível a 67%	32	226,2
Regulador de combustível a 104%	59	403,9
Pressão dinâmica máxima	62	440,4
Separação do foguete auxiliar	125	1 265,2

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar o polinômio cúbico que melhor modele a velocidade do ônibus para o intervalo de tempo $t \in [0, 125]$. Faça então o gráfico desse polinômio.

(b) Encontre um modelo para a aceleração do ônibus e use-o para estimar os valores máximo e mínimo da aceleração durante os primeiros 125 segundos.

73. Quando um objeto estranho se aloja na traqueia, forçando uma pessoa a tossir, o diafragma empurra-o para cima, causando um aumento na pressão dos pulmões. Isso é acompanhado por uma contração da traqueia, fazendo um canal mais estreito por onde o ar expelido escoe. Para uma dada quantidade de ar escapar em um tempo fixo, é preciso que ele se mova mais rápido através do tubo mais estreito do que no mais largo. Quanto maior for a velocidade da corrente de ar, maior a força sobre o objeto estranho. O uso de raios X mostra que o raio do tubo circular da traqueia se contrai para cerca de 2/3 de seu raio normal durante a tosse. De acordo com o modelo matemático para a tosse, a velocidade v está relacionada ao raio r da traqueia pela equação.

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2} r_0 \leqslant r \leqslant r_0$$

em que k é uma constante e r_0, o raio normal da traqueia. A restrição sobre r deve-se ao fato de que as paredes da traqueia endurecem sob pressão, evitando uma contração maior que $\frac{1}{2} r_0$ (de outra forma, a pessoa ficaria sufocada).

(a) Determine o valor de r no intervalo $\left[\frac{1}{2} r_0, r_0\right]$ no qual v tenha um máximo absoluto. Como isso se compara com a evidência experimental?

(b) Qual é o valor máximo absoluto de v no intervalo?

(c) Esboce o gráfico de v no intervalo $[0, r_0]$.

74. Mostre que 5 é um número crítico da função

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

mas que g não tem um valor extremo local em 5.

75. Demonstre que a função

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

não tem nem máximos nem mínimos locais.

76. Se f tiver um valor mínimo em c, mostre que a função $g(x) = -f(x)$ tem um valor máximo em c.

77. Demonstre o Teorema de Fermat para o caso no qual f tenha um mínimo local em c.

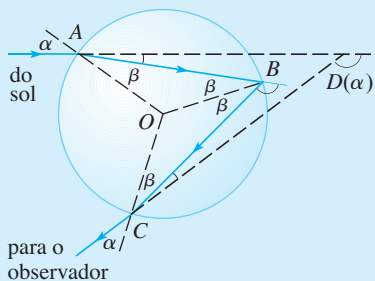
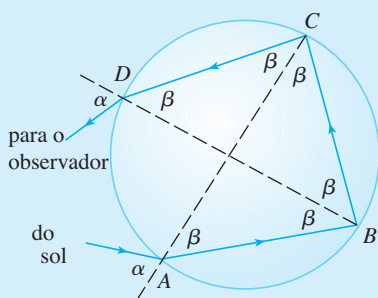
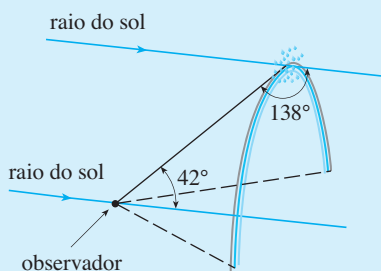
78. Uma função cúbica é um polinômio de grau três; isto é, tem a forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que $a \neq 0$.

(a) Mostre que uma função cúbica pode ter dois, um ou nenhum número(s) crítico(s). Dê exemplos e esboços que ilustrem essas três possibilidades.

(b) Quantos valores extremos locais uma função cúbica pode ter?

PROJETO APLICADO

O CÁLCULO DO ARCO-ÍRIS

O arco-íris é o fenômeno que resulta da dispersão da luz do Sol em gotas de chuva suspensas na atmosfera. Ele vem fascinando a humanidade desde os tempos antigos e inspirou tentativas de explicação científica desde a época de Aristóteles. Neste projeto, usaremos as ideias de Descartes e de Newton para explicar a forma, a localização e as cores dos arco-íris.

Formação do arco-íris principal

1. A figura mostra um raio de luz solar entrando em uma gota de chuva esférica em A. Parte da luz é refletida, mas a reta AB mostra a trajetória da parte que entra na gota. Observe que a luz é refratada em direção à reta normal AO e, de fato, a Lei de Snell afirma que sen $\alpha = k$ sen β, em que α é o ângulo de incidência, β é o ângulo de refração e $k \approx \frac{4}{3}$, o índice de refração para a água. Em B, uma parte da luz passa através da gota e é refratada para o ar, mas a reta BC mostra a parte que é refletida. (O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.) Quando o raio atinge C, parte dele é refletido, mas por hora estamos mais interessados na parte que deixa a gota de chuva em C. (Observe que ela é refratada se ajustando da reta normal.) O *ângulo de desvio* $D(\alpha)$ é o ângulo da rotação no sentido horário sofrida pelo raio que passa por esse processo de três etapas. Assim,

$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

Mostre que o valor mínimo do desvio é $D(\alpha) \approx 138°$ e ocorre quando $\alpha \approx 59{,}4°$.

O significado do desvio mínimo é que quando $\alpha \approx 59{,}4°$ temos $D'(\alpha) \approx 0$, logo $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Isso significa que muitos raios com $\alpha \approx 59{,}4°$ são desviados aproximadamente pela mesma quantidade. É essa *concentração* de raios vindos das proximidades da direção de desvio mínimo que cria a luminosidade do arco-íris primário. A figura mostra que o ângulo de elevação a partir do observador até o ponto mais alto sobre o arco-íris é $180° - 138° = 42°$. (Esse ângulo é chamado *ângulo do arco-íris*.)

2. O Problema 1 explica a localização do arco-íris principal, mas como explicar as cores? A luz do Sol é formada por um espectro de comprimentos de onda, partindo do vermelho e passando pelo laranja, amarelo, verde, azul, anil e violeta. Como Newton havia descoberto em seus experimentos com prismas em 1666, o índice de refração é diferente para cada cor. (Este efeito é denominado *dispersão*.) Para a luz vermelha, o índice de refração é $k \approx 1{,}3318$, enquanto para a luz violeta é $k \approx 1{,}3435$. Repetindo os cálculos do Problema 1 para esses valores de k, mostre que o ângulo do arco-íris é cerca de 42,3° para o arco vermelho e 40,6° para o arco violeta. Assim, o arco-íris consiste realmente em sete arcos individuais correspondentes às sete cores.

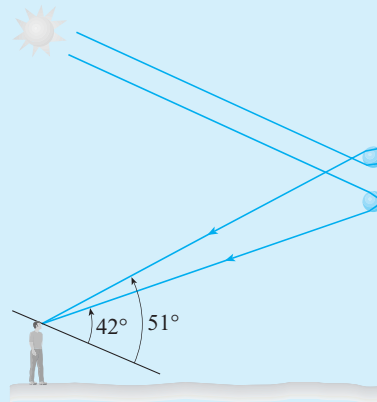
Formação do arco-íris secundário

3. Talvez você já tenha visto um arco-íris secundário mais fraco acima do primeiro. Esse segundo arco-íris resulta de parte de um raio que entra em uma gota de chuva e é refratada em A, refletida duas vezes (em B e C) e refratada quando deixa a gota em D (veja a figura). Dessa vez, o ângulo de desvio $D(\alpha)$ é o ângulo total da rotação no sentido anti-horário que o raio sofre nesse processo de quatro etapas

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

e $D(\alpha)$ tem um valor mínimo quando

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Tomando $k = \frac{4}{3}$, mostre que o desvio mínimo é cerca de 129°, e assim o ângulo do arco-íris para o arco-íris secundário é cerca de 51°, conforme se vê na figura.

4. Mostre que as cores no arco-íris secundário aparecem na ordem inversa daquela do primário.

4.2 TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Veremos que muitos dos resultados deste capítulo dependem de um fato central, que é chamado Teorema do Valor Médio. Mas, para chegar ao Teorema do Valor Médio, precisamos primeiro do seguinte resultado.

■ O Teorema de Rolle foi publicado pela primeira vez em 1691 pelo matemático francês Michel Rolle (1652-1719) no livro intitulado *Méthode pour résoudre les égalitéz*. Ele era um crítico veemente dos métodos de sua época e atacou o cálculo como "uma coleção de falácias engenhosas". Mais tarde, entretanto, ele se convenceu de que os métodos do cálculo estavam essencialmente corretos.

TEOREMA DE ROLLE Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).

3. $f(a) = f(b)$

Então existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de dar a demonstração, vamos olhar os gráficos de algumas funções típicas que satisfaçam as três hipóteses. A Figura 1 mostra os gráficos de quatro dessas funções. Em cada caso, parece que há pelo menos um ponto $(c, f(c))$ onde a tangente é horizontal e, portanto, $f'(c) = 0$. Assim, o Teorema de Rolle é plausível.

(a)

(b)

(c)

(d)

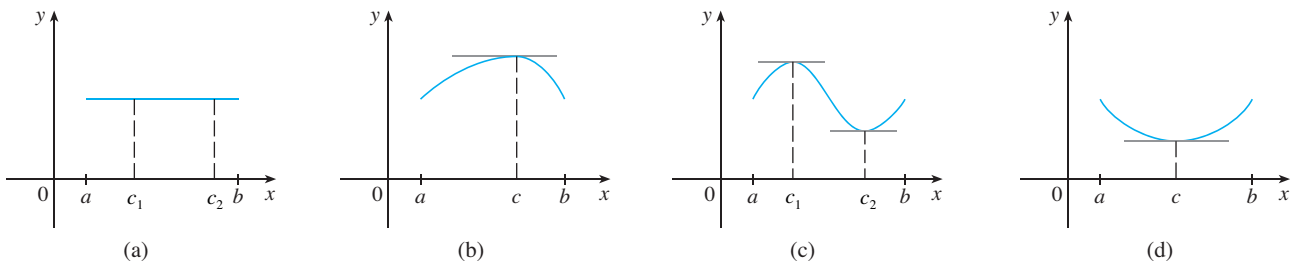



FIGURA 1

■ Considere os casos

DEMONSTRAÇÃO Existem três casos:

CASO I ■ $f(x) = k$, uma constante

Então $f'(x) = 0$, assim, o número c pode ser tomado como *qualquer* número em (a, b).

CASO II ■ $f(x) > f(a)$ **para algum** x **em** (a, b) [como na Figura 1(b) ou (c)]
Pelo Teorema do Valor Extremo (que podemos aplicar pela hipótese 1), f tem um valor máximo em algum ponto de $[a, b]$. Uma vez que $f(a) = f(b)$, ela deve assumir esse valor máximo em um número c no intervalo aberto (a, b). Então f tem um máximo *local* em c e, pela hipótese 2, f é derivável em c. Portanto, $f'(c) = 0$ pelo Teorema de Fermat.

CASO III ■ $f(x) < f(a)$ **para algum** x **em** (a, b) [como na Figura 1(c) ou (d)]
Pelo Teorema do Valor Extremo, f tem um valor mínimo em $[a, b]$, e como $f(a) = f(b)$, ela assume esse valor mínimo em um número c em (a, b). Novamente $f'(c) = 0$ pelo Teorema de Fermat. □

EXEMPLO 1 Vamos aplicar o Teorema de Rolle à função posição $s = f(t)$ de um objeto em movimento. Se o objeto estiver no mesmo lugar em dois instantes diferentes $t = a$ e $t = b$, então $f(a) = f(b)$. O Teorema de Rolle afirma que existe algum instante do tempo $t = c$ entre a e b no qual $f'(c) = 0$; isto é, a velocidade é 0. (Em particular, você pode ver que isto é verdadeiro quando uma bola é atirada diretamente para cima.) □

EXEMPLO 2 Demonstre que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

■ A Figura 2 mostra um gráfico da função $f(x) = x^3 + x - 1$ discutida no Exemplo 2. O Teorema de Rolle mostra que, independentemente do tamanho da janela retangular, não podemos nunca encontrar uma segunda intersecção com o eixo x.

FIGURA 2

SOLUÇÃO Primeiro, usamos o Teorema do Valor Intermediário (2.5.10) para mostrar que existe uma raiz. Seja $f(x) = x^3 + x - 1$. Então, $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$. Uma vez que f é um polinômio, ela é contínua; assim, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 0 e 1 tal que $f(c) = 0$. A equação dada, portanto, tem uma raiz.

Para mostrar que a equação não tem outra raiz real, usamos o Teorema de Rolle e argumentamos por contradição. Suponhamos que ela tenha duas raízes a e b. Então $f(a) = 0 = f(b)$ e, uma vez que f é um polinômio, é derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Assim, pelo Teorema de Rolle, existe um número c entre a e b tal que $f'(c) = 0$. Mas

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 \qquad \text{para todo } x$$

(uma vez que $x^2 \geqslant 0$), portanto, $f'(x)$ nunca pode ser zero. Isso fornece uma contradição. Portanto, a equação não pode ter duas raízes reais. □

Nosso principal uso do Teorema de Rolle é na demonstração do seguinte importante teorema, o qual foi primeiro enunciado por outro matemático francês, Joseph-Louis Lagrange.

■ O Teorema do Valor Médio é um exemplo do que é chamado teorema da existência. Da mesma forma que o Teorema do Valor Intermediário, o Teorema do Valor Extremo e o Teorema de Rolle, ele garante que existe um número com uma certa propriedade, mas não nos diz como achá-lo.

O TEOREMA DO VALOR MÉDIO Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

2. f é derivável no intervalo aberto (a, b).

Então existe um número c em (a, b) tal que

1
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

2
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Antes de demonstrar esse teorema, podemos ver que ele é razoável interpretando-o geometricamente. As Figuras 3 e 4 mostram os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ sobre os gráficos de duas funções deriváveis. A inclinação da reta secante AB é

3
$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que é a mesma expressão mostrada no lado direito da Equação 1. Uma vez que $f'(c)$ é a inclinação da reta tangente no ponto $(c, f(c))$, o Teorema do Valor Médio na forma dada pela Equação 1 diz que há no mínimo um ponto $P(c, f(c))$ sobre o gráfico onde a inclinação da reta tangente é igual à inclinação da reta secante AB. Em outras palavras, há um ponto P onde a reta tangente é paralela à reta secante AB.

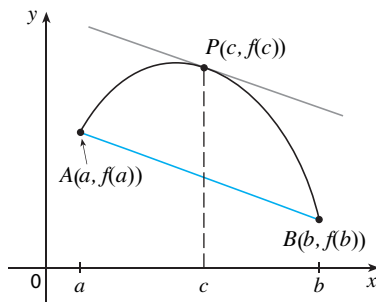



FIGURA 3

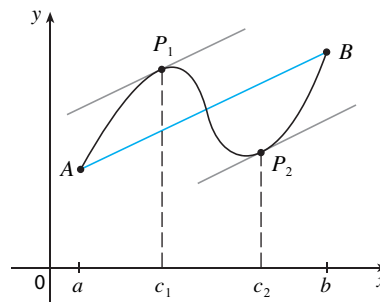



FIGURA 4

DEMONSTRAÇÃO Aplicamos o Teorema de Rolle a uma nova função h definida como a diferença entre f e a função cujo gráfico é a reta secante AB. Usando a Equação 3 vemos que a equação da reta AB pode ser escrita como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ou como

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Assim, como mostrado na Figura 5,

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{4}$$

FIGURA 5

LAGRANGE E TEOREMA DO VALOR MÉDIO

O Teorema do Valor Médio foi formulado pela primeira vez por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), nascido na Itália, de pai francês e mãe italiana. Criança prodígio, tornou-se professor em Turim aos 19 anos. Lagrange deu grandes contribuições à teoria dos números, teoria das funções, teoria das equações e mecânica analítica e celeste. Em particular, ele aplicou o cálculo na análise da estabilidade do sistema solar. A convite de Frederico, o Grande, ele sucedeu Euler na Academia de Berlim; depois da morte de Frederico, porém, Lagrange aceitou o convite do rei Luís XVI para viver em Paris, onde lhe foi dado um apartamento no Louvre. Lá se tornou professor da École Polytechnique. A despeito das armadilhas da fama e da luxúria, ele era um homem bondoso e quieto, que vivia somente para a ciência.

Precisamos primeiro verificar que h satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle.

1. A função h é contínua em $[a, b]$, pois é soma de f e um polinômio do primeiro grau, ambos contínuos.
2. A função h é diferenciável em (a, b), pois tanto f quanto o polinômio do primeiro grau são deriváveis. De fato, podemos calcular diretamente h' da Equação 4:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Observe que $f(a)$ e $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ são constantes.)

3. $$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$
$$= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0$$

Portanto, $h(a) = h(b)$.

Uma vez que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, esse teorema afirma que existe um número c em (a, b) tal que $h'(c) = 0$. Portanto

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e assim,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ □

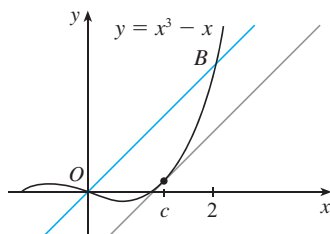



FIGURA 6

EXEMPLO 3 Para ilustrar o Teorema do Valor Médio com uma função específica, vamos considerar $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Uma vez que f é um polinômio, então ela é contínua e derivável para todo x; logo, é certamente contínua em $[0, 2]$ e derivável em $(0, 2)$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c em $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Mas $f(2) = 6$, $f(0) = 0$, e $f'(x) = 3x^2 - 1$, e essa equação fica

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

o que dá $c^2 = \frac{4}{3}$, isto é, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Porém c deve estar em $(0, 2)$; logo, $c = 2/\sqrt{3}$. A Figura 6 ilustra esse cálculo: a reta tangente nesse valor de c é paralela à reta secante OB. □

EXEMPLO 4 Se um objeto move-se em uma linha reta com uma função posição $s = f(t)$, então a velocidade média entre $t = a$ e $t = b$ é

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e a velocidade em $t = c$ é $f'(c)$. Assim, o Teorema do Valor Médio (na forma da Equação 1) nos diz que em algum instante $t = c$ e entre a e b a velocidade instantânea $f'(c)$ é igual à velocidade média. Por exemplo, se um carro percorrer 180 km em duas horas, então o velocímetro deve ter passado pela marca dos 90 km/h pelo menos uma vez.

Em geral, o Teorema do Valor Médio pode ser interpretado como se dissesse que existe um número no qual a taxa de variação instantânea é igual à taxa de variação média em um intervalo. □

A grande importância do Teorema do Valor Médio reside no fato de ele nos possibilitar obter informações sobre uma função a partir de dados sobre sua derivada. O próximo exemplo mostra esse princípio.

EXEMPLO 5 Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leqslant 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser?

SOLUÇÃO Foi-nos dado que f é derivável (e, portanto, contínua) em toda a parte. Em particular, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio ao intervalo $[0, 2]$. Existe então um número c tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

logo

$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Foi-nos dado que $f'(x) \leqslant 5$ para todo x; assim, sabemos que $f'(c) \leqslant 5$. Multiplicando por 2 ambos os lados dessa desigualdade, temos $2f'(c) \leqslant 10$, logo

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leqslant -3 + 10 = 7$$

O maior valor possível para $f(2)$ é 7. □

O Teorema do Valor Médio pode ser usado para estabelecer alguns dos fatos básicos do cálculo diferencial. Um deles é o teorema a seguir. Outros serão encontrados nas seções seguintes.

5 TEOREMA Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).

DEMONSTRAÇÃO Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em (a, b), sendo $x_1 < x_2$. Como f é derivável em (a, b), ela deve ser derivável em (x_1, x_2) e contínua em $[x_1, x_2]$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f no intervalo $[x_1, x_2]$, obtemos um número c tal que $x_1 < c < x_2$ e

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{6}$$

Uma vez que $f'(x) = 0$ para todo x, temos $f'(c) = 0$, e a Equação 6 fica

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

Portanto, f tem o mesmo valor em *quaisquer* dois números x_1 e x_2 em (a, b). Isso significa que f é constante em (a, b). □

7 COROLÁRIO Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b), então $f - g$ é constante em (a, b); isto é, $f(x) = g(x) + c$, em que c é uma constante.

DEMONSTRAÇÃO Seja $F(x) = f(x) - g(x)$. Então

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para todo x em (a, b). Assim, pelo Teorema 5, F é constante; isto é, $f - g$ é constante. □

OBS. É necessário cuidado ao aplicar o Teorema 5. Seja

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O domínio de f é $D = \{x \mid x \neq 0\}$ e $f'(x) = 0$ para todo x em D. Mas obviamente f não é uma função constante. Isso não contradiz o Teorema 5, pois D não é um intervalo. Observe que f é constante no intervalo $(0, \infty)$ e também no intervalo $(-\infty, 0)$.

EXEMPLO 6 Demonstre a identidade $\text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x = \pi/2$.

SOLUÇÃO Embora não seja necessário o cálculo para demonstrar essa identidade, a demonstração usando cálculo é bem simples. Se $f(x) = \text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x$, então

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

para todos os valores de x. Portanto $f(x) = C$, uma constante. Para determinar o valor de C fazemos $x = 1$ (porque podemos calcular $f(1)$ exatamente). Então

$$C = f(1) = \text{tg}^{-1} 1 + \text{cotg}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Assim, $\text{tg}^{-1}x + \text{cotg}^{-1}x = \pi/2$. □

4.2 EXERCÍCIOS

1–4 Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1, \quad [0, 4]$

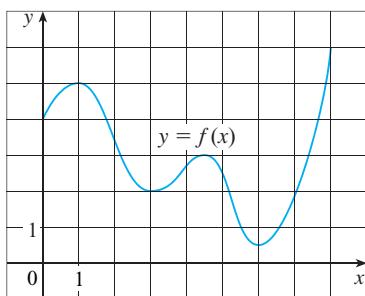
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5, \quad [0, 2]$

3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \quad [0, 9]$

4. $f(x) = \cos 2x, \quad [\pi/8, 7\pi/8]$

5. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$, mas não existe número c em $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

6. Seja $f(x) = \text{tg}\, x$. Mostre que $f(0) = f(\pi)$, mas não existe um número c em $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

7. Use o gráfico de f para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[0, 8]$.

8. Use o gráfico de f dado no Exercício 7 para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[1, 7]$.

9. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = x + 4/x$ na janela retangular $[0, 10]$ por $[0, 10]$.
(b) Faça o gráfico da reta secante que passa pelos pontos $(1, 5)$ e $(8, 8{,}5)$ na mesma tela que f.
(c) Encontre o número c que satisfaça à conclusão do Teorema do Valor Médio para essa função f e o intervalo $[1, 8]$. Então, faça o gráfico da reta tangente no ponto $(c, f(c))$ e observe que ela é paralela à reta secante.

10. (a) Na janela retangular $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$, faça o gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x$ e de sua reta secante que passa pelos pontos $(-2, -4)$ e $(2, 4)$. Use o gráfico para estimar as coordenadas x dos pontos onde a reta tangente é paralela à reta secante.
(b) Encontre os valores exatos dos números c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[-2, 2]$ e compare com sua resposta da parte (a).

11–14 Verifique que a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

11. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad [-1, 1]$

12. $f(x) = x^3 + x - 1, \quad [0, 2]$

13. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}, \quad [1, 4]$

15. Seja $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor c em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

16. Seja $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Mostre que não existe um valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

17. Mostre que a equação $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

18. Mostre que a equação $2x - 1 - \text{sen}\, x = 0$ tem exatamente uma raiz real.

19. Mostre que a equação $x^3 - 15x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.

20. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.

21. (a) Mostre que um polinômio de grau 3 tem no máximo três raízes reais.
(b) Mostre que um polinômio de grau n tem no máximo n raízes reais.

22. (a) Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$ e tenha duas raízes. Mostre que f' tem pelo menos uma raiz.
(b) Suponha que f seja duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ e tenha três raízes. Mostre que f'' tem pelo menos uma raiz real.
(c) Você pode generalizar os itens (a) e (b)?

23. Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, quão pequeno pode ser $f(4)$?

24. Suponha que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todo x. Mostre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

25. Existe uma função f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ e $f'(x) \leqslant 2$ para todo x?

26. Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Suponha também que $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Demonstre que $f(b) < g(b)$. [*Sugestão*: Aplique o Teorema do Valor Médio para a função $h = f - g$.]

27. Mostre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$ se $x > 0$.

28. Suponha que f seja uma função ímpar e derivável em toda a parte. Demonstre que para todo o número positivo b existe um número c em $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Use o Teorema do Valor Médio para demonstrar a desigualdade

$$|\text{sen } a - \text{sen } b| \leqslant |a - b| \qquad \text{para todo } a \text{ e } b$$

30. Se $f'(x) = c$ (c uma constante) para todo x, use o Corolário 7 para mostrar que $f(x) = cx + d$ para alguma constante d.

31. Seja $f(x) = 1/x$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que $f'(x) = g'(x)$ para todo x em seus domínios. Podemos concluir a partir do Corolário 7 que $f - g$ é constante?

32. Use o método do Exemplo 6 para demonstrar a identidade

$$2 \text{ sen}^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geqslant 0$$

33. Demonstre a identidade

$$\text{arcsen } \frac{x - 1}{x + 1} = 2 \text{ arctg } \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. Às 2 horas da tarde o velocímetro de um carro mostrava 50 km/h, e às 2h10 mostrava 65 km/h. Mostre que em algum instante entre 2h e 2h10 a aceleração era exatamente 90 km/h^2.

35. Dois corredores iniciaram uma corrida no mesmo instante e terminaram empatados. Demonstre que em algum instante durante a corrida eles tiveram a mesma velocidade. [*Sugestão*: Considere $f(t) = g(t) - h(t)$, em que g e h são as funções posição dos dois corredores.]

36. Um número a é chamado **ponto fixo** de uma função f se $f(a) = a$. Demonstre que se $f'(x) \neq 1$ para todo número real x, então f tem no máximo um ponto fixo.

4.3 COMO AS DERIVADAS AFETAM A FORMA DE UM GRÁFICO

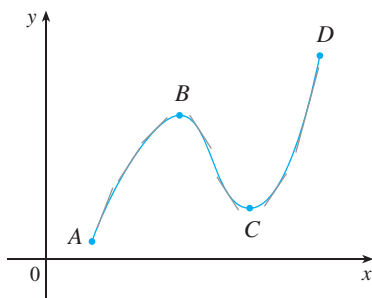



FIGURA 1

Muitas das aplicações do cálculo dependem de nossa habilidade para deduzir fatos sobre uma função f a partir de informações relativas a suas derivadas. Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$, ela nos informa para qual direção a curva segue em cada ponto. Assim, é razoável esperar que informações sobre $f'(x)$ nos dê informações sobre $f(x)$.

O QUE f' NOS DIZ SOBRE f?

Para ver como a derivada de f pode nos dizer onde uma função é crescente ou decrescente, observe a Figura 1. (As funções crescentes e decrescentes foram definidas na Seção 1.1.) Entre A e B e entre C e D as retas tangentes têm inclinação positiva, logo $f'(x) > 0$. Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa, portanto $f'(x) < 0$. Assim, parece que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para demonstrar que isso é sempre válido, vamos usar o Teorema do Valor Médio.

■ Vamos abreviar o nome deste teste para Teste C/D.

TESTE CRESCENTE/DECRESCENTE OU TESTE C/D

(a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

(b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

DEMONSTRAÇÃO

(a) Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de uma função crescente, temos de mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como nos foi dado que $f'(x) > 0$, sabemos que f é derivável em $[x_1, x_2]$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \qquad \boxed{1}$$

Agora $f'(c) > 0$ por hipótese e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, o lado direito da Equação 1 é positivo, e

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$

Isso mostra que f é crescente.

A parte (b) é demonstrada de maneira semelhante. □

EXEMPLO 1 Encontre onde a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e onde ela é decrescente.

SOLUÇÃO
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$$

Para usar o Teste C/D devemos saber onde $f'(x) > 0$ e onde $f'(x) < 0$. Isso depende dos sinais dos três fatores de $f'(x)$, isto é, $12x$, $x - 2$ e $x + 1$. Dividimos a reta real em intervalos cujas extremidades são os números críticos -1, 0 e 2 e dispomos o que fizemos em uma tabela. Um sinal de mais indica que a expressão dada é positiva, e um sinal de menos indica que é negativa. A última coluna da tabela fornece a conclusão baseada no Teste C/D. Por exemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, logo f é decrescente em $(0, 2)$. (Seria também verdade dizer que f é decrescente no intervalo fechado $[0, 2]$.)

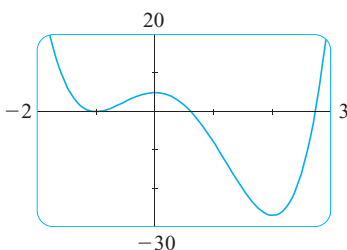



FIGURA 2

Intervalo	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente em $(-\infty, 1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(2, \infty)$

O gráfico de f, mostrado na Figura 2, confirma a informação dada na tabela. □

Da Seção 4.1, lembre-se de que se f tem um máximo ou mínimo local em c, então c deve ser um número crítico de f (pelo Teorema de Fermat), mas nem todo número crítico dá origem a um máximo ou mínimo. Consequentemente, necessitamos de um teste que nos diga se f tem ou não um máximo ou mínimo local em um número crítico.

Você pode ver a partir da Figura 2 que $f(0) = 5$ é um valor máximo local de f, pois f cresce em $(-1, 0)$ e decresce em $(0, 2)$. Ou, em termos de derivadas, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ e $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. Em outras palavras, o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0. Essa observação é a base do teste a seguir.

TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

(c) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c o sinal de f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

O Teste da Primeira Derivada é uma consequência do Teste C/D. Na parte (a), por exemplo, uma vez que o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c, f é crescente à esquerda de c e decrescente à direita. Segue que f tem um máximo local em c.

É fácil memorizar o Teste da Primeira Derivada visualizando diagramas como os da Figura 3.

(a) Máximo local

(b) Mínimo local

(c) Nem máximo, nem mínimo

(d) Nem máximo, nem mínimo

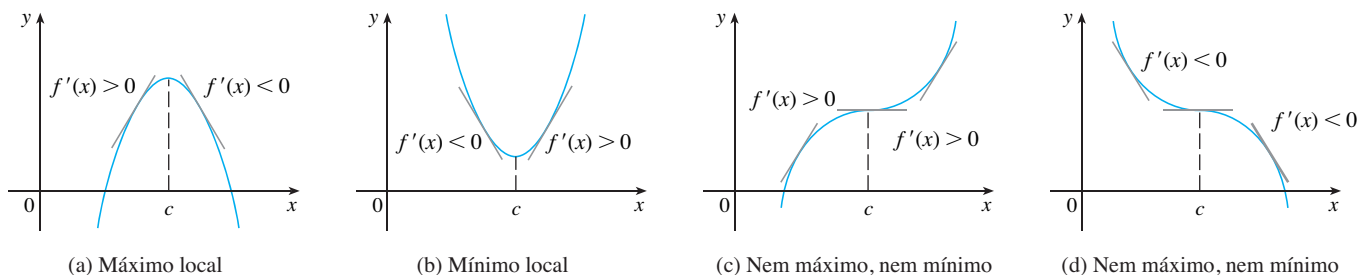



FIGURA 3

EXEMPLO 2 Encontre os valores de máximos e mínimos locais da função f do Exemplo 1.

SOLUÇÃO Da tabela na solução do Exemplo 1, vemos que o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em -1, logo $f(-1) = 0$ é um valor mínimo local pelo Teste da Primeira Derivada. Analogamente, o sinal de f' muda de negativo para positivo em 2, portanto $f(2) = -27$ é também um valor mínimo local. Como observado anteriormente, $f(0) = 5$ é um valor máximo local, pois o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0. □

EXEMPLO 3 Encontre os valores máximos e mínimos locais da função

$$g(x) = x + 2 \text{ sen } x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SOLUÇÃO Para achar os números críticos de g, derivamos:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x$$

Logo $g'(x) = 0$ quando $\cos x = -\frac{1}{2}$. As soluções dessa equação são $2\pi/3$ e $4\pi/3$. Como g é derivável em toda a parte, os únicos números críticos são $2\pi/3$ e $4\pi/3$, e portanto, analisaremos g na tabela a seguir.

■ Os sinais + na tabela vem do fato que $g'(x) > 0$ quando $\cos x > -\frac{1}{2}$. Do gráfico de $y = \cos x$, isto é verdade nos intervalos indicados.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	crescente em $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	–	decrescente em $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	crescente em $(4\pi/3, 2\pi)$

Como o sinal de $g'(x)$ muda de positivo para negativo em $2\pi/3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que há um máximo local em $2\pi/3$ e o valor máximo local é de

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2 \text{ sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3{,}83$$

Da mesma forma, o sinal de $g'(x)$ muda de negativo para positivo em $4\pi/3$, logo

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2 \text{ sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2{,}46$$

é um valor mínimo local. O gráfico de g na Figura 4 confirma nossa conclusão.

FIGURA 4
$y = x + 2 \text{ sen } x$

□

O QUE f'' NOS DIZ SOBRE f?

A Figura 5 mostra os gráficos de duas funções crescentes em (a, b). Ambos os gráficos unem o ponto A ao B, mas eles são diferentes, pois inclinam-se em direções diferentes. Como distinguir entre esses dois tipos de comportamento? Na Figura 6 as tangentes a essas curvas foram traçadas em vários pontos. Na parte (a) a curva fica acima das tangentes e f é chamada *côncava para cima* em (a, b). Em (b) a curva fica abaixo das tangentes e g é denominada *côncava para baixo* em (a, b).

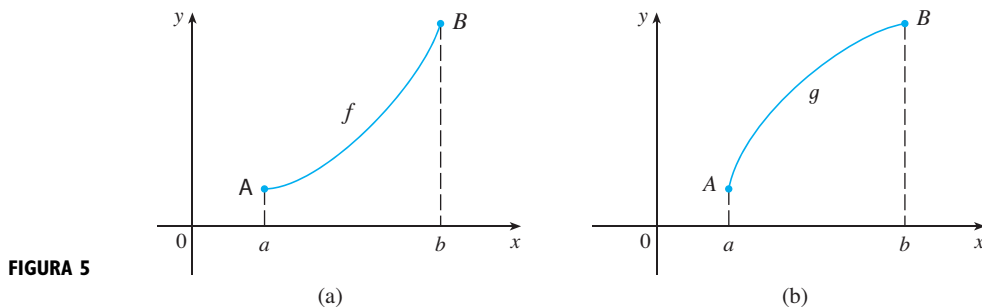



FIGURA 5

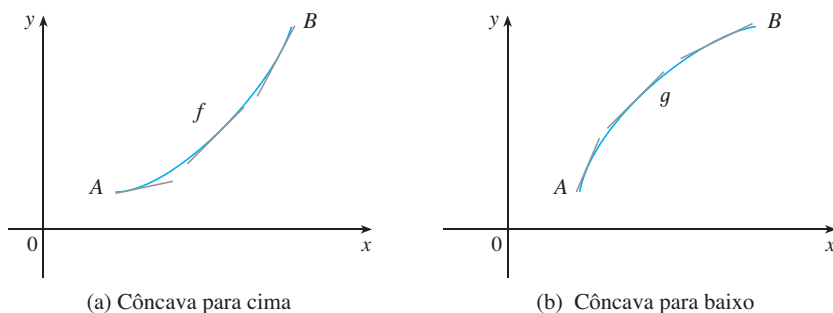



FIGURA 6

DEFINIÇÃO Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então ele é dito **côncavo para cima** em I. Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, é dito **côncavo para baixo** em I.

A Figura 7 mostra o gráfico de uma função que é côncava para cima (abrevia-se CC) nos intervalos (b, c), (d, e) e (e, p), e côncava para baixo (CB) nos intervalos (a, b), (c, d) e (p, q).

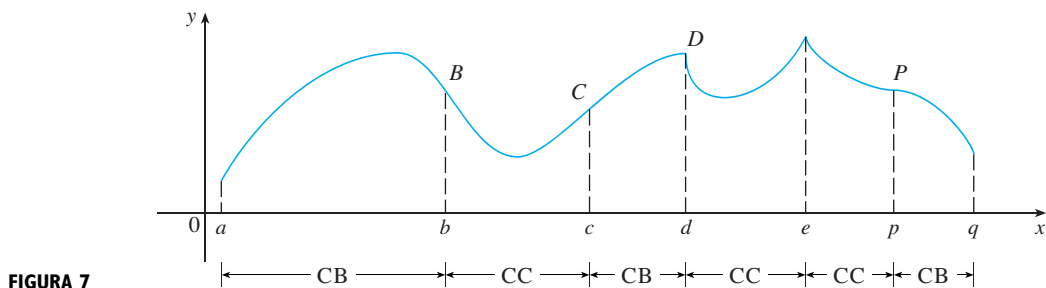



FIGURA 7

Vamos observar como a segunda derivada nos ajuda a determinar os intervalos de concavidade. Olhando para a Figura 6(a), você pode ver que, indo da esquerda para a direita, a inclinação da tangente cresce. Isso significa que a derivada f' é uma função crescente e consequentemente sua derivada f'' é positiva. Da mesma forma, na Figura 6(b) a inclinação da tangente decresce da esquerda para a direita; logo f' decresce e, portanto, f'' é ne-

gativa. Esse raciocínio pode ser invertido e sugere que o teorema a seguir é verdadeiro. Uma demonstração dele está dada no Apêndice F, a qual usa o Teorema do Valor Médio.

TESTE DA CONCAVIDADE

(a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

EXEMPLO 4 A Figura 8 mostra um gráfico da população de abelhas cipriotas criadas em um apiário. Como cresce a taxa populacional? Quando essa taxa é mais alta? Sobre quais intervalos P é côncavo para cima ou côncavo para baixo?

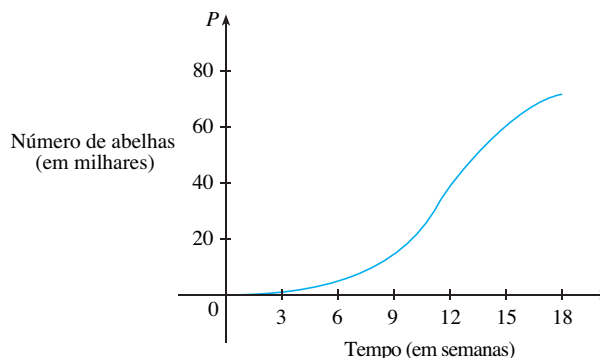



FIGURA 8

SOLUÇÃO Examinando a inclinação da curva quando t cresce, vemos que a taxa de crescimento populacional é inicialmente muito pequena, então torna-se maior até atingir o máximo em cerca de $t = 12$ semanas, e decresce até a população se estabilizar. À medida que a população tende a seu valor máximo de cerca de 75 000 (chamada *capacidade de suporte*) a taxa de crescimento, $P'(t)$, tende a 0. A curva parece ser côncava para cima em $(0, 12)$ e côncava para baixo em $(12, 18)$. □

No Exemplo 4, a curva populacional varia de côncava para cima para côncava para baixo aproximadamente no ponto (12, 38 000), denominado *ponto de inflexão* da curva. O significado desse ponto é que a taxa de crescimento populacional tem ali seu valor máximo. Em geral, um ponto de inflexão é aquele em que uma curva muda a direção de sua concavidade.

DEFINIÇÃO Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

Por exemplo, na Figura 7, B, C, D e P são os pontos de inflexão. Observe que se uma curva tiver uma tangente em um ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente aí.

Em vista do Teste da Concavidade, há um ponto de inflexão sempre que a segunda derivada mudar de sinal.

EXEMPLO 5 Esboce um gráfico possível de uma função f que satisfaça as seguintes condições:

(i) $f'(x) > 0$ em $(-\infty, 1)$, $\quad f'(x) < 0$ em $(1, \infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$, $\quad f''(x) < 0$ em $(-2, 2)$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

SOLUÇÃO A condição (i) nos diz que f cresce em $(-\infty, 1)$ e decresce em $(1, \infty)$. A condição (ii) diz que f é côncava para cima em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$, e côncava para baixo em

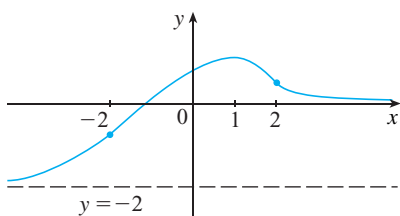



FIGURA 9

$(-2, 2)$. Da condição (iii) sabemos que o gráfico de f tem duas assíntotas horizontais: $y = -2$ e $y = 0$.

Primeiro traçamos a assíntota horizontal $y = -2$ como uma linha tracejada (veja a Figura 9). Então fazemos o gráfico de f tendendo a essa assíntota no extremo esquerdo, crescente até seu máximo no ponto $x = 1$ e decrescente em direção ao eixo x na extremidade direita. Também nos asseguramos de que o gráfico tem pontos de inflexão quando $x = -2$ e 2. Observe que fizemos a curva encurvada para cima para $x < -2$ e $x > 2$, e para baixo quando x está entre -2 e 2. □

Outra aplicação da segunda derivada é o teste a seguir para os valores máximo e mínimo. Ele é uma consequência do Teste da Concavidade.

FIGURA 10

$f''(c) > 0$, côncava para cima

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c.

(a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

(b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Por exemplo, a parte (a) é verdadeira, pois $f''(x) > 0$ próximo de c, e assim f é côncava para cima próximo de c. Isso significa que o gráfico de f se situa *acima* de sua tangente horizontal em c, de modo que f tem um mínimo local em c (veja a Figura 10).

EXEMPLO 6 Examine a curva $y = x^4 - 4x^3$ em relação à concavidade, aos pontos de inflexão e mínimos e máximos locais. Use essa informação para esboçar a curva.

SOLUÇÃO Se $f(x) = x^4 - 4x^3$, então

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para achar os números críticos fazemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = 0$ e $x = 3$. Para usar o Teste da Segunda Derivada, calculamos f nesses pontos críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

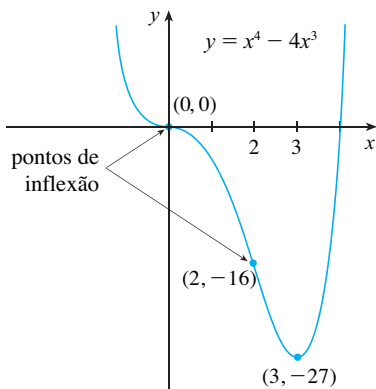
Uma vez que $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ é um mínimo local. Uma vez que $f''(0) = 0$, o Teste da Segunda Derivada não fornece informações sobre o número crítico 0. Mas, uma vez que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e também para $0 < x < 3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que f não tem um máximo ou mínimo local em 0. [De fato, a expressão para $f'(x)$ mostra que f decresce à esquerda de 3 e cresce à direita de 3.]

Como $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou 2, dividimos a reta real em intervalos com esses números como extremidades e completamos a seguinte tabela.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Concavidade
$(-\infty, 0)$	+	para cima
$(0, 2)$	−	para baixo
$(2, \infty)$	+	para cima

FIGURA 11

O ponto $(0, 0)$ é um ponto de inflexão, uma vez que a curva muda de côncava para cima para côncava para baixo aí. Também $(2, -16)$ é um ponto de inflexão, uma vez que é ali que a curva muda de côncava para baixo para côncava para cima.

Usando o mínimo local, os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão, esboçamos a curva na Figura 11. □

OBS. O Teste da Segunda Derivada é inconclusivo quando $f''(c) = 0$. Em outras palavras, esse ponto pode ser um máximo, um mínimo ou nenhum dos dois (como no Exem-

plo 6). Esse teste também falha quando $f''(c)$ não existe. Em tais casos, o Teste da Primeira Derivada deve ser usado. De fato, mesmo quando ambos os testes são aplicáveis, o Teste da Primeira da Derivada é frequentemente mais fácil de aplicar.

EXEMPLO 7 Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

SOLUÇÃO Você pode usar as regras de derivação para verificar que as duas primeiras derivadas são

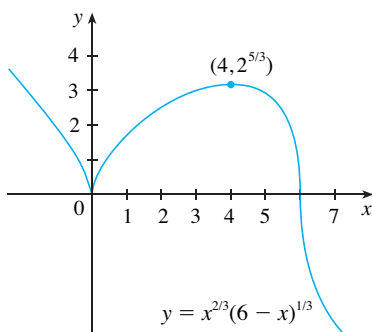
$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

■ Tente reproduzir o gráfico da Figura 12 em uma calculadora gráfica ou computador. Algumas máquinas fornecem o gráfico completo, outras, apenas a parte à direita do eixo y, enquanto outras produzem somente a parte entre $x = 0$ e $x = 6$. Para mais explicações, veja o Exemplo 7 da Seção 1.4. Uma expressão equivalente que fornece o gráfico correto é

$$y = (x^2)^{1/3} \cdot \frac{6-x}{|6-x|}|6-x|^{1/3}$$

FIGURA 12

Uma vez que $f'(x) = 0$ quando $x = 4$ e $f'(x)$ não existe quando $x = 0$ ou $x = 6$, os números críticos são 0, 4 e 6.

Intervalo	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	+	−	+	−	decrescente em $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	+	+	+	+	crescente em $(0, 4)$
$4 < x < 6$	−	+	+	−	decrescente em $(4, 6)$
$x > 6$	−	+	+	−	decrescente em $(6, \infty)$

Para achar os valores extremos locais usamos o Teste da Primeira Derivada. Uma vez que o sinal de f' muda de negativo para positivo em 0, $f(0) = 0$ é um mínimo local. Já que o sinal de f' muda de positivo para negativo em 4, $f(4) = 2^{5/3}$ é um máximo local. O sinal de f' não muda em 6; logo, não há mínimo nem máximo aí. (O Teste de Segunda Derivada poderia ser usado em 4, mas não em 0 ou 6, uma vez que f'' não existe aí.)

Examinando a expressão para $f''(x)$ e notando que $x^{4/3} \geqslant 0$ para todo x, temos $f''(x) < 0$ para $x < 0$ e para $0 < x < 6$ e $f''(x) > 0$ para $x > 6$. Logo, f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e $(0, 6)$ e côncava para cima em $(6, \infty)$, e o único ponto de inflexão é $(6, 0)$. O gráfico está esboçado na Figura 12. Observe que a curva tem tangentes verticais em $(0, 0)$ e $(6, 0)$, pois $|f'(x)| \to \infty$ quando $x \to 0$ e quando $x \to 6$. □

EXEMPLO 8 Use as primeira e segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, junto com as assíntotas, para esboçar seu gráfico.

SOLUÇÃO Observe que o domínio de f é $\{x \mid x \neq 0\}$; portanto, verificamos a existência de assíntotas verticais calculando os limites à esquerda e à direita quando $x \to 0$. Quando $x \to 0^+$, sabemos que $t = 1/x \to \infty$, logo

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty$$

e isso mostra que $x = 0$ é uma assíntota vertical. Quando $x \to 0^-$, temos $t = 1/x \to -\infty$, logo

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

Quando $x \to \pm\infty$, temos $1/x \to 0$ e, portanto,

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Isso mostra que $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Agora, vamos calcular a derivada. A Regra da Cadeia dá

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

Uma vez que $e^{1/x} > 0$ e $x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, temos $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 0$. Assim, f é decrescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, \infty)$. Não há número crítico; logo, a função não tem nem máximo nem mínimo. A segunda derivada é

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$$

Uma vez que $e^{1/x} > 0$ e $x^4 > 0$, temos $f''(x) > 0$ quando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ e $f''(x) < 0$ quando $x < -\frac{1}{2}$. Portanto, a curva é côncava para baixo em $(-\infty, -\frac{1}{2})$ e côncava para cima em $(-\frac{1}{2}, 0)$ e em $(0, \infty)$. O ponto de inflexão é $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$.

Para esboçar o gráfico de f, primeiro desenhamos a assíntota horizontal $y = 1$ (como uma linha tracejada), junto com as partes da curva próxima da assíntota em um esboço preliminar [Figura 13(a)]. Essas partes refletem a informação relativa aos limites e o fato de que f é decrescente tanto em $(-\infty, 0)$ como em $(0, \infty)$. Observe que indicamos que $f(x) \to 0$ quando $x \to 0^-$ mesmo que $f(0)$ não exista. Na Figura 13(b) terminamos o esboço incorporando a informação relativa à concavidade e ao ponto de inflexão. Na Figura 13(c) verificamos nosso trabalho com uma ferramenta gráfica.

(a) Esboço preliminar

(b) Esboço acabado

(c) Confirmação computacional

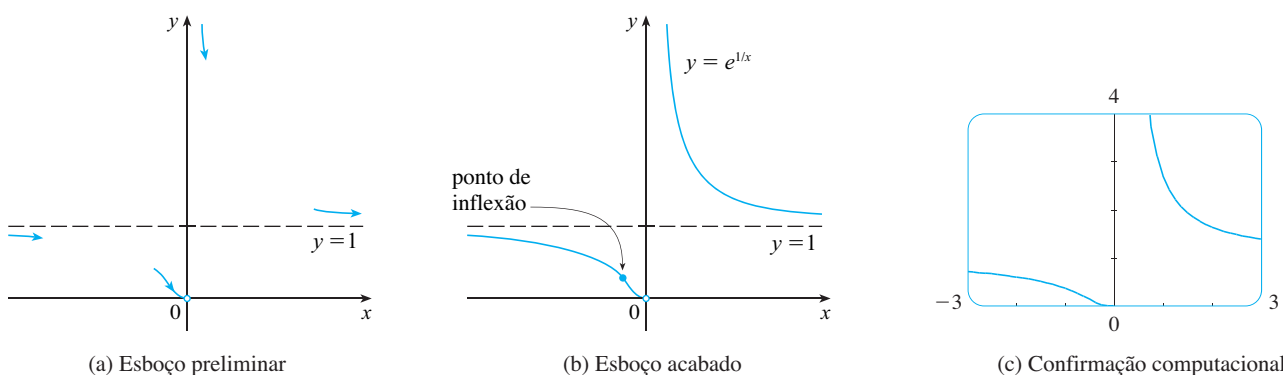



FIGURA 13

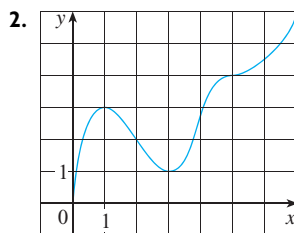
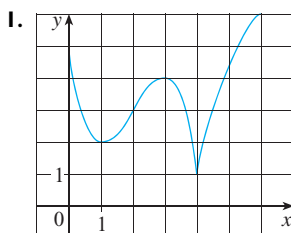
□

4.3 EXERCÍCIOS

1–2 Use o gráfico dado de f para encontrar o seguinte:

(a) Os intervalos abertos nos quais f é crescente.
(b) Os intervalos abertos nos quais f é decrescente.
(c) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para cima.
(d) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para baixo.
(e) As coordenadas dos pontos de inflexão.

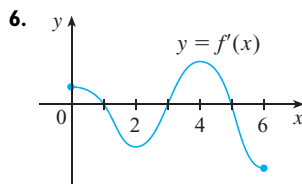
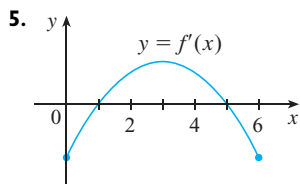
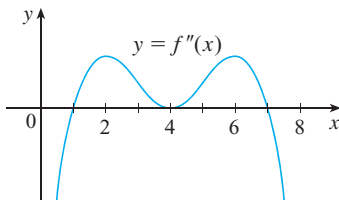
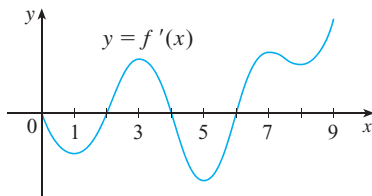
1.

2.

3. Suponha que lhe foi dada uma fórmula para uma função f.
(a) Como você determina onde f é crescente ou decrescente?
(b) Como você determina onde o gráfico de f é côncavo para cima ou para baixo?
(c) Como você localiza os pontos de inflexão?

4. (a) Enuncie o Teste da Primeira Derivada.
(b) Enuncie o Teste da Segunda Derivada. Em que circunstância ele é inconclusivo? O que você faz se ele falha?

5–6 O gráfico da *derivada* f' de uma função f está mostrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?
(b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?

5.

6.

7. O gráfico da segunda derivada f'' de uma função f está mostrado. Diga as coordenadas x dos pontos de inflexão de f. Justifique sua resposta.

8. O gráfico da primeira derivada f' de uma função f está mostrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo? Explique.
(b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local? Explique.
(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo? Explique.
(d) Quais são as coordenadas x dos pontos de inflexão de f? Por quê?

9–18
(a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores máximo e mínimo local de f.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

9. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

10. $f(x) = 5 - 3x^2 + x^3$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

19–21 Encontre os valores máximo e mínimo locais de f usando ambos os Testes das Primeira e Segunda Derivadas. Qual método você prefere?

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

20. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

21. $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$

22. (a) Encontre os números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) O que o Teste da Segunda Derivada mostra para você sobre o comportamento de f nesses números críticos?
(c) O que mostra o Teste da Primeira Derivada?

23. Suponha que f'' seja contínua em $(-\infty, \infty)$.
(a) Se $f'(2) = 0$ e $f''(2) = -5$, o que se pode afirmar sobre f?
(b) Se $f'(6) = 0$ e $f''(6) = 0$, o que se pode afirmar sobre f?

24–29 Esboce o gráfico de uma função que satisfaça todas as condições dadas.

24. $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 1$, assíntota vertical $x = 1$,
$f''(x) > 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$, $f''(x) < 0$ se $1 < x < 3$

25. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$ ou $x > 4$,
$f''(x) > 0$ se $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$

26. $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ se $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ se $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ se $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ se $-2 < x < 0$ e ponto de inflexão em (0,1)

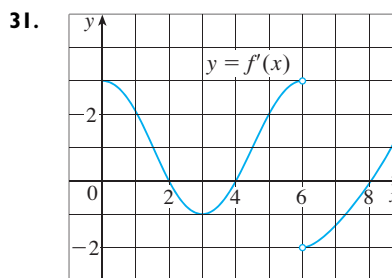
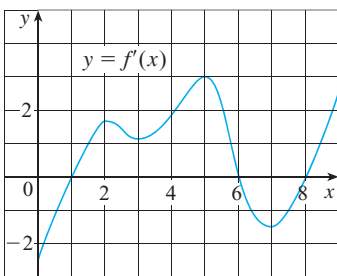
27. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty$, $f''(x) > 0$ se $|x| \neq 2$

28. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(2) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ se $0 < x < 3$, $f''(x) > 0$ se $x > 3$

29. $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x.

30. Suponha que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$ e $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x.
(a) Esboce um gráfico possível de f.
(b) Quantas soluções a equação $f(x) = 0$ tem? Por quê?
(c) É possível que $f'(2) = \frac{1}{3}$? Por quê?

31–32 O gráfico da derivada f' de uma função contínua f está ilustrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?
(b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local?
(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo?
(d) Diga as coordenadas x dos pontos de inflexão.
(e) Supondo que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f.

31.

32.

33–44

(a) Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

(b) Encontre os valores máximos ou mínimos locais.

(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

(d) Use as informações das partes (a)–(c) para esboçar o gráfico. Verifique seu trabalho com uma ferramenta gráfica, se você tiver uma.

33. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ **34.** $f(x) = 2 + 3x - x^3$

35. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$ **36.** $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

37. $h(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$ **38.** $h(x) = (x^2 - 1)^3$

39. $A(x) = x\sqrt{x+3}$ **40.** $B(x) = 3x^{2/3} - x$

41. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$ **42.** $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

44. $f(t) = t + \cos t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

45–52

(a) Encontre as assíntotas vertical e horizontal.

(b) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.

(c) Encontre os valores máximos e mínimos locais.

(d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

(e) Use a informação das partes (a)–(d) para esboçar o gráfico de f.

45. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$ **46.** $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = x \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

49. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ **50.** $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

51. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$ **52.** $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

53. Suponha que a derivada da função f seja $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. Em qual intervalo f está crescendo?

54. Use os métodos desta seção para esboçar a curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, onde a é uma constante positiva. O que os membros desta família de curvas têm em comum? Como eles diferem entre si?

55–56

(a) Use um gráfico de f para estimar os valores máximo e mínimo. Então, encontre os valores exatos.

(b) Estime o valor de x em que f cresce mais rapidamente. Então, encontre o valor exato.

55. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **56.** $f(x) = x^2 e^{-x}$

57–58

(a) Use um gráfico de f para estimar aproximadamente os intervalos da concavidade e as coordenadas dos pontos de inflexão.

(b) Use um gráfico de f'' para dar uma estimativa melhor.

57. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

58. $f(x) = x^3(x - 2)^4$

SCA **59–60** Estime os intervalos da concavidade com precisão de uma casa decimal usando um sistema de computação algébrica para calcular e fazer o gráfico de f''.

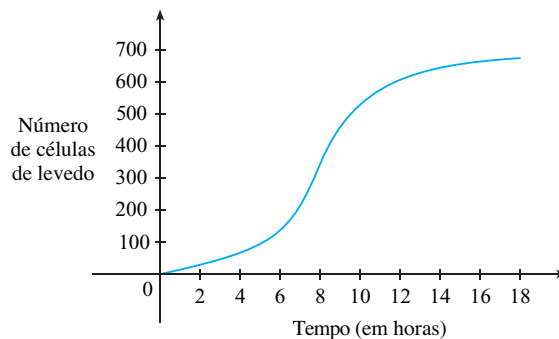
59. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ **60.** $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{tg}^{-1} x}{1 + x^3}$

61. É dado o seguinte gráfico de uma população de células de levedo em uma nova cultura de laboratório em função do tempo.

(a) Descreva como varia a taxa de crescimento populacional.

(b) Quanto a taxa é mais alta?

(c) Em quais intervalos a função população é côncava para cima ou para baixo?

(d) Estime as coordenadas do ponto de inflexão.

62. Seja $f(t)$ a temperatura no instante t onde você mora e suponha que no instante $t = 3$ você se sinta desconfortavelmente quente. Como você se sente em relação às informações dadas em cada caso?

(a) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = 4$ (b) $f'(3) = 2, \quad f''(3) = -4$

(c) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = 4$ (d) $f'(3) = -2, \quad f''(3) = -4$

63. Seja $h(t)$ uma medida do conhecimento adquirido por você estudando t horas para um teste. O que você acredita ser maior, $K(8) - K(7)$ ou $K(3) - K(2)$? O gráfico de K é côncavo para cima ou para baixo? Por quê?

64. A caneca mostrada na figura está sendo enchida com café a uma taxa constante (medida em volume por unidade de tempo). Esboce um gráfico da profundidade do café na caneca como uma função do tempo. Forneça uma explicação para o formato do gráfico em termos de concavidade. Qual o significado do ponto de inflexão?

65. Uma *curva de resposta à droga* descreve o nível de medicamento na corrente sanguínea depois de uma droga ser administrada. Uma função onda $S(t) = At^p e^{-kt}$ é usada frequentemente para modelar a curva de resposta, refletindo uma oscilação inicial acentuada no nível da droga e então um declínio gradual. Se, para uma droga particular, $A = 0{,}01$, $p = 4$, $k = 0{,}07$ e t for medido em minutos, estime o tempo correspondente aos pontos de inflexão e explique seu significado. Se você tiver uma ferramenta gráfica, use-a para traçar a curva de resposta à droga.

66. A família das curvas em forma de sino

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

ocorre em probabilidade e estatística, nas quais ela é chamada *função densidade normal*. A constante μ é denominada *média*, e a constante positiva σ é conhecida como *desvio-padrão*. Por simplicidade, mudamos a escala da função de forma a remover o fator $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ e vamos analisar o caso especial onde $\mu = 0$. Logo, estudamos a função

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encontre a assíntota, o valor máximo e os pontos de inflexão de f.

(b) Que papel desempenha σ no formato da curva?

(c) Ilustre, fazendo o gráfico de quatro membros dessa família sobre a mesma tela.

67. Encontre uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenha um valor máximo local 3 em -2 e um valor mínimo local 0 em 1.

68. Para quais valores dos números a e b a função

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tem o valor máximo $f(2) = 1$?

69. Mostre que a curva $y = (1 + x)/(1 + x^2)$ tem três pontos de inflexão e todos ficam sobre uma mesma reta.

70. Mostre que as curvas $y = e^{-x}$ e $y = -e^{-x}$ tocam a curva $y = e^{-x}$ sen x em seu ponto de inflexão.

71. Suponha que f seja derivável em um intervalo I e $f'(x) > 0$ para todos os números x em I, exceto para um único número c. Demonstre que f é uma função crescente em todo o intervalo.

72–74 Suponha que todas as funções sejam duas vezes deriváveis e que as segundas derivadas nunca sejam nulas.

72. (a) Se f e g forem côncavas para cima em I, mostre que $f + g$ é côncava para cima em I.

(b) Se f for positiva e côncava para cima em I, mostre que a função $g(x) = [f(x)]^2$ é côncava para cima em I.

73. (a) Se f e g forem funções positivas, crescentes e côncavas para cima em I, mostre que a função produto fg é côncava para cima em I.

(b) Mostre que a parte (a) permanece verdadeira mesmo que f e g sejam ambas decrescentes.

(c) Suponha que f seja crescente e g, decrescente. Mostre, dando três exemplos, que fg pode ser côncava para cima, côncava para baixo ou linear. Por que os argumentos usados nas partes (a) e (b) não podem ser usados neste caso?

74. Suponha que f e g sejam ambas côncavas para cima em $(-\infty, \infty)$. Sob que condições em f a função composta $h(x) = f(g(x))$ será côncava para cima?

75. Mostre que tg $x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugestão*: Mostre que $f(x) = \text{tg } x - x$ é crescente em $(0, \pi/2)$.]

76. (a) Mostre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.

(b) Deduza que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.

(c) Use a indução matemática para demonstrar que para $x \geqslant 0$ e qualquer inteiro positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

77. Mostre que uma função cúbica (um polinômio de terceiro grau) tem sempre exatamente um ponto de inflexão. Se seu gráfico possui três intersecções com o eixo x, x_1, x_2 e x_3, mostre que a coordenada x do ponto de inflexão é $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

78. Para quais valores de c o polinômio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tem dois pontos de inflexão? E um ponto de inflexão? E nenhum? Ilustre, fazendo o gráfico de P para vários valores de c. Como o gráfico varia quando c decresce?

79. Demonstre que se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f e f'' existir em um intervalo aberto contendo c, então $f''(c) = 0$. [*Sugestão*: Aplique o Teste da Primeira Derivada e o Teorema de Fermat à função $g = f'$.]

80. Mostre que se $f(x) = x^4$, então $f''(0) = 0$, mas $(0, 0)$ não é um ponto de inflexão do gráfico de f.

81. Mostre que a função $g(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$, mas $g''(0)$ não existe.

82. Suponha que f''' seja contínua e $f'(c) = f''(c) = 0$, mas $f'''(c) > 0$. A função f tem um mínimo ou máximo local em c? A função f apresenta um ponto de inflexão em c?

83. Os três casos no Teste da Primeira Derivada cobrem as situações encontradas usualmente, mas não esgotam todas as possibilidades. Considere as função f, g e h cujos valores em 0 são todos 0 e, para $x \neq 0$

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad g(x) = x^4\left(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4\left(-2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

(a) Mostre que 0 é um número crítico de todas as três funções, mas suas derivadas mudam de sinal infinitas vezes em ambos os lados de 0.

(b) Mostre que f não tem nem um máximo nem um mínimo local em 0, que g tem um mínimo local e que h tem um máximo local.

4.4 FORMAS INDETERMINADAS E A REGRA DE L'HÔSPITAL

Suponha que estejamos tentando analisar o comportamento da função

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Embora F não esteja definida quando $x = 1$, precisamos saber como F se comporta *próximo* de 1. Em particular, gostaríamos de saber o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} \tag{1}$$

No cálculo desse limite não podemos aplicar a Propriedade 5 dos Limites (o limite de um quociente é o quociente dos limites; veja a Seção 2.3), pois o limite do denominador é 0. De fato, embora o limite em (1) exista, seu valor não é óbvio, porque tanto o numerador como o denominador tendem a 0, e $\frac{0}{0}$ não está definido.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$, então esse limite pode ou não existir e é denominado **forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$**. Encontramos alguns limites desse tipo no Capítulo 2. Para as funções racionais, podemos cancelar os fatores comuns:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Usamos um argumento geométrico para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Mas esses métodos não funcionam para limites tais como (1); de modo que nesta seção introduzimos um método sistemático, conhecido como a *Regra de L'Hôspital*, para o cálculo de formas indeterminadas.

Outra situação na qual um limite não é óbvio ocorre quando procuramos uma assíntota horizontal de F e precisamos calcular o limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1} \tag{2}$$

Não é óbvio como calcular esse limite, pois tanto o numerador como o denominador tornam-se muito grandes quando $x \to \infty$. Há uma disputa entre o numerador e o deno-

minador. Se o numerador ganhar, o limite será ∞; se o denominador ganhar, a resposta será 0. Ou pode haver algum equilíbrio e, nesse caso, a resposta pode ser algum número positivo finito.

Em geral, se tivermos um limite da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

em que $f(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) e $g(x) \to \infty$ (ou $-\infty$), então o limite pode ou não existir, e é chamado **forma indeterminada do tipo ∞/∞**. Vimos na Seção 2.6 que esse tipo de limite pode ser calculado para certas funções – incluindo aquelas racionais – dividindo o numerador e o denominador pela potência mais alta de x que ocorre no denominador. Por exemplo,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

Esse método não funciona para um limite como (2), mas a Regra de L'Hôspital aplica-se também a esse tipo de forma indeterminada.

REGRA DE L'HÔSPITAL Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

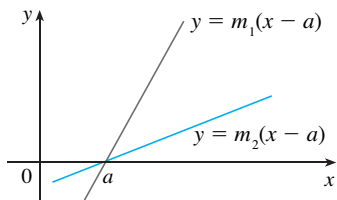
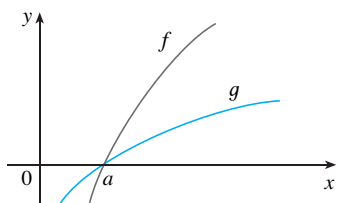
$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

L'HÔSPITAL

A Regra de L'Hôspital é assim chamada em homenagem ao nobre francês marquês de L'Hôspital (1661-1704), mas foi descoberta pelo matemático suíço John Bernoulli (1667-1748). Você pode encontrar algumas vezes L'Hôspital escrito como L'Hôpital, mas ele soletrava seu próprio nome como L'Hôspital, como era comum no século XVII. Veja o Exercício 77 que mostra o exemplo o qual o marquês usou para ilustrar sua regra. Veja o projeto na página 287 para mais detalhes históricos.

OBS. 1 A Regra de L'Hôspital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas estejam satisfeitas. É especialmente importante verificar as condições relativas aos limites de f e g antes de usar a Regra de L'Hôspital.

OBS. 2 A Regra de L'Hôspital é válida também para os limites laterais e para os limites no infinito ou no infinito negativo; isto é, "$x \to a$" pode ser substituído por quaisquer dos símbolos a seguir: $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, ou $x \to -\infty$.

OBS. 3 Para o caso especial no qual $f(a) = g(a) = 0$, f' e g' são contínuas e $g'(a) \neq 0$, é fácil ver por que a Regra de L'Hôspital é verdadeira. De fato, usando a forma alternativa da definição de derivada, temos

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

FIGURA 1

■ A Figura 1 sugere visualmente por que a Regra de L'Hôspital pode ser verdadeira. O primeiro gráfico mostra duas funções deriváveis f e g, que tendem a zero quando $x \to a$. Se dermos um *zoom* em direção ao ponto $(a, 0)$, os gráficos começarão a parecer quase lineares. Mas se as funções forem realmente lineares, como no segundo gráfico, então sua razão será

$$\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

que é a razão de suas derivadas. Isso sugere que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

⊘ Lembre-se de que quando usamos a regra de L'Hôspital, derivamos o numerador e o denominador *separadamente*. Nós *não* usamos a Regra do Quociente.

■ O gráfico da função do Exemplo 2 está na Figura 2. Notamos anteriormente que a função exponencial cresce muito mais rapidamente do que a função potência; assim, o resultado do Exemplo 2 é esperado. Veja também o Exercício 69.

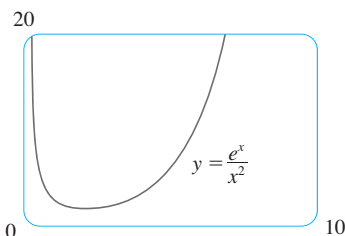



FIGURA 2

■ O gráfico da função do Exemplo 3 está na Figura 3. Já havíamos discutido anteriormente o lento crescimento dos logaritmos, então não é surpresa que essa razão tenda a zero quando $x \to \infty$. Veja também o Exercício 70.

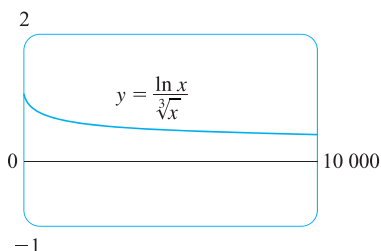



FIGURA 3

É mais difícil demonstrar a versão geral da Regra de L'Hôspital. Veja o Apêndice F.

EXEMPLO 1 Encontre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

SOLUÇÃO Uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

podemos aplicar a Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$ □

EXEMPLO 2 Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

SOLUÇÃO Temos $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$; logo, a Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x}$$

Uma vez que $e^x \to \infty$ e $2x \to \infty$ quando $x \to \infty$, o limite do lado direito também é indeterminado, mas uma segunda aplicação da Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$ □

EXEMPLO 3 Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

SOLUÇÃO Uma vez que $\ln x \to \infty$ e $\sqrt[3]{x} \to \infty$ quando $x \to \infty$, a Regra de L'Hôspital pode ser aplicada

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Observe que o limite do lado direito é agora indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$. Mas em vez de aplicar a Regra de L'Hôspital uma segunda vez, como fizemos no Exemplo 2, simplificamos a expressão e vemos que é desnecessária uma segunda aplicação da regra:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$ □

EXEMPLO 4 Encontre $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$. (Veja o Exercício 38(d) da Seção 2.2.)

SOLUÇÃO Observando que $\operatorname{tg} x - x \to 0$ e $x^3 \to 0$ quando $x \to 0$, usamos então a Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

Uma vez que o limite do lado direito é ainda indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$, aplicamos novamente a Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}$$

■ O gráfico na Figura 4 dá confirmação visual do resultado do Exemplo 4. Se déssemos um *zoom*, porém, obteríamos um gráfico impreciso, pois tg x está próximo de x para x pequeno. Veja o Exercício 38(d) na Seção 2.2.

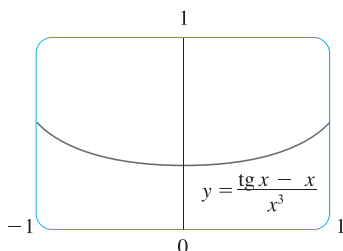



FIGURA 4

Pelo fato de $\lim_{x\to 0} \sec^2 x = 1$, simplificamos os cálculos anteriores da seguinte forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x\, \text{tg}\, x}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \sec^2 x \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}\, x}{x}$$

Podemos calcular este último limite ou usando a Regra de l´Hospital mais uma vez ou escrevendo tg x como (sen x)/(cos x) e usando nosso conhecimento de limites trigonométricos. Juntando todos estes passos, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x\, \text{tg}\, x}{6x}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}\, x}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}$$ □

EXEMPLO 5 Encontre $\lim_{x\to\pi^-} \dfrac{\text{sen}\, x}{1 - \cos x}$.

SOLUÇÃO Se tentarmos usar cegamente a Regra de L'Hôspital, obteremos

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\text{sen}\, x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = -\infty$$

Isso está **errado!** Embora o numerador sen $x \to 0$ quando $x \to \pi^-$, perceba que o denominador $(1 - \cos x)$ não tende a zero; logo, não podemos aplicar aqui a Regra de L'Hôspital.

O limite pedido é na verdade fácil de ser encontrado, pois a função é contínua em π e o denominador é diferente de zero:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\text{sen}\, x}{1 - \cos x} = \frac{\text{sen}\, \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$ □

O Exemplo 5 mostra o que pode acontecer de errado ao usar impensadamente a Regra de L'Hôspital. Outros limites *podem* ser encontrados pela Regra de L'Hôspital, mas são mais facilmente calculados por outros métodos. (Veja os Exemplos 3 e 5 na Seção 2.3, o Exemplo 3 na Seção 2.6 e a discussão no começo desta seção.) Assim, quando calcular qualquer limite, considere outros métodos antes de usar a Regra de L'Hôspital.

PRODUTOS INDETERMINADOS

Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não está claro qual é o valor de $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)$, se houver algum. Há uma disputa entre f e g. Se f vencer, a resposta é 0; se g vencer, a resposta será ∞ (ou $-\infty$). Ou pode haver um equilíbrio, e então a resposta é um número finito diferente de zero. Esse tipo de limite é chamado **forma indeterminada do tipo 0 · ∞**. Podemos trabalhar com ela escrevendo o produto fg como um quociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{ou} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Isso converte o limite dado na forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞ de modo que podemos usar a Regra de L'Hôspital.

EXEMPLO 6 Calcule $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

SOLUÇÃO O limite dado é indeterminado, pois, como $x \to 0^+$, o primeiro fator (x) tende a 0, enquanto o segundo fator ($\ln x$) tende a $-\infty$. Escrevendo $x = 1/(1/x)$, temos $1/x \to \infty$ quando $x \to 0^+$; logo, a Regra de L'Hôspital fornece

■ A Figura 5 mostra o gráfico da função do Exemplo 6. Observe que a função não está definida em $x = 0$; o gráfico tende à origem, mas nunca realmente a atinge.

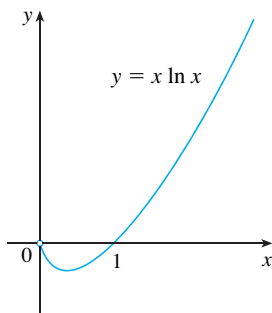



FIGURA 5

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \qquad \square$$

OBS. Ao resolver o Exemplo 6, outra opção possível seria escrever

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Isso dá uma forma indeterminada do tipo 0/0, mas, se aplicarmos a Regra de L'Hôspital, obteremos uma expressão mais complicada do que a que começamos. Em geral, quando reescrevemos o produto indeterminado, tentamos escolher a opção que leva a um limite mais simples.

DIFERENÇAS INDETERMINADAS

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, então o limite

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)]$$

é chamado **forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$**. Novamente há uma disputa entre f e g. Será a resposta ∞ (se f ganhar) ou será $-\infty$ (se g ganhar), ou haverá entre eles um equilíbrio, resultando um número finito? Para descobrir, tentamos converter a diferença em um quociente – usando um denominador comum ou racionalização, ou pondo em evidência um fator em comum, por exemplo –, de maneira a termos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.

EXEMPLO 7 Calcule $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$

SOLUÇÃO Observe primeiro que $\sec x \to \infty$ e $\operatorname{tg} x \to \infty$ quando $x \to (\pi/2)^-$; logo, o limite é indeterminado. Aqui usamos um denominador comum:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

Observe que o uso da Regra de L'Hôspital é justificado, pois $1 - \operatorname{sen} x \to 0$ e $\cos x \to 0$ quando $x \to (\pi/2)^-$. $\square$

POTÊNCIAS INDETERMINADAS

Várias formas indeterminadas surgem do limite

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Cada um dos três casos pode ser tratado tanto tomando o logaritmo natural:

$$\text{seja} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{então} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

quanto escrevendo a função como uma exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

(Lembre-se de que esses métodos foram usados na derivação dessas funções.) Em ambos os métodos somos levados a um produto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que é do tipo $0 \cdot \infty$.

EXEMPLO 8 Calcule $\lim_{x \to 0^+} (1 + \text{sen } 4x)^{\cot x}$.

SOLUÇÃO Observe primeiro que, quando $x \to 0^+$, temos $1 + \text{sen } 4x \to 1$ e $\text{cotg } x \to \infty$, assim, o limite dado é indeterminado. Seja

$$y = (1 + \text{sen } 4x)^{\cot x}$$

Então $\qquad \ln y = \ln[(1 + \sin 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \text{sen } 4x)$

logo, a Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \text{sen } 4x)}{\text{tg } x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \text{sen } 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Até agora calculamos o limite de $\ln y$, mas o que realmente queremos é o limite de y. Para achá-lo usamos o fato de que $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4 \qquad \square$$

■ O gráfico da função $y = x^x, x > 0$ é mostrado na Figura 6. Observe que embora 0^0 não esteja definido, os valores da função tendem a 1 quando $x \to 0^+$. Isso confirma o resultado do Exemplo 9.

FIGURA 6

EXEMPLO 9 Calcule $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

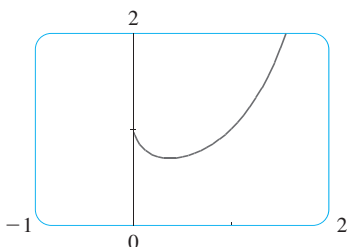
SOLUÇÃO Observe que esse limite é indeterminado, pois $0^x = 0$ para todo $x > 0$, mas $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$. Podemos proceder como no Exemplo 8 ou escrever a função como uma exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

No Exemplo 6 usamos a Regra de L'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Portanto

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1 \qquad \square$$

4.4 EXERCÍCIOS

1–4 Dado que

$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 1$

$\lim_{x \to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a} q(x) = \infty$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$

(c) $\lim_{x \to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$ (d) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$

(e) $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x \to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x \to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x \to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x \to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x \to a} [p(x) - q(x)]$

(c) $\lim_{x \to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x \to a} [h(x)]^{p(x)}$

(d) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x \to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–64 Encontre o limite. Use a Regra de L'Hôspital quando for apropriado. Se existir um método mais elementar, use-o. Se a Regra de L'Hôspital não for aplicável, explique por quê.

5. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

6. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

7. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$

8. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\lim_{x \to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen } x}$

10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{\text{tg } 5x}$

11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x^3}$

12. $\lim_{t\to \pi} \dfrac{e^{3t} - 1}{t}$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } px}{\text{tg } qx}$

14. $\lim_{t\to \pi} \dfrac{\text{tg } x}{x}$

15. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

16. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x + x^2}{1 - 2x^2}$

17. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

18. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

19. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

20. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\text{sen } \pi x}$

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{tgh } x}{\text{tg } x}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x - \text{tg } x}$

25. $\lim_{t\to 0} \dfrac{5^t - 3^t}{t}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x - x}{x^3}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^{-1} x}{x}$

28. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

30. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \text{sen } x}{x + \cos x}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\text{tg}^{-1}(4x)}$

33. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

34. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

35. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

36. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen } x}$

37. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

38. $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

39. $\lim_{x\to \infty} x \text{ sen}(\pi/x)$

40. $\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$

41. $\lim_{x\to 0} \cot 2x \text{ sen } 6x$

42. $\lim_{x\to \infty} e^{-x} \ln x$

43. $\lim_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$

44. $\lim_{x\to \pi/4} (1 - \text{tg } x) \sec x$

45. $\lim_{x\to 1^+} \ln x \text{ tg}(\pi x/2)$

46. $\lim_{x\to \infty} x \text{ tg}(1/x)$

47. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

48. $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

49. $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

50. $\lim_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$

51. $\lim_{x\to \infty} (x - \ln x)$

52. $\lim_{x\to \infty} (xe^{1/x} - x)$

53. $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2}$

54. $\lim_{x\to 0^+} (\text{tg } 2x)^x$

55. $\lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

56. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

57. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2}\right)^x$

58. $\lim_{x\to \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

59. $\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$

60. $\lim_{x\to \infty} (e^x + x)^{1/x}$

61. $\lim_{x\to 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$

62. $\lim_{x\to 1} (2 - x)^{\text{tg}(\pi x/2)}$

63. $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

64. $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x - 3}{2x + 5}\right)^{2x + 1}$

65–66 Use gráficos para estimar o valor do limite. A seguir, use a Regra de L'Hôspital para encontrar o valor exato.

65. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

66. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

67–68 Ilustre a Regra de L'Hôspital fazendo o gráfico de $f(x)/g(x)$ e $f'(x)/g'(x)$ próximo de $x = 0$, para ver que essas razões têm o mesmo limite quando $x \to 0$. Calcule também o valor exato do limite.

67. $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = x^3 + 4x$

68. $f(x) = 2x \text{ sen } x, \quad g(x) = \sec x - 1$

69. Demonstre que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para todo n inteiro positivo. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito que qualquer potência de x.

70. Demonstre que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para todo número $p > 0$. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente que qualquer potência de x.

71. Mostre o que acontece se você tentar usar a regra de l´Hospital para calcular

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Calcule o limite usando outro método.

72. Se um objeto de massa m é solto a partir do repouso, um modelo para sua velocidade v após t segundos, levando-se em conta a resistência do ar, é

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

em que g é a aceleração da gravidade e c é uma constante positiva. (No Capítulo 9 deduziremos essa equação a partir da hipótese de que a resistência do ar é proporcional à velocidade do objeto.)

(a) Calcule $\lim_{t\to\infty} v$. Qual o significado desse limite?

(b) Para um valor fixo de t, use a Regra de L'Hôspital para calcular $\lim_{c\to 0^+} v$. O que você pode concluir sobre a velocidade de um objeto caindo no vácuo?

73. Se um montante inicial de dinheiro A_0 for investido a uma taxa de juros i capitalizado n vezes ao ano, o valor do investimento após t anos será

$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Se $n \to \infty$, nos referimos à *capitalização contínua* de juros. Use a regra de l´Hospital para mostrar que se os juros forem capitalizados continuamente, então o montante após t anos será

$$A = A_0 e^{rt}$$

74. Se uma bola de metal de massa m for lançada na água e a força de resistência for proporcional ao quadrado da velocidade, então a distância que a bola percorreu até o instante t é dada por

$$s(t) = \frac{m}{c} \ln \cosh \sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

em que c é uma constante positiva. Encontre $\lim_{c\to 0^+} s(t)$.

75. Se um campo eletrostático E agir em um dielétrico polar líquido ou gasoso, o momento de dipolo resultante P por unidade de volume é

$$P(E) = \frac{e^E + e^{-E}}{e^E - e^{-E}} - \frac{1}{E}$$

Mostre que $\lim_{E\to 0^+} P(E) = 0$.

76. Um cabo de metal tem raio r e é coberto por isolante, de modo que a distância do centro do cabo ao exterior do isolante é R. A velocidade v de um impulso elétrico no cabo é

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

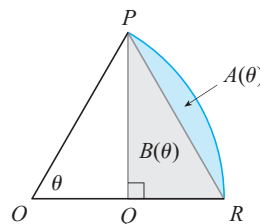
em que c é uma constante positiva. Encontre os seguintes limites e interprete suas respostas.

(a) $\lim_{R\to r^+} v$ (b) $\lim_{r\to 0^+} v$

77. A primeira aparição impressa da Regra de l'Hôspital foi no livro *Analyse des Infiniment Petits* publicado pelo marquês de l'Hôspital em 1696. Este foi o primeiro *livro texto* de cálculo a ser publicado e o exemplo que o marquês usou em seu livro para ilustrar sua regra foi encontrar o limite da função

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando x tende a a, onde $a > 0$. (Naquela época era comum escrever aa em vez de a^2.) Resolva este problema.

78. A figura mostra um setor de um círculo com ângulo central θ. Seja $A(\theta)$ a área do segmento entre a corda PR e o arco PR. Seja $B(\theta)$ a área do triângulo PQR. Encontre $\lim_{\theta\to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.

79. Se f' for contínua, $f(2) = 0$ e $f'(2) = 7$, calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2 + 3x) + f(2 + 5x)}{x}$$

80. Para quais valores de a e b a equação a seguir é válida?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$$

81. Se f' for contínua, use a Regra de L'Hôspital para mostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f'(x)$$

Explique o significado dessa equação utilizando um diagrama.

82. Se f'' for contínua, mostre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x)$$

83. Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Use a definição de derivada para calcular $f'(0)$.

(b) Mostre que f tem derivadas de todas as ordens definidas em $\mathbb{R}$. [*Sugestão*: Mostre primeiro por indução que existe um polinômio $p_n(x)$ e um inteiro não negativo k_n tal que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]

84. Seja

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em 0.

(b) Pesquise graficamente se f é derivável em 0 por meio de sucessivos *zooms* em direção ao ponto (0, 1) sobre o gráfico de f.

(c) Mostre que f não é derivável em 0. Como reconciliar esse fato com a aparência do gráfico na parte (b)?

PROJETO ESCRITO

AS ORIGENS DA REGRA DE L'HÔSPITAL

A Regra de L'Hôspital foi publicada pela primeira vez em 1696, no livro *Analyse des Infiniment Petits*, do marquês de L'Hôspital, mas na verdade ela foi descoberta em 1694 pelo matemático suíço John (Johann) Bernoulli. A explicação para esse fato é que esses dois matemáticos fizeram um curioso acordo, que dava ao marquês de L'Hôspital os direitos das descobertas de Bernoulli. Os detalhes desse acordo, inclusive a tradução da carta de L'Hôspital para Bernoulli propondo o arranjo, podem ser encontrados no livro de Eves [1].

Escreva um relatório sobre as origens histórica e matemática da Regra de L'Hôspital. Comece fornecendo uma breve biografia de ambos (o dicionário editado por Gillispie [2] é uma boa fonte), e resuma o arranjo feito por eles. A seguir, dê o enunciado da Regra de L'Hôspital, que é encontrada no livro de Struik [4] e mais resumidamente no livro de Katz [3]. Observe que L'Hôspital e Bernoulli formularam geometricamente a regra e deram a resposta em termos de diferenciais. Compare seus enunciados com a versão da regra de Bernoulli dada na Seção 4.4 e mostre que os dois enunciados são essencialmente iguais.

1. EVES, Howard. *In Mathematical Circles* (*Volume 2: Quadrants III and IV*). Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969, p. 20-22.

2. GILLISPIE, C. C. (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's, 1974. Veja o artigo sobre Johann Bernoulli por E. A. Fellmann e J. O. Fleckenstein no Volume II e o artigo sobre o marquês de L'Hôspital por Abraham Robinson, no Volume VIII.

3. KATZ, Victor. *A History of Mathematics: An Introduction*. Nova York: HarperCollins, 1993, p. 484.

4. STRUIK, D. J. (ed.) *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969, p. 315-316.

4.5 RESUMO DE ESBOÇOS DE CURVAS

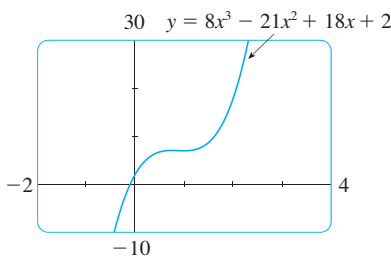
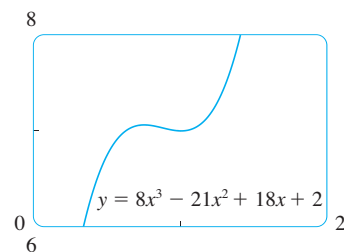



FIGURA 1

FIGURA 2

Até agora estivemos preocupados com alguns aspectos particulares de esboços de curvas: domínio, imagem e simetria no Capítulo 1; limites, continuidade e assíntotas no Capítulo 2; derivadas e tangentes nos Capítulos 2 e 3; e valores extremos, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão e Regra de L'Hôspital neste capítulo. Chegou a hora de agruparmos todas essas informações para esboçar gráficos que revelem os aspectos importantes das funções.

Você poderia perguntar: por que não usar simplesmente uma calculadora gráfica ou computador para traçar uma curva? Por que precisamos usar o cálculo?

É verdade que a tecnologia moderna é capaz de produzir gráficos bem precisos. Contudo, mesmo a melhor ferramenta gráfica deve ser usada inteligentemente. Vimos na Seção 1.4 que é extremamente importante escolher uma janela retangular adequada para evitar obter um gráfico que nos leve a conclusões errôneas. (Veja, especialmente, os Exemplos 1, 3, 4 e 5 naquela seção.) O uso do cálculo possibilita-nos descobrir os aspectos mais interessantes dos gráficos e, em muitos casos, calcular *exatamente* os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão.

Por exemplo, a Figura 1 mostra o gráfico de $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x + 2$. À primeira vista ele parece razoável; ele tem a mesma forma de curvas cúbicas como $y = x^3$, e não aparenta ter ponto de máximo ou de mínimo. Mas se você calcular a derivada, verá que existe um máximo quando $x = 0{,}75$ e um mínimo quando $x = 1$. Realmente, se dermos um *zoom* nessa parte do gráfico, veremos o comportamento exibido na Figura 2. Sem o cálculo, poderíamos facilmente não ter reparado nisso.

Na próxima seção desenharemos os gráficos de funções usando a interação entre o cálculo e as ferramentas gráficas. Nesta seção faremos gráficos considerando primeiro a informação do roteiro a seguir. Não pressupomos que você tenha uma ferramenta gráfica, mas, se você tiver alguma, use-a somente para verificar o resultado de seu trabalho.

ROTEIRO PARA ESBOÇAR UMA CURVA

A lista a seguir pretende servir como um guia para esboçar uma curva $y = f(x)$ à mão. Nem todos os itens são relevantes para cada função. (Por exemplo, uma dada curva pode não ter assíntotas ou não possuir simetria.) No entanto, o roteiro fornece todas as informações necessárias para fazer um esboço que mostre os aspectos mais importantes da função.

A. Domínio É frequentemente útil começar determinando o domínio D de f, isto é, o conjunto dos valores de x para os quais $f(x)$ está definida.

B. Intersecções com os Eixos A intersecção com o eixo y é $f(0)$. Para achar as intersecções com o eixo x, fazemos $y = 0$ e isolamos x. (Você pode omitir esta etapa se a equação for difícil de resolver.)

C. Simetria

(i) Se $f(-x) = f(x)$ para todo x em D, isto é, a equação da curva não muda se x for substituído por $-x$, então f é uma **função par**, e a curva é simétrica em relação ao eixo y. Isso significa que nosso trabalho fica cortado pela metade. Se soubermos como é a curva para $x \geqslant 0$, então precisaremos somente refletir em torno do eixo y para obter a curva completa [veja a Figura 3(a)]. Alguns exemplos disso são: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$ e $y = \cos x$.

(ii) Se $f(-x) = -f(x)$ para todo x em D, então f é uma **função ímpar**, e a curva é simétrica em relação à origem. Novamente, podemos obter a curva completa se soubermos como ela é para $x \geqslant 0$. [Girando 180º em torno da origem; veja a Figura 3(b).] Alguns exemplos simples de funções ímpares são $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ e $y = \operatorname{sen} x$.

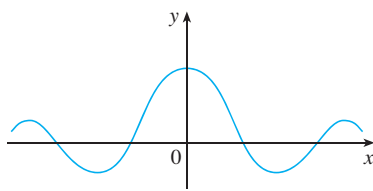
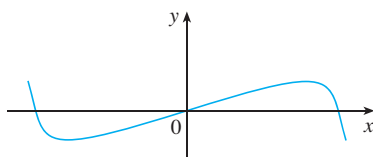
(iii) Se $f(x + p) = f(x)$ para todo x em D, em que p é uma constante positiva, então f é chamada **função periódica**, e o menor desses números p é denominado **período**. Por exemplo, $y = \operatorname{sen} x$ possui um período 2π e $y = \operatorname{tg} x$ tem período π. Se soubermos como é o gráfico em um intervalo de comprimento p, então poderemos usar a translação para esboçar o gráfico inteiro (veja a Figura 4).

(a) Função par; simetria reflexional

(b) Função ímpar; simetria rotacional

FIGURA 3

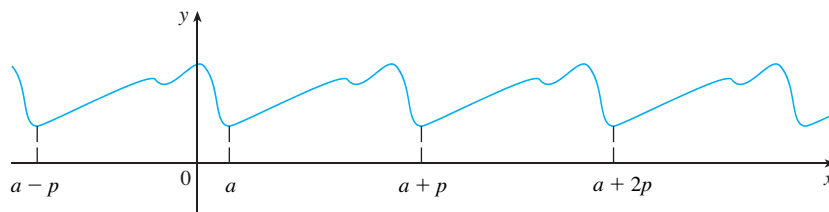



FIGURA 4
Função periódica: simetria por translação

D. Assíntotas

(i) *Assíntotas horizontais*. Lembre-se da Seção 2.6 que se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, então a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$. Se resultar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$), então não temos uma assíntota à direita, o que também é uma informação proveitosa no esboço da curva.

(ii) *Assíntotas verticais*. Lembre-se da Seção 2.2 que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das seguintes afirmativas for verdadeira:

1
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

(Para as funções racionais você pode localizar as assíntotas verticais igualando a zero o denominador, após ter cancelado qualquer fator comum. Mas para as outras funções esse método não é aplicável.) Além disso, ao esboçar a curva é muito útil saber exatamente qual das afirmativas em (1) é verdadeira. Se $f(a)$ não estiver definida, mas a for uma extremidade do domínio de f, então você deve calcular $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)$, se esse limite for infinito ou não.

(iii) *Assíntotas oblíquas*. Elas serão discutidas no fim desta seção.

E. Intervalos de Crescimento e Decrescimento Use o Teste C/D. Calcule $f'(x)$ e encontre os intervalos nos quais ela é positiva (f é crescente) e os intervalos nos quais é negativa (f é decrescente).

F. Valores Máximos e Mínimos Locais Encontre os números críticos de f [os números c nos quais $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe]. Use então o Teste da Primeira Derivada. Se f' mudar de positiva para negativa em um número crítico c, então $f(c)$ é o máximo local. Se f' mudar de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é um mínimo local. Embora seja geralmente preferível o Teste da Primeira Derivada, você pode usar o Teste da Segunda Derivada se $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$. Então $f''(c) > 0$ implica que $f(c)$ é um mínimo local, enquanto $f''(c) < 0$ implica que $f(c)$ é um máximo local.

G. Concavidade e Ponto de Inflexão Calcule $f''(x)$ e use o Teste da Concavidade. A curva é côncava para cima se $f''(x) > 0$, e côncava para baixo se $f''(x) < 0$. Os pontos de inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.

H. Esboço da Curva Usando as informações nos itens A–G, faça o gráfico. Coloque as assíntotas como linhas tracejadas. Marque as intersecções com os eixos, os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão. Então, faça a curva passar por esses pontos, subindo ou descendo de acordo com E, com a concavidade de acordo com G e tendendo às assíntotas. Se precisão adicional for desejada próximo de algum ponto, você poderá calcular o valor da derivada aí. A tangente indica a direção na qual a curva segue.

EXEMPLO 1 Use o roteiro para esboçar a curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. O domínio é

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas zero.

C. Uma vez que $f(-x) = f(x)$, f é par. A curva é simétrica em relação ao eixo y.

D.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

Portanto, a reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal.

Uma vez que o denominador é zero quando $x = \pm 1$, calculamos os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

FIGURA 5
Esboço preliminar

■ Mostramos que a curva se aproxima de sua assíntota horizontal por cima na Figura 5; isso está confirmado pelos intervalos de crescimento e decrescimento.

Consequentemente, as retas $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais. Essa informação sobre os limites e as assíntotas permite-nos traçar um esboço preliminar na Figura 5 mostrando as partes da curva próxima das assíntotas.

E.
$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

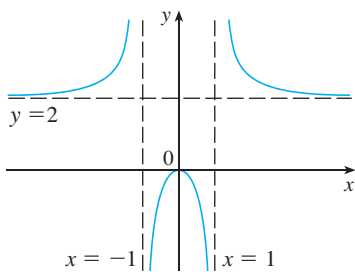



FIGURA 6
Esboço final de $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

Como $f'(x) > 0$ quando $x < 0$ $(x \neq -1)$ e $f'(x) < 0$ quando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f é crescente em $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$ e decrescente em $(0, 1)$ e $(1, \infty)$.

F. O único número crítico é $x = 0$. Como f' muda de positivo para negativo em 0, $f(0) = 0$ é um máximo local pelo Teste da Primeira Derivada.

G.
$$f''(x) = \frac{-4(x^2 - 1) + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Já que $12x^2 + 4 > 0$ para todo x, temos

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

e $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Assim, a curva é côncava para cima nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$ e côncava para baixo em $(-1, 1)$. Não há ponto de inflexão, já que 1 e -1 não estão no domínio de f.

H. Usando a informação em E–G, finalizamos o esboço da Figura 6. □

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$.

A. Domínio $\{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\} = (-1, \infty)$

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas 0.

C. Simetria: nenhuma.

D. Uma vez que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

não há assíntota horizontal. Como $\sqrt{x + 1} \to 0$ quando $x \to -1^+$ e $f(x)$ é sempre positiva, temos

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

então, a reta $x = -1$ é uma assíntota vertical.

E.
$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x + 1} - x^2 \cdot 1/(2\sqrt{x + 1})}{x + 1} = \frac{x(3x + 4)}{2(x + 1)^{3/2}}$$

Vemos que $f'(x) = 0$ quando $x = 0$ (observe que $-\frac{4}{3}$ não está no domínio de f); logo, o único número crítico é 0. Dado que $f'(x) < 0$ quando $-1 < x < 0$ e $f'(x) > 0$ quando $x > 0$, f é decrescente em $(-1, 0)$ e crescente em $(0, \infty)$.

F. Uma vez que $f'(0) = 0$ e f' muda de negativo para positivo em 0, $f(0) = 0$ é um mínimo local (e absoluto) pelo Teste da Primeira Derivada.

G.
$$f''(x) = \frac{2(x + 1)^{3/2}(6x + 4) - (3x^2 + 4x)3(x + 1)^{1/2}}{4(x + 1)^3} = \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(x + 1)^{5/2}}$$

Observe que o denominador é sempre positivo. O numerador é o polinômio quadrático $3x^2 + 8x + 8$, que é sempre positivo, pois seu discriminante é $b^2 - 4ac = -32$, que é negativo, e o coeficiente de x^2 é positivo. Assim, $f''(x) > 0$ para todo x no domínio de f, o que significa que f é côncava para cima em $(-1, \infty)$ e não há ponto de inflexão.

H. A curva está esboçada na Figura 7. □

FIGURA 7

EXEMPLO 3 Esboce o gráfico de $f(x) = xe^x$.

A. O domínio é $\mathbb{R}$.

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas 0.

C. Simetria: nenhuma.

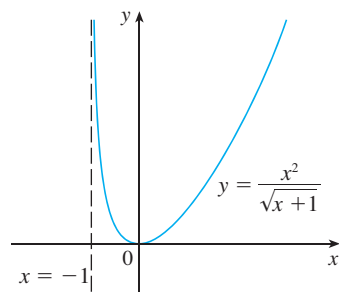
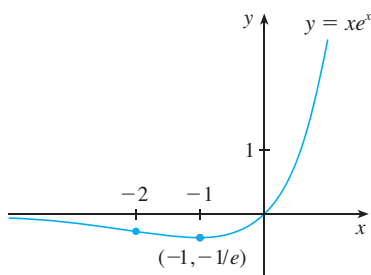



FIGURA 8

D. Como ambos, x e e^x, tornam-se grandes quando $x \to \infty$, temos $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$. Quando $x \to -\infty$, contudo, $e^x \to 0$ e temos um produto indeterminado que requer o uso da Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$$

Assim, o eixo x é uma assíntota horizontal.

E. $$f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

Uma vez que e^x é sempre positiva, vemos que $f'(x) > 0$ quando $x + 1 > 0$, e $f'(x) < 0$ quando $x + 1 < 0$. Logo, f é crescente em $(-1, \infty)$ e decrescente em $(-\infty, -1)$.

F. Como $f'(-1) = 0$ e f' muda de negativo para positivo em $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1}$ é um mínimo local (e absoluto).

G. $$f''(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$$

Visto que $f''(x) > 0$ se $x > -2$ e $f''(x) < 0$ se $x < -2$, f é côncava para cima em $(-2, \infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, -2)$. O ponto de inflexão é $(-2, -2e^{-2})$.

H. Usamos essa informação para traçar a curva da Figura 8. □

EXEMPLO 4 Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$.

A. O domínio é $\mathbb{R}$.

B. A intersecção com o eixo y é $f(0) = \frac{1}{2}$. As intersecções com o eixo x ocorrem quando $\cos x = 0$, ou seja, $x = (2n+1)\pi/2$, em que n é um número inteiro.

C. f não é nem par nem ímpar, mas $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo x; logo, f é periódica e tem um período 2π. Dessa forma, precisamos considerar somente $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e então estender a curva por translação na parte H.

D. Assíntota: nenhuma.

E. $$f'(x) = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x(\cos x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{2\operatorname{sen} x + 1}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

Logo, $f'(x) > 0$ quando $2\operatorname{sen} x + 1 < 0 \iff \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2}$; $\iff 7\pi/6 < x < 11\pi/6$. Assim, f é crescente em $(7\pi/6, 11\pi/6)$ e decrescente em $(0, 7\pi/6)$ e$(11\pi/6, 2\pi)$.

F. A partir da parte E e do Teste da Primeira Derivada, vemos que o valor mínimo local é $f(7\pi/6) = -1/\sqrt{3}$ e o valor máximo local é $f(11\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

G. Se usarmos a regra do quociente novamente, obtemos

$$f''(x) = -\frac{2\cos x(1 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^3}$$

Como $(2 + \operatorname{sen} x)^3 > 0$ e $1 - \operatorname{sen} x \geqslant 0$ para todo x, sabemos que $f''(x) > 0$ quando $\cos x < 0$, ou seja, $\pi/2 < x < 3\pi/2$. Assim, f é côncava para cima em $(\pi/2, 3\pi/2)$ e côncava para baixo em $(0, \pi/2)$ e $(3\pi/2, 2\pi)$. Os pontos de inflexão são $(\pi/2, 0)$ e $(3\pi/2, 0)$.

H. O gráfico da função restrita a $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ é mostrado na Figura 9. Então, nós o estendemos, usando a periodicidade, para completar o gráfico na Figura 10.

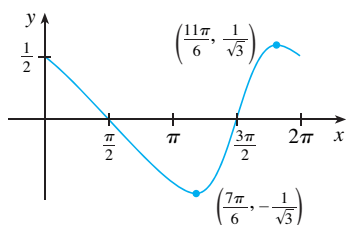



FIGURA 9

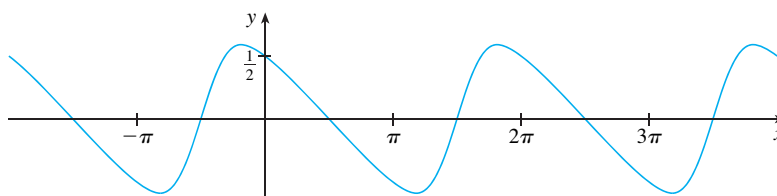



FIGURA 10 □

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico de $y = \ln(4 - x^2)$.

A. O domínio é

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. A intersecção com o eixo y é $f(0) = \ln 4$. Para achar as intersecções com o eixo x fazemos

$$y = \ln(4 - x^2) = 0$$

Sabemos que $\ln 1 = 0$, de modo que temos $4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$ e, portanto, as intersecções com o eixo x é $\pm\sqrt{3}$.

C. Visto que $f(-x) = f(x)$, f é par, e a curva é simétrica em relação ao eixo y.

D. Procuramos as assíntotas verticais nas extremidades do domínio. Já que $4 - x^2 \to 0^+$ quando $x \to 2^-$ e também quando $x \to -2^+$, temos

$$\lim_{x\to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty$$

Assim, as retas $x = 2$ e $x = -2$ são assíntotas verticais.

FIGURA 11
$y = \ln(4 - x^2)$

E.

$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$$

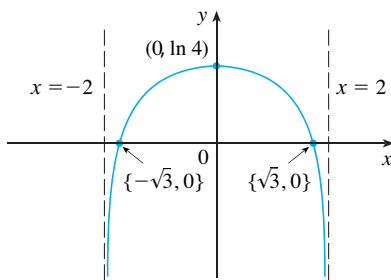
Como $f'(x) > 0$ quando $-2 < x < 0$ e $f'(x) < 0$ quando $0 < x < 2$, f é crescente em $(-2, 0)$ e decrescente em $(0, 2)$.

F. O único número crítico é $x = 0$. Uma vez que f' muda de positiva para negativa em 0, $f(0) = \ln 4$ é um máximo local pelo Teste da Primeira Derivada.

G.

$$f''(x) = \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-8 - 2x^2}{(4 - x^2)^2}$$

Uma vez que $f''(x) < 0$ para todo x, a curva é côncava para baixo em $(-2, 2)$ e não tem ponto de inflexão.

H. Usando essa informação, esboçamos a curva na Figura 11. □

ASSÍNTOTAS OBLÍQUAS

Algumas curvas têm assíntotas que são *oblíquas*, isto é, não são horizontais nem verticais. Se

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

então a reta $y = mx + b$ é chamada **assíntota oblíqua**, pois a distância vertical entre a curva $y = f(x)$ e a reta $y = mx + b$ tende a 0, como na Figura 12. (Uma situação análoga existe quando fazemos $x \to -\infty$.) Para as funções racionais, as assíntotas oblíquas ocorrem quando a diferença entre os graus do numerador e do denominador é 1. Nesse caso a equação da assíntota oblíqua pode ser encontrada por divisão de polinômios, como no exemplo a seguir.

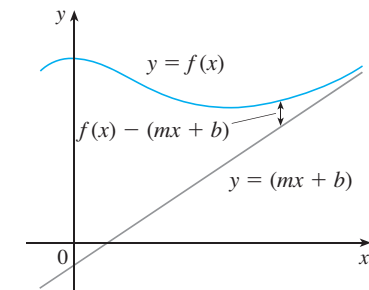



FIGURA 12

EXEMPLO 6 Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

A. O domínio é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

B. As intersecções com os eixos x e y são ambas 0.

C. Visto que $f(-x) = -f(x)$, f é ímpar, e seu gráfico, simétrico em relação à origem.

D. Como $x^2 + 1$ nunca é 0, não há assíntota vertical. Uma vez que $f(x) \to \infty$ quando $x \to \infty$ e $f(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$, não há assíntotas horizontais. Mas a divisão de polinômios fornece

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2+1} = -\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0 \text{ quando } x \to \pm\infty$$

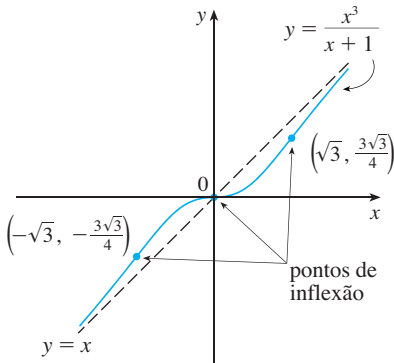
Logo, a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua.

E. $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Uma vez que $f'(x) > 0$ para todo x (exceto 0), f é crescente em $(-\infty, \infty)$.

F. Embora $f'(0) = 0$, f' não muda o sinal em 0, logo não há máximo ou mínimo local.

G. $$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - (x^4+3x^2) \cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Visto que $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, montamos a seguinte tabela:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CC em $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CB em $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CC em $(0, \sqrt{3})$
$x < \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CB em $(\sqrt{3}, \infty)$

Os pontos de inflexão são $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3})$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3})$.

H. O gráfico de f está esboçado na Figura 13. □

FIGURA 13

4.5 EXERCÍCIOS

1–52 Use o roteiro desta seção para esboçar a curva.

1. $y = x^3 + x$

2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$

4. $y = 8x^2 - x^4$

5. $y = x^4 + 4x^3$

6. $y = x(x+2)^3$

7. $y = 2x^5 - 5x^2 + 1$

8. $y = 20x^3 - 3x^5$

9. $y = \dfrac{x}{x-1}$

10. $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

11. $y = \dfrac{1}{x^2-9}$

12. $y = \dfrac{x}{x^2-9}$

13. $y = \dfrac{x}{x^2+9}$

14. $y = \dfrac{x^2}{x^2+9}$

15. $y = \dfrac{x-1}{x^2}$

16. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

17. $y = \dfrac{x^2}{x^2+3}$

18. $y = \dfrac{x}{x^3-1}$

19. $y = x\sqrt{5-x}$

20. $y = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$

21. $y = \sqrt{x^2+x-2}$

22. $y = \sqrt{x^2+x} - x$

23. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

24. $y = x\sqrt{2-x^2}$

25. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

26. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

27. $y = x + 3x^{2/3}$

28. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

29. $y = \sqrt[3]{x^2-1}$

30. $y = \sqrt[3]{x^3+1}$

31. $y = 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$

32. $y = x + \cos x$

33. $y = x \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

34. $y = 2x - \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

35. $y = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$

36. $y = \sec x + \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \pi/2$

37. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$

38. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}$

39. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

40. $y = e^{-x}\operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi/2$

41. $y = 1/(1 + e^{-x})$

42. $y = e^{2x} - e^x$

43. $y = x - \ln x$

44. $y = e^x/x$

45. $y = (1 + e^x)^{-2}$

46. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

47. $y = \ln(\operatorname{sen} x)^2$

48. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

49. $y = xe^{-x^2}$

50. $y = (x^2 - 3)e^{-x}$

51. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

52. $y = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

53. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

em que m_0 é a massa de repouso da partícula, m é a massa quando a partícula se move com velocidade v em relação ao observador e c é a velocidade da luz. Esboce o gráfico de m como uma função de v.

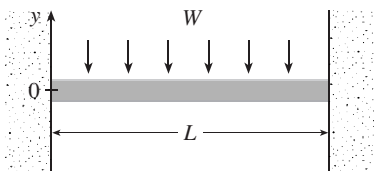
54. Na teoria da relatividade, a energia de uma partícula é

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + h^2c^2/\lambda^2}$$

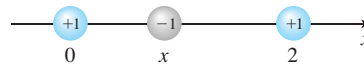
em que m_0 é a massa de repouso da partícula, λ é seu comprimento de onda e h é a constante de Planck. Esboce o gráfico de E como uma função de λ. O que o gráfico nos diz sobre a energia?

55. A figura mostra uma viga de comprimento L embutida entre paredes de concreto. Se uma carga constante W for distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento, a viga assumirá a forma da curva de deflexão

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

em que E e I são constantes positivas. (E é o módulo de elasticidade de Young, e I é o momento de inércia da secção transversal da viga.) Esboce o gráfico da curva de deflexão.

56. A Lei de Coulomb afirma que a força de atração entre duas partículas carregadas é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. A figura mostra partículas com carga 1 localizadas nas posições 0 e 2 sobre o eixo das coordenadas, e uma partícula com a carga -1 em uma posição x entre elas. Segue da Lei de Coulomb que a força resultante agindo sobre a partícula do meio é

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

em que k é uma constante positiva. Esboce o gráfico da função força resultante. O que o gráfico mostra sobre a força?

57–60 Ache a equação da assíntota oblíqua. Não desenhe a curva.

57. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

58. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x}$

59. $y = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$

60. $y = \dfrac{5x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

61–66 Use o roteiro desta seção para esboçar o gráfico da curva. No passo D, ache uma equação para a assíntota oblíqua.

61. $y = \dfrac{-2x^2 + 5x - 1}{2x - 1}$

62. $y = \dfrac{x^2 + 12}{x - 2}$

63. $xy = x^2 + 4$

64. $y = e^x - x$

65. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$

66. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

67. Mostre que a curva $y = x - \operatorname{tg}^{-1} x$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + \pi/2$ e $y = x - \pi/2$. Use esse fato para esboçar a curva.

68. Mostre que a curva $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + 2$ e $y = -x - 2$. Use esse fato para esboçar a curva.

69. Mostre que as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ são assíntotas oblíquas da hipérbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

70. Seja $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Mostre que

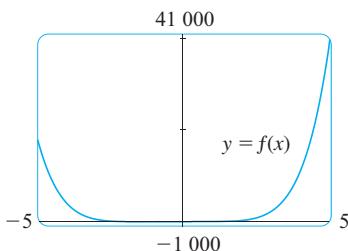
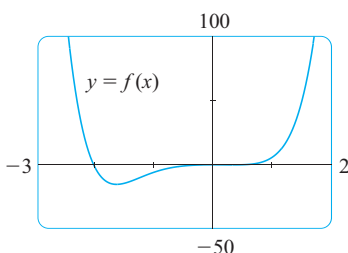
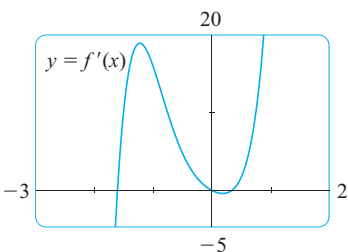
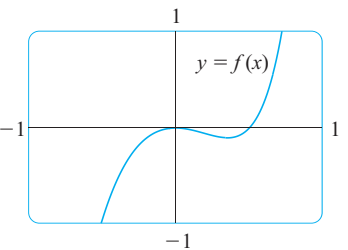
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Isso mostra que o gráfico de f tende ao gráfico de $y = x^2$, e dizemos que a curva $y = f(x)$ é *assintótica* à parábola $y = x^2$. Use esse fato para ajudá-lo no esboço do gráfico de f.

71. Discuta o comportamento assintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ da mesma forma que no Exercício 70. Use então seus resultados para auxiliá-lo no esboço do gráfico de f.

72. Use o comportamento assintótico de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ para esboçar seu gráfico sem seguir o roteiro de esboço de curvas desta seção.

4.6 FAZENDO GRÁFICOS COM O CÁLCULO *E* COM CALCULADORAS

■ Se você ainda não leu a Seção 1.4 deve fazê-lo agora. Ela explica como evitar algumas das armadilhas das ferramentas gráficas através da escolha de janelas retangulares apropriadas.

O método usado para esboçar as curvas na seção precedente foi um auge dentro de nosso estudo de cálculo diferencial. O gráfico foi o objetivo final obtido por nós. Nesta seção, nosso ponto de vista é completamente diferente. *Começamos* aqui com um gráfico produzido por uma calculadora gráfica ou computador e então o refinamos. Usamos o cálculo para nos assegurar de que estão aparentes todos os aspectos importantes da curva. E com o uso de ferramentas gráficas podemos nos dedicar a curvas complicadas demais para tratar sem essa tecnologia. O objetivo aqui é a *interação* entre o cálculo e calculadoras.

EXEMPLO 1 Faça o gráfico do polinômio $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Use os gráficos de f' e f'' para estimar todos os pontos de máximo e de mínimo e os intervalos de concavidade.

FIGURA 1

SOLUÇÃO Se especificarmos um domínio, mas não uma imagem, muitas ferramentas gráficas deduzirão uma imagem adequada a partir dos valores calculados. A Figura 1 mostra o gráfico obtido a partir de uma dessas ferramentas se especificarmos que $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Embora essa janela retangular seja útil para mostrar que o comportamento assintótico (o comportamento nas extremidades) é o mesmo que o de $y = 2x^6$, é óbvio que estão omitidos os detalhes mais refinados. Assim, mudamos para a janela retangular $[-3, 2]$ por $[-50, 100]$, conforme mostrado na Figura 2.

FIGURA 2

A partir desse gráfico, parece que existe um valor mínimo absoluto de cerca de $-15{,}33$ quando $x \approx -1{,}62$ (através do cursor) e f é decrescente em $(-\infty, -1{,}62)$ e crescente em $(-1{,}62, \infty)$. Aparentemente também existe uma tangente horizontal na origem e pontos de inflexão quando $x = 0$ e quando x está em algum lugar entre -2 e -1.

Vamos tentar confirmar essas impressões usando o cálculo. Derivando, obtemos

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 9x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 60x^4 + 60x^3 + 18x - 4$$

Quando fazemos o gráfico de f' na Figura 3, vemos que $f'(x)$ muda de negativo para positivo quando $x \approx -1{,}62$; isso confirma (pelo Teste da Primeira Derivada) o valor mínimo encontrado anteriormente. Mas, talvez para nossa surpresa, notamos também que $f'(x)$ muda de positivo para negativo quando $x = 0$, e de negativo para positivo quando $x \approx 0{,}35$. Isso significa que f tem um máximo local em 0 e um mínimo local quando $x \approx 0{,}35$, mas esses valores estavam escondidos na Figura 2. Realmente, se dermos um *zoom* em direção à origem, como na Figura 4, veremos o que havíamos perdido antes: o valor máximo local de 0 quando $x = 0$ e um valor mínimo local de cerca de $-0{,}1$ quando $x \approx 0{,}35$.

FIGURA 3

E o que dizer sobre a concavidade e os pontos de inflexão? Das Figuras 2 e 4 parece haver pontos de inflexão quando x está um pouco à esquerda de -1 e quando x está um pouco à direita de 0. Mas é difícil determinar os pontos de inflexão a partir do gráfico de f; assim, fazemos o gráfico da segunda derivada f'' na Figura 5. Vemos que f'' muda de positivo para negativo quando $x \approx -1{,}23$, e de negativo para positivo quando $x \approx 0{,}19$. Logo, com precisão de duas casas decimais, f é côncava para cima em $(-\infty, -1{,}23)$ e $(0{,}19, \infty)$ e côncava para baixo em $(-1{,}23, 0{,}19)$. Os pontos de inflexão são $(-1{,}23; -10{,}18)$ e $(0{,}19, -0{,}05)$.

FIGURA 4

Descobrimos que um único gráfico não revela todos os aspectos importantes desse polinômio. Porém, as Figuras 2 e 4, quando olhadas em conjunto, fornecem uma visualização precisa. □

EXEMPLO 2 Faça o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

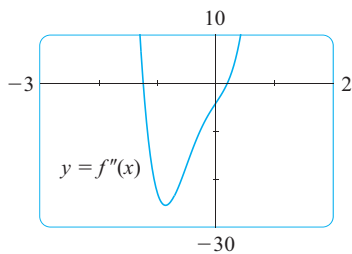



FIGURA 5

em uma janela retangular que contenha todos os aspectos importantes da função. Estime os valores máximo e mínimo e os intervalos de concavidade. Então, use o cálculo para verificar o valor exato dessas quantidades.

SOLUÇÃO A Figura 6, feita por um computador com escolha automática de escala, é um desastre. Algumas calculadoras gráficas usam como janela retangular padrão $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$; assim, vamos tentar fazer isso. Obtemos o gráfico mostrado na Figura 7, e ele é uma grande melhoria.

O eixo y parece ser uma assíntota vertical e realmente o é, pois

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \infty$$

A Figura 7 também nos permite estimar as intersecções com o eixo x: cerca de $-0{,}5$ e de $-6{,}5$. Os valores exatos são obtidos usando a fórmula quadrática para resolver a equação $x^2 + 7x + 3 = 0$. Obtemos $x = (-7 \pm \sqrt{37})/2$.

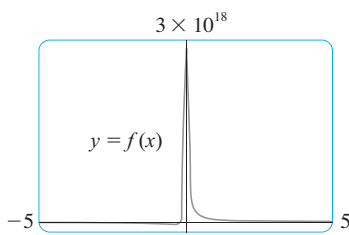



FIGURA 6

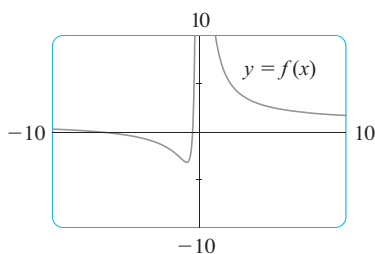



FIGURA 7

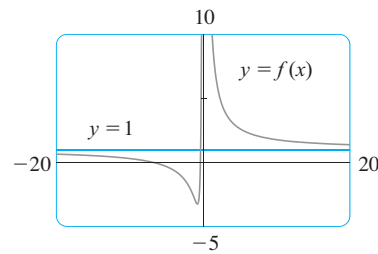



FIGURA 8

Para obter uma visão melhor das assíntotas horizontais, mudamos para a janela retangular $[-20, 20]$ por $[-5, 10]$ na Figura 8. Aparentemente, $y = 1$ é a assíntota horizontal, e isso é facilmente confirmado:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

FIGURA 9

Para estimar o valor mínimo damos um *zoom* para a janela de inspeção $[-3, 0]$ por $[-4, 2]$ da Figura 9. O cursor indica que o valor mínimo absoluto é de cerca de $-3{,}1$ quando $x \approx -0{,}9$, e vemos que a função decresce em $(-\infty, -0{,}9)$ e $(0, \infty)$ e cresce em $(-0{,}9, 0)$. Os valores exatos são obtidos por derivação:

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x + 6}{x^3}$$

Isso mostra que $f'(x) > 0$ quando $-\frac{6}{7} < x < 0$ e $f'(x) < 0$ quando $x < -\frac{6}{7}$ e quando $x > 0$. O valor mínimo exato é $f\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{37}{12} \approx -3{,}08$.

A Figura 9 também mostra que ocorre um ponto de inflexão em algum lugar entre $x = -1$ e $x = -2$. Podemos estimá-lo mais precisamente usando o gráfico da segunda derivada, o que nesse caso é tão fácil quanto achar os valores exatos. Uma vez que

$$f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = \frac{2(7x + 9)}{x^4}$$

vemos que $f''(x) > 0$ quando $x > -\frac{9}{7}$ $(x \neq 0)$. Logo, f é côncava para cima em $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$ e $(0, \infty)$ e côncava para baixo em $\left(-\infty, -\frac{9}{7}\right)$. O ponto de inflexão é $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{71}{27}\right)$.

A análise usando as duas primeiras derivadas mostra que as Figuras 7 e 8 exibem todos os aspectos mais importantes da curva. □

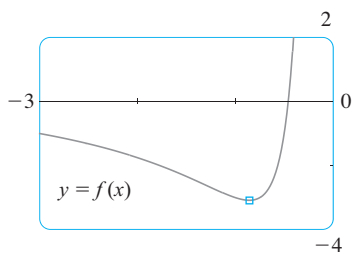
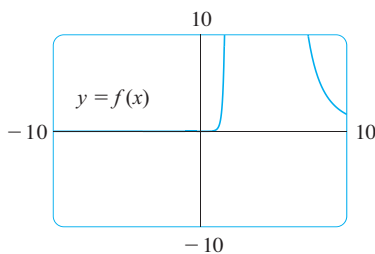
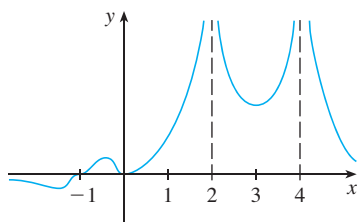



FIGURA 10

EXEMPLO 3 Faça o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$.

SOLUÇÃO Com base em nossa experiência com a função racional no Exemplo 2, vamos começar fazendo o gráfico de f na janela retangular $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. Da Figura 10 temos a sensação de que vamos precisar dar um *zoom* para ver mais detalhadamente, e também nos afastar para ter uma visão geral melhor. Mas, como regra para dar um *zoom* inteligente, vamos primeiro analisar bem de perto a expressão de $f(x)$. Em razão dos fatores $(x-2)^2$ e $(x-4)^4$ no denominador, esperamos que $x = 2$ e $x = 4$ sejam assíntotas verticais. Realmente

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 4} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$$

Para encontrar as assíntotas horizontais dividimos numerador e denominador por x^6:

$$\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \frac{\dfrac{x^2}{x^3} \cdot \dfrac{(x+1)^3}{x^3}}{\dfrac{(x-2)^2}{x^2} \cdot \dfrac{(x-4)^4}{x^4}} = \frac{\dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^2 \left(1 - \dfrac{4}{x}\right)^4}$$

FIGURA 11

Isto mostra que $f(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, de modo que o eixo x é uma assíntona horizontal.

É também muito útil considerar o comportamento do gráfico nas proximidades da intersecção com o eixo x, usando uma análise igual à do Exemplo 11 na Seção 2.6. Uma vez que x^2 é positivo, $f(x)$ não muda de sinal em 0 e, portanto, seu gráfico não cruza o eixo x em 0. No entanto, em virtude do fator $(x+1)^3$, o gráfico cruza o eixo x em -1 e tem uma tangente horizontal aí. Juntando todas essas informações, mas sem usar as derivadas, vemos que a curva deve se parecer com algo semelhante ao mostrado na Figura 11.

Agora que sabemos o que procurar, damos vários *zooms* para obter os gráficos nas Figuras 12 e 13 e afastamos várias vezes para obter a Figura 14.

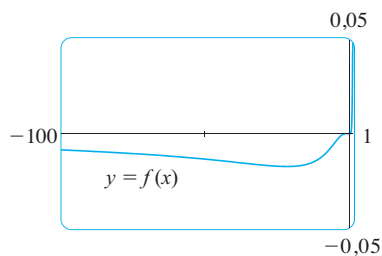



FIGURA 12

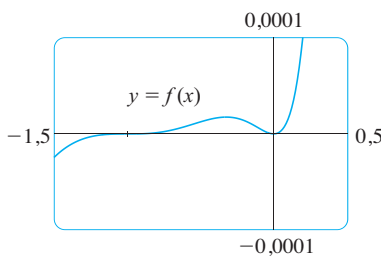



FIGURA 13

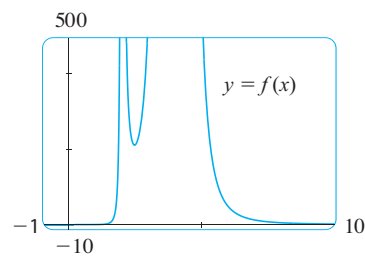



FIGURA 14

Podemos ver nesses gráficos que o mínimo absoluto está em torno de $-0{,}02$ e ocorre quando $x \approx -20$. Há também um máximo local $\approx 0{,}00002$ quando $x \approx -0{,}3$, e um mínimo local ≈ 211 quando $x \approx 2{,}5$. Esses gráficos também mostram três pontos de inflexão próximos a -35, -5 e -1, e dois entre -1 e 0. Para estimar os pontos de inflexão mais precisamente necessitaremos do gráfico de f'', mas calcular à mão f'' é uma tarefa não razoável. Se você tiver um sistema de computação algébrica, então não encontrará maiores problemas (veja o Exercício 15).

Vimos que para essa função particular são necessários *três* gráficos (Figuras 12, 13 e 14) para juntar todas as informações úteis. A única maneira de dispor todos esses aspectos da função em um único gráfico é fazê-lo à mão. A despeito dos exageros e distorções, a Figura 11 consegue resumir a natureza essencial da função. □

■ A família de funções

$$f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\, cx)$$

em que c é uma constante, ocorre em aplicações de síntese de frequência modulada (FM). Uma onda senoidal é modulada por uma onda de frequência diferente (sen cx). O caso em que $c = 2$ é estudado no Exemplo 4. O Exercício 25 lida com outro caso especial.

EXEMPLO 4 Faça o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\, 2x)$. Para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, estime todos os valores máximo e mínimo, intervalos de crescimento e de decrescimento, e pontos de inflexão com precisão de uma casa decimal.

SOLUÇÃO Observamos primeiro que f é periódica com período de 2π. A função f é também ímpar e $|f(x)| \leqslant 1$ para todo x. Logo, a escolha de uma janela retangular não é um problema para essa função: começamos com $[0, \pi]$ por $[-1{,}1, 1{,}1]$ (veja a Figura 15).

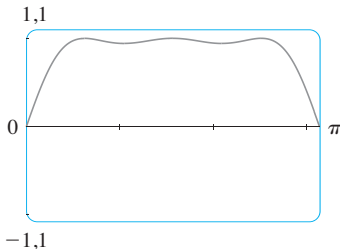



FIGURA 15

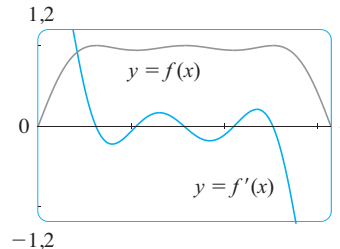



FIGURA 16

Parece que existem três valores máximos locais e dois mínimos locais nessa janela. Para confirmar isso e localizá-los mais precisamente, calculamos que

$$f'(x) = \cos(x + \text{sen}\, 2x) \cdot (1 + 2\cos 2x)$$

e fazemos os gráficos de f e f' na Figura 16.

Dando um *zoom* e usando o Teste da Primeira Derivada encontramos os seguintes valores com precisão de uma casa decimal.

Intervalos de crescimento:	$(0, 0{,}6), (1{,}0, 1{,}6), (2{,}1, 2{,}5)$
Intervalos de decrescimento:	$(0{,}6, 1{,}0), (1{,}6, 2{,}1), (2{,}5, \pi)$
Valores máximos locais:	$f(0{,}6) \approx 1, f(1{,}6) \approx 1, f(2{,}5) \approx 1$
Valores mínimos locais:	$f(1{,}0) \approx 0{,}94, f(2{,}1) \approx 0{,}94$

A segunda derivada é

$$f''(x) = -(1 + 2\cos 2x)^2\, \text{sen}(x + \text{sen}\, 2x) - 4\, \text{sen}\, 2x \cos(x + \text{sen}\, 2x)$$

Fazendo o gráfico de f e f'' na Figura 17, obtemos os seguintes valores aproximados:

FIGURA 17

Côncava para cima:	$(0{,}8, 1{,}3), (1{,}8, 2{,}3)$
Côncava para baixo:	$(0, 0{,}8), (1{,}3, 1{,}8), (2{,}3, \pi)$
Pontos de inflexão:	$(0, 0), (0{,}8, 0{,}97), (1{,}3, 0{,}97), (1{,}8, 0{,}97), (2{,}3, 0{,}97)$

A Figura 15 realmente representa precisamente f para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, e assim podemos afirmar que o gráfico estendido na Figura 18 representa f precisamente para $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$. □

FIGURA 18

Nosso último exemplo trata de *famílias* de funções, conforme discutido na Seção 1.4. Isso significa que as funções na família estão relacionadas umas às outras por uma fórmula que contém uma ou mais constantes arbitrárias. Cada um dos valores da constante dá origem a um membro da família, e a ideia é ver como varia o gráfico da função à medida que mudamos a constante.

EXEMPLO 5 Quando c varia, como varia o gráfico de $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$?

SOLUÇÃO Os gráficos nas Figuras 19 e 20 (os casos especiais $c = 2$ e $c = -2$) mostram duas curvas com aspectos bem diferentes. Antes de fazer qualquer outro gráfico, vamos ver o que os membros dessa família têm em comum. Uma vez que

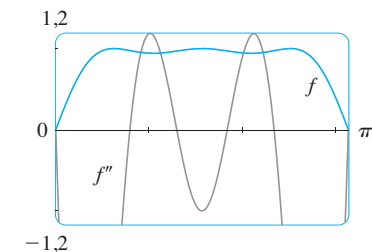
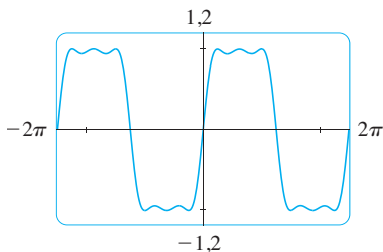
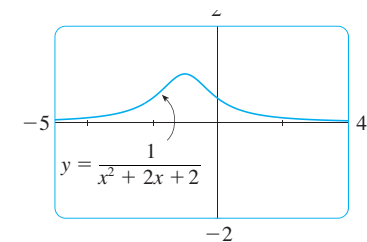



FIGURA 19
$c = 2$

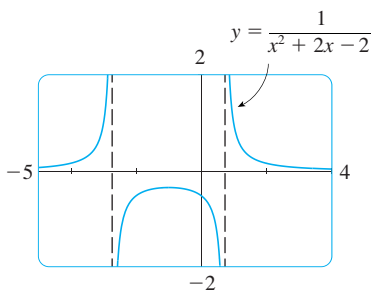



FIGURA 20
$c = -2$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$$

para todo valor de c, todos têm como assíntota horizontal o eixo x. Uma assíntota vertical ocorrerá quando $x^2 + 2x + c = 0$. Resolvendo essa equação quadrática, obtemos $x = 1 \pm \sqrt{1 - c}$. Quando $c > 1$, não há assíntotas verticais (como na Figura 19). Quando $c = 1$, o gráfico tem uma única assíntota vertical $x = -1$, pois

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = \infty$$

Quando $c < 1$, há duas assíntotas verticais: $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$ (como na Figura 20).

Calculamos agora a derivada:

$$f'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + c)^2}$$

Isso mostra que $f'(x) = 0$ quando $x = -1$ (se $c \neq 1$), $f'(x) > 0$ quando $x < -1$ e $f'(x) < 0$ quando $x > -1$. Para $c \geqslant 1$ isso significa que f é crescente em $(-\infty, -1)$ e decrescente em $(-1, \infty)$. Para $c > 1$, existe um valor máximo absoluto $f(-1) = 1/(c - 1)$. Para $c < 1$, $f(-1) = 1/(c - 1)$ é um valor máximo local, e os intervalos de crescimento e decrescimento são interrompidos nas assíntotas verticais.

A Figura 21 mostra cinco membros da família, feitos na janela retangular $[-5, 4]$ por $[-2, 2]$. Conforme previsto, $c = 1$ é o valor no qual ocorre uma transição de duas assíntotas verticais para uma e depois para nenhuma. À medida que aumentamos c a partir de 1, vemos que o ponto de máximo fica cada vez mais baixo; isso é explicado pelo fato de que $1/(c - 1) \to 0$ quando $c \to \infty$. À medida que c decresce a partir de 1, as assíntotas verticais ficam cada vez mais separadas, pois a distância entre elas é $2\sqrt{1 - c}$, que fica maior à medida que $c \to -\infty$. Novamente, o ponto de máximo tende ao eixo x, pois $1/(c - 1) \to 0$ quando $c \to -\infty$.

$c = -1$ $c = 0$ $c = 1$ $c = 2$ $c = 3$

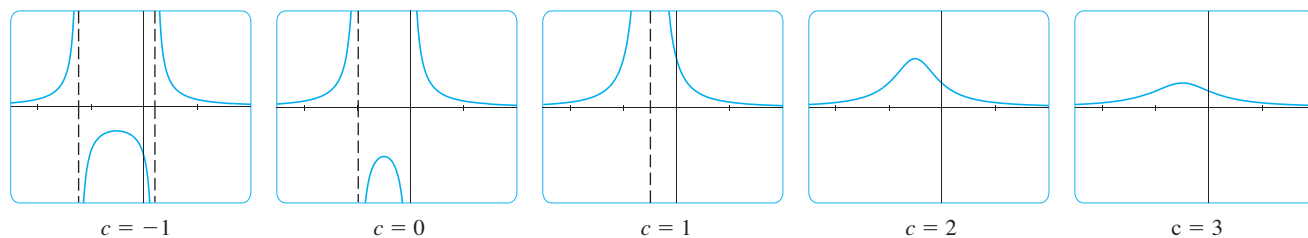



FIGURA 21 A família das funções $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$

Claramente não há pontos de inflexão quando $c \leqslant 1$. Para $c > 1$ calculamos que

$$f''(x) = -\frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$$

e deduzimos que os pontos de inflexão ocorrem quando $x = -1 \pm \sqrt{3(c - 1)}/3$. Portanto, os pontos de inflexão tornam-se mais afastados à medida que c cresce, e isso parece plausível das duas últimas partes da Figura 21. □

4.6 EXERCÍCIOS

1–8 Obtenha gráficos de f que revelem todos os aspectos importantes da curva. Em particular, você deve usar os gráficos de f' e f'' para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão.

1. $f(x) = 4x^4 - 7x^2 + 4x + 6$

2. $f(x) = 8x^5 + 45x^4 + 80x^3 + 90x^2 + 200x$

3. $f(x) = x^6 - 10x^5 - 400x^4 + 2\,500x^3$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{40x^3 + x + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - x^2 - 4x + 1}$

6. $f(x) = \operatorname{tg} x + 5 \cos x$

7. $f(x) = x^2 - 4x + 7 \cos x, \quad -4 \leqslant x \leqslant 4$

8. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 9}$

9–10 Obtenha gráficos de f que revelem todos os aspectos importantes da curva. Estime os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão, e use o cálculo para achar essas quantidades exatamente.

9. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^8} - \dfrac{2 \times 10^8}{x^4}$

11–12

(a) Faça o gráfico da função.

(b) Use a Regra de L'Hôspital para explicar o comportamento quando $x \to 0$.

(c) Estime o valor mínimo e os intervalos de concavidade. Então, use o cálculo para achar os valores exatos.

11. $f(x) = x^2 \ln x$

12. $f(x) = xe^{1/x}$

13–14 Esboce o gráfico à mão, usando as assíntotas e as intersecções com os eixos, mas não as derivadas. Então, use seu esboço como um roteiro na obtenção de gráficos (com uma ferramenta gráfica) que mostrem os aspectos mais importantes da curva. Use esses gráficos para estimar os valores máximo e mínimo.

13. $f(x) = \dfrac{(x + 4)(x - 3)^2}{x^4(x - 1)}$

14. $f(x) = \dfrac{(2x + 3)^2(x - 2)^5}{x^3(x - 5)^2}$

SCA **15.** Se f for a função considerada no Exemplo 3, use um sistema de computação algébrica para calcular f' e então faça seu gráfico para confirmar que todos os valores máximos e mínimos são como dados no exemplo. Calcule f'' e use-a para estimar os intervalos de concavidade e pontos de inflexão.

SCA **16.** Se f for a função do Exercício 14, encontre f' e f'' e use seus gráficos para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento e de concavidade de f.

SCA **17–22** Use um sistema de computação algébrica para fazer o gráfico de f e encontrar f' e f''. Utilize os gráficos dessas derivadas para estimar os intervalos de crescimento e decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão de f.

17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + x + 1}$

18. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x + x^4}$

19. $f(x) = \sqrt{x + 5 \operatorname{sen} x}, \quad x \leqslant 20$

20. $f(x) = (x^2 - 1)e^{\operatorname{arctg} x}$

21. $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\operatorname{tg} x}}$

SCA **23–24**

(a) Faça o gráfico da função.

(b) Explique a forma do gráfico calculando o limite quando $x \to 0^+$ ou quando $x \to \infty$.

(c) Estime os valores máximo e mínimo e então use o cálculo para achar os valores exatos.

(d) Use um gráfico de f'' para estimar a coordenada x dos pontos de inflexão.

23. $f(x) = x^{1/x}$

24. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

25. No Exemplo 4 consideramos um membro da família de funções $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$ que ocorre na síntese de FM. Aqui investigamos a função com $c = 3$. Comece fazendo o gráfico de f na janela de inspeção $[0, \pi]$ por $[-1{,}2, 1{,}2]$. Quantos pontos de máximo locais você pode ver? O gráfico tem mais informações do que podemos perceber a olho nu. Para descobrir os pontos de máximo e mínimo escondidos será necessário examinar muito cuidadosamente o gráfico de f'. De fato, ajuda examinar ao mesmo tempo o gráfico de f''. Encontre todos os valores máximos e mínimos e os pontos de inflexão. Então faça o gráfico de f na janela retangular $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1{,}2, 1{,}2]$ e comente sobre a simetria.

26–33 Descreva a mudança no gráfico de f à medida que c varia. Faça o gráfico de vários membros da família para ilustrar as tendências que você descobriu. Em particular, você deve investigar como os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão movem-se quando c varia. Você deve também identificar qualquer valor intermediário de c no qual o aspecto básico da curva mude.

26. $f(x) = x^3 + cx$

27. $f(x) = x^4 + cx^2$

28. $f(x) = x\sqrt{c^2 - x^2}$

29. $f(x) = e^{-c/x^2}$

30. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

31. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^2 + cx^2}$

33. $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$

34. A família de funções $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, onde a, b e C são números positivos e $b > a$, tem sido usada para modelar a concentração de uma droga injetada no sangue no instante $t = 0$. Faça o gráfico de vários membros dessa família. O que eles têm em comum? Para valores fixos de C e a, descubra graficamente o que acontece à medida que b cresce. Use então o cálculo para demonstrar o que você descobriu.

35. Investigue a família de curvas dadas por $f(x) = xe^{-cx}$, em que c é um número real. Comece calculando os limites quando $x \to \pm\infty$. Identifique qualquer valor intermediário de c onde mude a forma básica. O que acontece aos pontos de máximo, de mínimo e de inflexão quando c varia? Ilustre fazendo o gráfico de vários membros da família.

36. Investigue a família de curvas dadas pela equação $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Comece determinando o valor de transição de c em que o número de pontos de inflexão muda. Faça então o gráfico de vários membros da família para ver quais formas são possíveis. Existe outro valor de transição de c no qual a quantidade de números críticos muda. Tente descobrir isso graficamente. Demonstre então o que você descobriu.

37. (a) Investigue a família de polinômios dada pela equação $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. Para quais valores de c a curva tem pontos de mínimo?

(b) Mostre que os pontos de máximo e de mínimo para cada curva da família estão sobre a parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre fazendo o gráfico dessa parábola e de vários membros da família.

38. (a) Investigue a família de polinômios dada pela equação $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. Para que valores de c a curva tem pontos de máximo e de mínimo?

(b) Mostre que os pontos de máximo e de mínimo de cada curva da família estão sobre a curva $y = x - x^3$. Ilustre fazendo o gráfico dessa curva e de vários membros da família.

4.7 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Os métodos estudados neste capítulo para encontrar os valores extremos têm aplicações práticas em muitas situações do dia a dia. Um homem de negócios quer minimizar os custos e maximizar os lucros. Um viajante quer minimizar o tempo de transporte. O Princípio de Fermat na óptica estabelece que a luz segue o caminho que leva o menor tempo. Nesta seção e na próxima vamos resolver problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos.

Na solução desses problemas práticos, o maior desafio está frequentemente em converter o problema em um problema de otimização matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada. Vamos nos lembrar dos princípios da resolução de problemas discutidos na página 65 e adaptá-los para estas situações:

PASSOS NA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

1. **Compreendendo o Problema** A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunte a si mesmo: o que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?
2. **Faça um Diagrama** Na maioria dos problemas é útil fazer um diagrama e marcar as quantidades dadas e pedidas no diagrama.
3. **Introduzindo uma Notação** Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada (por ora vamos chamá-la Q). Selecione também símbolos (a, b, c, ..., x, y) para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de iniciais como símbolos poderá ajudá-lo — por exemplo, A para área h para altura e t para tempo.
4. Expresse Q em termos de alguns dos outros símbolos da Etapa 3.

5. Se Q for expresso como uma função de mais de uma variável na Etapa 4, use a informação dada para encontrar as relações (na forma de equações) entre essas variáveis. Use então essas equações para eliminar todas menos uma das variáveis na expressão de Q. Assim, Q será expresso como uma função de *uma* variável x, digamos, $Q = f(x)$. Escreva o domínio dessa função.
6. Use os métodos das Seções 4.1 e 4.3 para encontrar os valores máximo ou mínimo *absolutos* de f. Em particular, se o domínio de f for um intervalo fechado, então poderá ser empregado o Método do Intervalo Fechado da Seção 4.1.

EXEMPLO 1 Um fazendeiro tem 1 200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

- Entenda o problema
- Analogia: tente casos especiais
- Faça diagramas

SOLUÇÃO A fim de perceber o que está acontecendo neste problema, vamos fazer uma experiência com alguns casos especiais. A Figura 1, fora de escala, mostra três maneiras possíveis de estender os 1 200 m de cerca.

Área $= 100 \cdot 1\,000 = 100\,000$ m^2

Área $= 400 \cdot 400 = 160\,000$ m^2

Área $= 500 \cdot 200 = 100\,000$ m^2

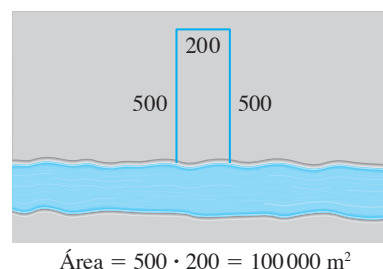
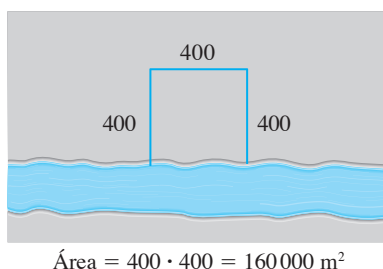
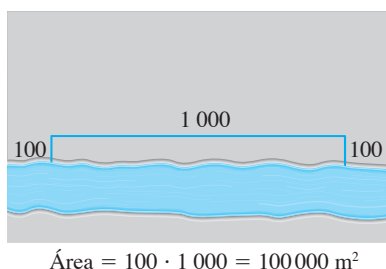



FIGURA 1

Vemos que, ao tentar os campos rasos e extensos ou profundos e estreitos, obtemos áreas relativamente pequenas. Parece plausível que exista alguma configuração intermediária que produza a maior área.

A Figura 2 ilustra o caso geral. Desejamos maximizar a área A do retângulo. Seja x e y a profundidade e a largura do retângulo (em metros). Então, expressamos A em termos de x e y:

$$A = xy$$

FIGURA 2

Queremos expressar A como uma função de uma única variável; assim, eliminamos y expressando-o em termos de x. Para fazer isso, usamos a informação dada de que o comprimento total de cerca é de 1 200 m. Dessa forma,

$$2x + y = 1\,200$$

Dessa equação, temos $y = 1\,200 - 2x$, resultando assim

$$A = x(1\,200 - 2x) = 1\,200x - 2x^2$$

Observe que $x \geqslant 0$ e $x \leqslant 600$ (de outra forma resultaria $A < 0$). Logo, a função que desejamos maximizar é

$$A(x) = 1\,200x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 600$$

A derivada é $A'(x) = 1\,200 - 4x$; logo, para achar os números críticos resolvemos a equação

$$1\,200 - 4x = 0$$

que nos fornece $x = 300$. O valor máximo de A deve ocorrer ou nesse número crítico ou em uma extremidade do intervalo. Uma vez que $A(0) = 0$, $A(300) = 180\,000$ e $A(600) = 0$, o Método do Intervalo Fechado nos fornece o valor máximo como $A(300) = 180\,000$.

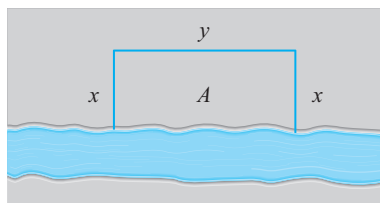
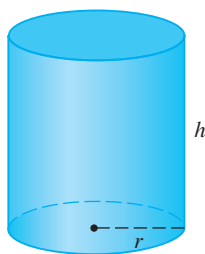
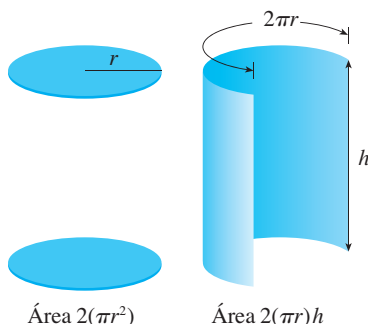
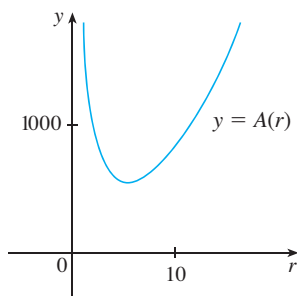



FIGURA 3

FIGURA 4

FIGURA 5

■ Ainda neste capítulo, no Projeto Aplicado da página 312, examinaremos a forma mais econômica para uma lata levando em conta outros custos de produção.

[Alternativamente poderíamos ter observado que $A''(x) = -4 < 0$ para todo x; logo, A é sempre côncava para baixo, e o máximo local em $x = 300$ deve ser um máximo absoluto.]

Assim, o campo retangular deve ter 300 m de profundidade e 600 m de extensão. □

EXEMPLO 2 Uma lata cilíndrica é feita para receber um 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

SOLUÇÃO Fazemos o diagrama como na Figura 3, onde r é o raio e h é a altura (ambos em centímetros). A fim de minimizar o custo do metal, minimizamos a área da superfície total do cilindro (tampa, base e lado). Da Figura 4 vemos que o lado é feito de uma folha retangular com dimensões $2\pi r$ e h. Logo a área da superfície é

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Para eliminar h usamos o fato de que o volume é dado como 1 L, que é igual a 1 000 cm^3. Assim

$$\pi r^2 h = 1\,000$$

que nos fornece $h = 1\,000/(\pi r^2)$. Substituindo na expressão para A temos

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1\,000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$$

Portanto, a função que queremos minimizar é

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r} \qquad r > 0$$

Para achar os números críticos, derivamos:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Então $A'(r) = 0$ quando $\pi r^3 = 500$; logo, o número crítico é $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Uma vez que o domínio de A é $(0, \infty)$, não podemos usar o argumento do Exemplo 1 relativo às extremidades. Mas podemos observar que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ e $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, portanto, A está decrescendo para *todo* r à esquerda do número crítico e crescendo para *todo* r à direita. Assim, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ deve originar um mínimo *absoluto*.

[Alternativamente, poderíamos argumentar que $A(r) \to \infty$ quando $r \to 0^+$ e $A(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$; portanto, deve existir um valor mínimo de $A(r)$, que deve ocorrer no número crítico. Veja a Figura 5.]

O valor de h correspondente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ é

$$h = \frac{1\,000}{\pi r^2} = \frac{1\,000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Dessa forma, para minimizar o custo da lata, o raio deve ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm e a altura, igual a duas vezes o raio, isto é, o diâmetro. □

OBS. 1 O argumento usado no Exemplo 2 para justificar o mínimo absoluto é uma variação do Teste da Primeira Derivada (que se aplica tão-somente para valores máximo e mínimo *locais*) e será enunciado aqui para futuras referências.

TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA PARA VALORES EXTREMOS ABSOLUTOS Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f definida em um certo intervalo.

(a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor máximo absoluto de f.

(b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então $f(c)$ é o valor mínimo absoluto de f.

OBS. 2 Um método alternativo para resolver os problemas de otimização é usar a derivação implícita. Para ilustrar esse método, examinaremos novamente o Exemplo 2. Vamos nos utilizar das mesmas equações

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 100$$

mas, em vez de eliminarmos h, derivamos implicitamente ambas as equações em relação a r:

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

O mínimo ocorre em um número crítico; assim, fazemos $A' = 0$, simplificamos e chegamos até as equações

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

e uma subtração nos fornece $2r - h = 0$ ou $h = 2r$.

EXEMPLO 3 Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$.

SOLUÇÃO A distância entre os pontos $(1, 4)$ e (x, y) é

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2}$$

FIGURA 6

(veja a Figura 6). Mas como o ponto (x, y) está sobre a parábola, então $x = \frac{1}{2}y^2$; logo, a expressão para d fica

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y - 4)^2}$$

(Uma forma alternativa seria substituir $y = \sqrt{2x}$ para obter d em termos só de x.) Em vez de d, minimizamos seu quadrado:

$$d^2 = f(y) = \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)^2 + (y - 4)^2$$

(Você deve se convencer de que o mínimo de d ocorre no mesmo ponto que o mínimo de d^2, porém é mais fácil de ser trabalhar com este último.) Derivando, obtemos

$$f(y) = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 - 1\right)y + 2(y - 4) = y^3 - 8$$

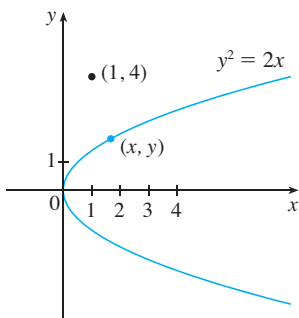
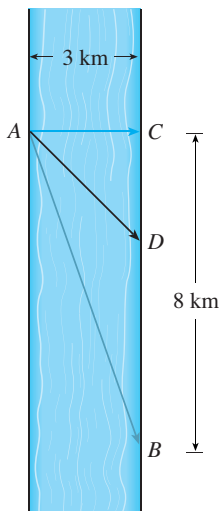
portanto, $f'(y) = 0$ quando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$ quando $y < 2$ e $f'(y) > 0$ quando $y > 2$; logo, pelo Teste da Primeira Derivada para os Valores Extremos Absolutos, o mínimo absoluto ocorre quando $y = 2$. (Ou ainda poderíamos simplesmente dizer que, dada a natureza geométrica do problema, é óbvio que existe um ponto mais próximo, mas não existe um ponto mais distante.) O valor correspondente de x é $x = \frac{1}{2}y^2 = 2$. Assim, o ponto sobre $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$ é $(2, 2)$. □

EXEMPLO 4 Um homem lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de 3 km, e deseja atingir tão rápido quanto possível um ponto B na outra margem, 8 km rio abaixo (veja a Figura 7). Ele pode dirigir seu barco diretamente para o ponto C e então seguir andando para B, ou rumar diretamente para B, ou remar para algum ponto D entre C e B e então andar até B. Se ele pode remar a 6 km/h e andar a 8 km/h, onde ele deveria aportar para atingir B o mais rápido possível? (Estamos supondo que a velocidade da água seja desprezível comparada com a velocidade na qual o homem rema.)

FIGURA 7

SOLUÇÃO Se chamarmos de x a distância de C a D, então a distância a ser percorrida a pé será $|DB| = 8 - x$, e o Teorema de Pitágoras dará a distância remada como $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Usamos a equação

$$\text{tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{taxa}}$$

Então o tempo gasto remando é $\sqrt{x^2 + 9}/6$ enquanto o tempo gasto andando é $(8 - x)/8$. Assim, o tempo total T como uma função de x é

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

O domínio dessa função T é $[0, 8]$. Observe que, se $x = 0$, ele rema para C, e se $x = 8$, ele rema diretamente para B. A derivada de T é

$$T(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$$

Assim, usando o fato de que $x \geqslant 0$, temos

$$T'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 3\sqrt{x^2 + 9}$$

$$\Leftrightarrow \quad 16x^2 = 9(x^2 + 9) \quad \Leftrightarrow \quad 7x^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

FIGURA 8

O único número crítico é $x = 9/\sqrt{7}$. Para ver se o mínimo ocorre nesse número crítico ou nas extremidades do domínio $[0, 8]$, calculamos T em todos os três pontos:

$$T(0) = 1{,}5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1{,}33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1{,}42$$

Uma vez que o menor desses valores T ocorre quando $x = 9/\sqrt{7}$, o valor mínimo absoluto de T deve ocorrer lá. A Figura 8 ilustra esse cálculo mostrando o gráfico de T.

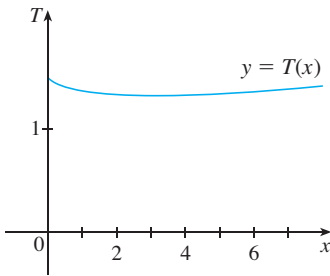
Dessa forma, o homem deve aportar o bote no ponto $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$ 3,4 km) rio abaixo a partir do ponto inicial. □

EXEMPLO 5 Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.

FIGURA 9

SOLUÇÃO 1 Vamos considerar o semicírculo como a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ com o centro na origem. Então a palavra *inscrito* significa que o retângulo tem dois vértices sobre o semicírculo e dois vértices sobre o eixo x, conforme mostra a Figura 9.

Seja (x, y) o vértice que está no primeiro quadrante. E então o retângulo tem lados de comprimento $2x$ e y, e sua área é

$$A = 2xy$$

Para eliminar y usamos o fato de que (x, y) está sobre o círculo $x^2 + y^2 = r^2$ e, portanto, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Assim

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

O domínio dessa função é $0 \leqslant x \leqslant r$. Sua derivada é

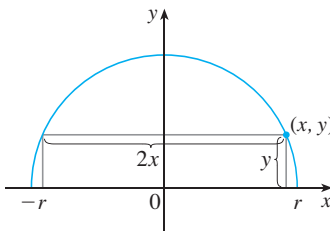
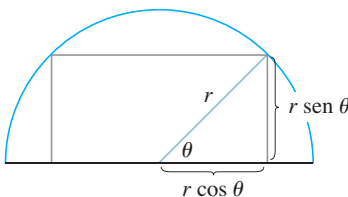
$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

FIGURA 10

que é zero quando $2x^2 = r^2$, isto é, $x = r\sqrt{2}$ (uma vez que $x \geqslant 0$). Esse valor de x dá um valor máximo de A, visto que $A(0) = 0$ e $A(r) = 0$. Portanto, a área do maior retângulo inscrito é

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

SOLUÇÃO 2 Uma solução mais simples é possível quando usamos um ângulo como uma variável. Seja θ o ângulo mostrado na Figura 10. Então a área do retângulo é

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\,\text{sen}\,\theta) = r^2(2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) = r^2\,\text{sen}\,2\theta$$

Sabemos que sen 2θ tem um valor máximo de 1 e ele ocorre quando $2\theta = \pi/2$. Logo, $A(\theta)$ tem um valor máximo de r^2 e ele ocorre quando $\theta = \pi/4$.

Observe que essa solução trigonométrica não envolve derivação. De fato, não necessitamos usar nada do cálculo aqui. □

APLICAÇÕES À ADMINISTRAÇÃO E À ECONOMIA

Na Seção 3.7 introduzimos a ideia de custo marginal. Lembre que se $C(x)$, a **função custo**, for o custo da produção de x unidades de um certo produto, então, o **custo marginal** é a taxa de variação de C em relação a x. Em outras palavras, a função de custo marginal é a derivada, $C'(x)$, da função de custo.

Vamos considerar agora o marketing. Seja $p(x)$ o preço por unidade que a companhia pode cobrar se ela vender x unidades. Então, p é chamada **função demanda** (ou **função preço**) e esperaríamos que ela fosse uma função decrescente de x. Se x unidades forem vendidas e o preço por unidade for $p(x)$, então a receita total será

$$R(x) = xp(x)$$

e R é chamada **função receita**. A derivada R' da função receita é chamada **função receita marginal** e é a taxa de variação da receita com relação ao número de unidades vendidas.

Se x unidades forem vendidas, então o lucro total será

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

e P é chamada **função lucro**. A **função lucro marginal** é P', a derivada da função lucro. Nos Exercícios 53 a 58, lhe será pedido para usar as funções custo, receita e lucro marginais para minimizar custos e maximizar receitas e lucros.

EXEMPLO 6 Uma loja tem vendido 200 gravadores de DVD por semana a \$ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada \$ 10 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

SOLUÇÃO Se x for o número de gravadores de DVD vendidos por semana, então o aumento semanal nas vendas será $x - 200$. Para cada aumento de 20 unidades, o preço diminui \$ 10. Assim, para cada unidade adicional vendida, o decréscimo no preço será $\frac{1}{20} \times 10$ e a função demanda será

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

A função receita é

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Este valor de x dá um máximo absoluto pelo Teste da Primeira Derivada (ou simplesmente observando que o gráfico de R é uma parábola que abre para baixo). O preço correspondente é

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

e o desconto é $350 - 225 = 125$. Portanto, para maximizar a receita, a loja deveria oferecer um desconto de \$ 125. □

4.7 EXERCÍCIOS

1. Considere o seguinte problema: encontre dois números cuja soma seja 23 e cujo produto seja máximo.
(a) Faça uma tabela de valores, como a mostrada a seguir, tal que a soma dos números nas duas primeiras colunas seja sempre 23. Com base na evidência mostrada em sua tabela, estime a resposta para o problema.

Primeiro Número	Segundo Número	Produto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
.	.	.
.	.	.
.	.	.

(b) Use o cálculo para resolver o problema e compare com sua resposta da parte (a).

2. Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja mínimo.

3. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.

4. Encontre um número positivo tal que a soma do número e seu inverso seja tão pequena quanto possível.

5. Encontre as dimensões de um retângulo com um perímetro de 100 m cuja área seja a maior possível.

6. Encontre as dimensões de um retângulo com área de 1 000 m^2 cujo perímetro seja o menor possível.

7. Um modelo usado para a produção Y de uma colheita agrícola como função do nível de nitrogênio N no solo (medido em unidades apropriadas) é

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

em que k é uma constante positiva. Que nível de nitrogênio dá a melhor produção?

8. A taxa (em mg de carbono/m^3/h) na qual a fotossíntese ocorre para uma espécie de fitoplâncton é modelada pela função

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

em que I é a intensidade da luz (medida em milhares de velas). Para qual intensidade de luz P é máximo?

9. Considere o seguinte problema: um fazendeiro com 300 m de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?
(a) Faça vários diagramas ilustrando a situação, alguns com divisões rasas e largas e alguns com divisões profundas e estreitas. Encontre as áreas totais dessas configurações. Parece que existe uma área máxima? Se a resposta for sim, estime-a.
(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza uma notação e marque no diagrama seus símbolos.
(c) Escreva uma expressão para a área total.
(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.
(e) Use a parte (d) para escrever a área total como uma função de uma variável.
(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

10. Considere o seguinte problema: uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um pedaço quadrado de papelão, com 3 metros de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa poderá ter.
(a) Faça vários diagramas para ilustrar a situação, algumas caixas baixas com bases grandes e outras altas com base pequena. Encontre os volumes de várias dessas caixas. Parece existir um volume máximo? Se a resposta for sim, estime-o.
(b) Faça um diagrama ilustrando a situação geral. Introduza a notação e marque no diagrama seus símbolos.
(c) Escreva uma expressão para o volume.
(d) Use a informação dada para escrever uma equação que relacione as variáveis.
(e) Use a parte (d) para escrever o volume como uma função de uma só variável.
(f) Acabe de resolver o problema e compare sua resposta com sua estimativa da parte (a).

11. Um fazendeiro quer cercar uma área de 15 000 m^2 em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma a minimizar o custo da cerca?

12. Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem um volume de 32 000 cm^3. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

13. Se 1 200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

14. Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa $ 10 por metro quadrado. O material para os lados custa $ 6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.

15. Faça o Exercício 14 supondo que o contêiner tenha uma tampa feita do mesmo material usado nos lados.

16. (a) Mostre que, de todos os retângulos com uma área dada, aquele com um menor perímetro é um quadrado.
(b) Mostre que, de todos os retângulos com um dado perímetro, aquele com a maior área é um quadrado.

17. Encontre o ponto sobre a reta $y = 4x + 7$ que está mais próximo da origem.

18. Encontre o ponto sobre a reta $6x + y = 9$ que está mais próximo do ponto $(-3, 1)$.

19. Encontre os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1, 0)$.

20. Encontre, com precisão de duas casas decimais, as coodernadas do ponto na curva $y = \text{tg}\, x$ que está mais próximo do ponto $(1, 1)$.

21. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

22. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

23. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.

24. Encontre as dimensões do retângulo de maior área que tem sua base sobre o eixo x e seus dois outros vértices acima do eixo x e sobre a parábola $y = 8 - x^2$.

25. Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.

26. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos.

27. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o maior volume possível desse cilindro.

28. Um cilindro circular reto é inscrito em um cone com altura h e raio da base r. Encontre o maior volume possível desse cilindro.

29. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre a maior área de superfície possível para esse cilindro.

30. Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo. (O diâmetro do semicírculo é igual à largura do retângulo. (Veja o Exercício 56 na página 14.) Se o perímetro da janela for 10 m, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

31. As margens de cima e de baixo de um pôster têm 6 cm, e as margens laterais medem 4 cm. Se a área do material impresso sobre o pôster estiver fixa em 384 cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.

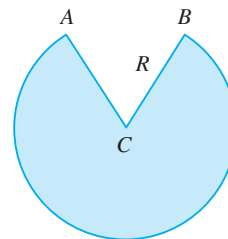
32. Um pôster deve ter uma área de 900 cm^2 com uma margem de 3 cm na base e nos lados, e uma margem de 5 cm em cima. Que dimensões darão a maior área impressa?

33. Um pedaço de fio com 10 m de comprimento é cortado em duas partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo equilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total englobada seja: (a) máxima? (b) mínima?

34. Responda o Exercício 33 se um pedaço estiver dobrado no formato de um quadrado e o outro no formato de um círculo.

35. Uma lata cilíndrica sem o topo é feita para receber V cm^3 de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.

36. Uma cerca de 2 m de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 1 m do edifício. Qual o comprimento da menor escada que se apoie no chão e na parede do prédio, por cima da cerca?

37. Um copo com formato cônico é feito de um pedaço circular de papel de raio R cortando fora um setor e juntando os lados CA e CB. Encontre a capacidade máxima de tal copo.

38. Um copo de papel em forma de cone é feito de maneira a conter 27 cm^3 de água. Ache a altura e o raio do copo que usa a menor quantidade possível de papel.

39. Um cone com altura h está inscrito em outro cone maior com altura H, de forma que seu vértice esteja no centro da base do cone maior. Mostre que o cone interno tem seu volume máximo quando $h = \frac{1}{3}H$.

40. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda presa ao objeto. Se a corda fizer um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força será

$$F = \frac{\mu m g}{\mu \,\text{sen}\, \theta + \cos \theta}$$

em que μ é uma constante chamada coeficiente de atrito. Para que valor de θ F é menor?

41. Se um resistor de R ohms estiver ligado a uma pilha de E volts com resistência interna de r ohms, então a potência (em watts) no resistor externo é

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$$

Se E e r forem fixados, mas R variar, qual é o valor mínimo da potência?

42. Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3. Acredita-se que os peixes migratórios tentam minimizar a energia total necessária para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente u $(u < v)$, então o tempo necessário para nadar a uma distância L é $L/(v - u)$ e a energia total E requerida para nadar a distância é dada por

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade.

(a) Determine o valor de v que minimiza E.

(b) Esboce o gráfico de E.

Observação: Esse resultado foi verificado experimentalmente; peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% maior que a velocidade da corrente.

43. Em uma colmeia, cada alvéolo é um prisma hexagonal regular, aberto em uma extremidade com um ângulo triédrico na outra extremidade. Acredita-se que as abelhas formam esses alvéolos de modo a minimizar a área da superfície para um dado volume, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame desses alvéolos mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria do alvéolo, pode ser mostrado que a área da superfície S é dada por

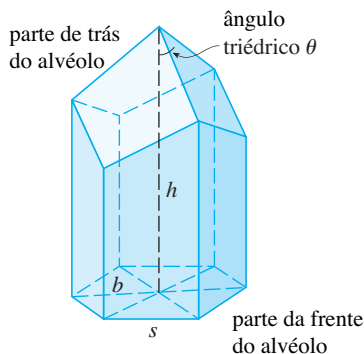
$$S = 6sh = \tfrac{3}{2}s^2\text{cotg}\,\theta + (3s^2\sqrt{3}/2)\,\text{cossec}\,\theta$$

onde s, o comprimento dos lados do hexágono, e h, a altura, são constantes.

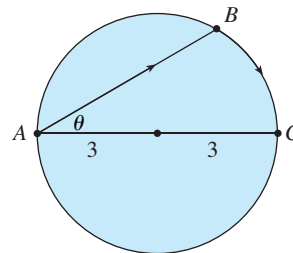
(a) Calcule $dS/d\theta$.

(b) Que ângulo as abelhas deveriam preferir?

(c) Determine a área da superfície mínima do alvéolo (em termos de s e h).

Observação: Medidas reais do ângulo θ em colmeias foram feitas, e as medidas desses ângulos raramente diferem do valor calculado em mais que 2º.

44. Um bote deixa uma doca às 2 horas da tarde e viaja na direção sul a uma velocidade de 20 km/h. Outro bote está indo para a direção leste a 15 km/h e atinge a mesma doca às 3 horas da tarde. Em que momento os dois botes estavam mais próximos um do outro?

45. Resolva o problema no Exemplo 4 se o rio tiver 5 km de largura e o ponto B estiver somente a 5 km de A rio abaixo.

46. Uma mulher em um ponto A na praia de um lago circular com raio de 3 km quer chegar no ponto C diametralmente oposto a A do outro lado do lago no menor tempo possível. Ela pode andar a uma taxa de 6 km/h e remar um bote a 3 km/h. Como deve proceder?

47. Uma refinaria de petróleo está localizada na margem norte de um rio reto que tem 2 km de largura. Um oleoduto deve ser construído da refinaria até um tanque de armazenamento localizado na margem sul do rio, 6 km a leste da refinaria. O custo de construção do oleoduto é $ 400 000/km sobre a terra, até um ponto P na margem norte e $ 800 000/km sob o rio até o tanque. Onde P deveria estar localizado para minimizar o custo do oleoduto?

48. Suponha que a refinaria do Exercício 47 esteja localizada 1 km ao norte do rio. Onde P deveria estar situado?

49. A iluminação de um objeto por uma fonte de luz é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte. Se duas fontes de luz, uma três vezes mais forte que a outra, são colocadas a 4 m de distância, onde deve ser colocado o objeto sobre a reta entre as fontes de forma a receber o mínimo de iluminação?

50. Encontre uma equação da reta que passa pelo ponto $(3, 5)$ e que delimita a menor área do primeiro quadrante.

51. Sejam a e b números positivos. Ache o comprimento do menor segmento de reta que é cortado pelo primeiro quadrante e passa pelo ponto (a, b).

52. Em quais pontos da curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ a reta tangente tem a sua maior inclinação?

53. (a) Se $C(x)$ for o custo para produzir x unidades de uma mercadoria, então o **custo médio** por unidade é $c(x) = C(x)/x$. Mostre que se o custo médio for mínimo, então o custo marginal é igual ao custo médio.

(b) Se $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, em dólares, encontre (i) o custo, o custo médio e o custo marginal no nível de produção de 1 000 unidades; (ii) o nível de produção que minimizará o custo médio; e (iii) o custo médio mínimo.

54. (a) Mostre que se o lucro $P(x)$ for máximo, então a receita marginal é igual ao custo marginal.

(b) Se $C(x) = 16\,000 + 500x - 1{,}6x^2 + 0{,}004x^3$ for a função custo e $p(x) = 1\,700 - 7x$ a função demanda, encontre o nível de produção que maximiza o lucro.

55. Um time de beisebol joga em um estádio com capacidade para 55 000 espectadores. Com o preço dos ingressos a \$ 10, a frequência média tem sido de 27 000. Quando os preços dos ingressos abaixaram para \$ 8, a frequência média aumentou para 33 000.

(a) Encontre a função demanda, supondo que ela seja linear.

(b) Qual deveria ser o preço dos ingressos para maximizar a receita?

56. Durante os meses de verão, Terry faz e vende colares na praia. No verão passado, ele vendeu os colares por \$ 10 cada e suas vendas eram em média de 20 por dia. Quando ele aumentou o preço \$ 1, descobriu que a média diminuiu em duas vendas por dia.

(a) Encontre a função de demanda, supondo que ela seja linear.

(b) Se o material de cada colar custa a Terry \$ 6, qual deveria ser o preço de venda para maximizar seu lucro?

57. Um fabricante tem vendido 1 000 aparelhos de televisão por semana, a \$ 450 cada. Uma pesquisa de mercado indica que para cada \$ 10 de desconto oferecido ao comprador, o número de aparelhos vendidos aumenta 100 por semana.

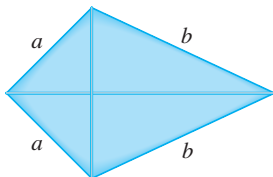
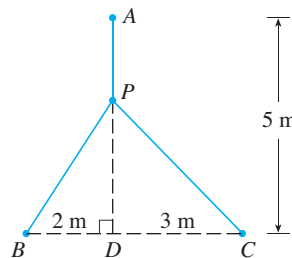
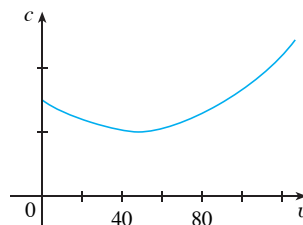
(a) Encontre a função demanda.

(b) Que desconto a companhia deveria oferecer ao comprador para maximizar sua receita?

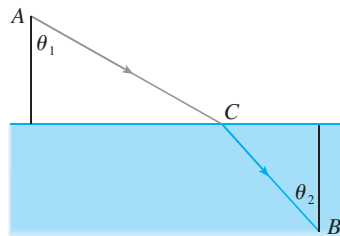
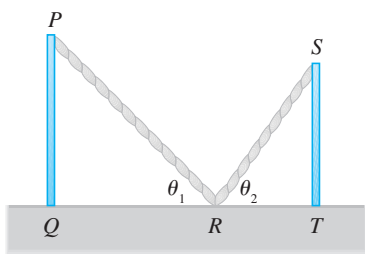
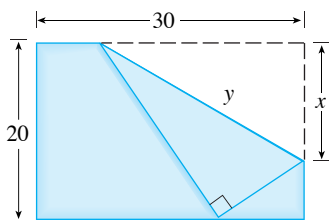
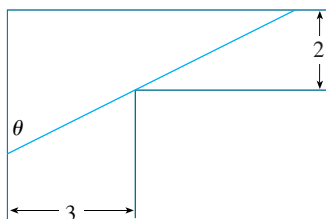
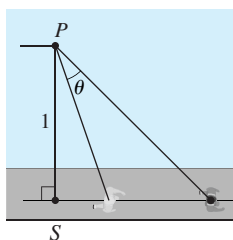
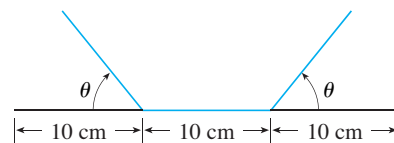
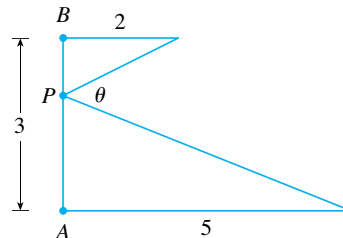
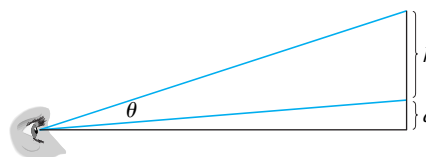
(c) Se sua função custo semanal for $C(x) = 68\,000 + 150x$, como o fabricante deveria escolher o tamanho do desconto para maximizar seu lucro?

58. O gerente de um complexo de apartamentos com 100 unidades sabe, a partir da experiência, que todas as unidades estarão ocupadas se o aluguel for \$ 800 por mês. Uma pesquisa de mercado sugere que, em média, uma unidade adicional permanecerá vazia para cada \$ 10 de aumento no aluguel. Qual o aluguel que o gerente deveria cobrar para maximizar a receita?

59. Mostre que, de todos os triângulos isósceles com um dado perímetro, aquele que tem a maior área é o equilátero.

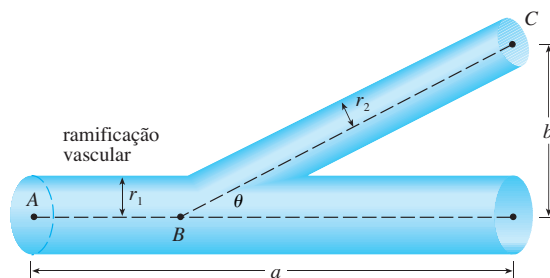
SCA **60.** A moldura para uma pipa é feita com seis pedaços de madeira. Os quatro pedaços externos foram cortados com os comprimentos indicados na figura. Para maximizar a área da pipa, de que tamanho devem ser os pedaços diagonais?

61. Um ponto P precisa ser localizado em algum ponto sobre a reta AD de forma que o comprimento total L de fios ligando P aos pontos A, B e C seja minimizado (veja a figura). Expresse L como uma função de $x = |AP|$ e use os gráficos de L e dL/dx para estimar o valor mínimo.

62. O gráfico mostra o consumo de combustível c de um carro (medido em litros/hora) como uma função da velocidade v do carro. Em velocidade muito baixa, o motor não rende bem; assim, inicialmente c decresce à medida que a velocidade cresce. Mas em alta velocidade o consumo cresce. Você pode ver que $c(v)$ é minimizado para esse carro quando $v \approx 48$ km/h. Porém, para a eficiência do combustível, o que deve ser minimizado não é o consumo em litros/hora, mas, em vez disso, o consumo de combustível em litros *por quilômetros*. Vamos chamar esse consumo de G. Usando o gráfico, estime a velocidade na qual G tem seu valor mínimo.

63. Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o Princípio de Fermat, um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

onde θ_1 (o ângulo de incidência) e θ_2 (o ângulo de refração) são conforme mostrados. Essa equação é conhecida como a Lei de Snell.

64. Dois postes verticais PQ e ST são amarrados por uma corda PRS que vai do topo do primeiro poste para um ponto R no chão entre os postes e então até o topo do segundo poste, como na figura. Mostre que o menor comprimento de tal corda ocorre quando $\theta_1 = \theta_2$.

65. O canto superior direito de um pedaço de papel com 30 cm de largura por 20 cm de comprimento é dobrado sobre o lado direito, como na figura. Como você dobraria de forma a minimizar o comprimento da dobra? Em outras palavras, como você escolheria x para minimizar y?

66. Um cano de metal está sendo carregado através de um corredor com 3 m de largura. No fim do corredor há uma curva em ângulo reto, passando-se para um corredor com 2 m de largura. Qual é o comprimento do cano mais longo que pode ser carregado horizontalmente em torno do canto?

67. Um observador permanece em um ponto P, distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto S da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo θ de visão do observador entre os corredores. [*Sugestão*: Maximize tg θ.]

68. Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura 30 cm dobrando-se para cima 1/3 da folha de cada lado, fazendo um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água da calha seja máxima?

69. Como deve ser escolhido o ponto P sobre o segmento AB de forma a maximizar o ângulo θ?

70. Uma pintura em uma galeria de arte tem altura h e está pendurada de forma que o lado de baixo está a uma distância d acima do olho de um observador (como na figura). A que distância da parede deve ficar o observador para obter a melhor visão? (Em outras palavras, onde deve ficar o observador de forma a maximizar o ângulo θ subentendido em seu olho pela pintura?)

71. Encontre a área máxima do retângulo que pode ser circunscrito em torno de um dado retângulo com comprimento L e largura W. [*Sugestão*: Expresse a área como função de um ângulo θ.]

72. O sistema vascular sanguíneo consiste em vasos sanguíneos (artérias, arteríolas, capilares e veias) que transportam o sangue do coração para os órgãos e de volta para o coração. Esse sistema deve trabalhar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue. Em particular, essa energia é reduzida quando a resistência do sangue diminui. Uma das Leis de Poiseuille dá a resistência R do sangue como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

onde L é o comprimento do vaso sanguíneo; r, o raio; e C é uma constante positiva determinada pela viscosidade do sangue. (Poiseuille estabeleceu experimentalmente essa lei, mas ela também segue da Equação 8.4.2.) A figura mostra o vaso sanguíneo principal com raio r_1 ramificando a um ângulo θ em um vaso menor com raio r_2.

(a) Use a Lei de Poiseuille para mostrar que a resistência total do sangue ao longo do caminho *ABC* é

$$R = C\left(\frac{a - b \operatorname{cotg} \theta}{r_1^4} + \frac{b \operatorname{cossec} \theta}{r_2^4}\right)$$

onde a e b são as distâncias mostradas na figura.

(b) Demonstre que essa resistência é minimizada quando

$$\cos \theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

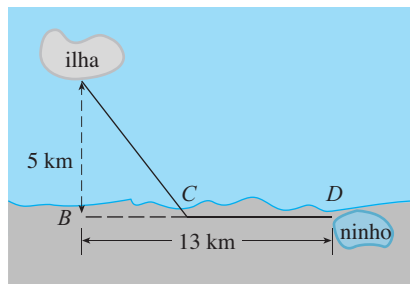
(c) Encontre o ângulo ótimo de ramificação (com precisão de um grau) quando o raio do vaso sanguíneo menor é 2/3 do raio do vaso maior.

73. Os ornitologistas determinaram que algumas espécies de pássaros tendem a evitar voos sobre largas extensões de água durante o dia. Acredita-se que é necessária mais energia para voar sobre a água que sobre a terra, pois o ar em geral sobe sobre a terra e desce sobre a água durante o dia. Um pássaro com essas tendências é solto de uma ilha que está 5 km do ponto mais próximo *B* sobre uma praia reta, voa para um ponto *C* na praia e então voa ao longo da praia para a área *D*, seu ninho. Suponha que o pássaro instintivamente escolha um caminho que vai minimizar seu gasto de energia. Os pontos *B* e *D* distam 13 km um do outro.

(a) Em geral, é necessário 1,4 vez mais energia para voar sobre a água que sobre a terra. Para que ponto *C* o pássaro deve voar a fim de minimizar a energia total despendida ao retornar para seu ninho?

(b) Sejam *W* e *L* a energia (em joules) por quilômetro voado sobre a água e sobre a terra, respectivamente. Qual o significado em termos do voo do pássaro de grandes valores da razão *W*/*L*? O que significaria um valor pequeno? Determine a razão *W*/*L* correspondente ao mínimo dispêndio de energia.

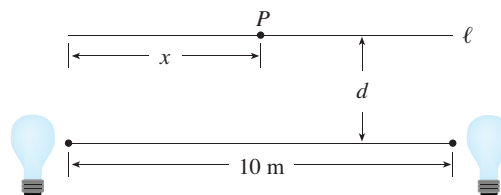
(c) Qual deveria ser o valor de *W*/*L* a fim de que o pássaro voasse diretamente para seu ninho *D*? Qual deveria ser o valor de *W*/*L* para o pássaro voar para *B* e então seguir ao longo da praia para *D*?

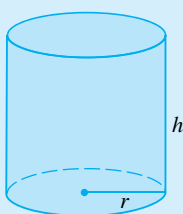
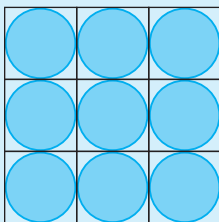
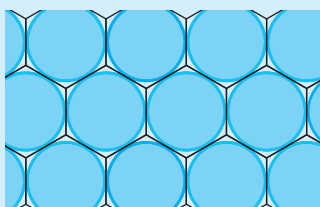
(d) Se os ornitologistas observarem que pássaros de uma certa espécie atingem a praia em um ponto a 4 km de *B*, quantas vezes mais energia será despendida pelo pássaro para voar sobre a água que sobre a terra?

74. Duas fontes de luz de igual potência estão colocadas 10 m uma da outra. Um objeto deve ser colocado em um ponto *P* sobre uma reta ℓ paralela à reta que une as fontes de luz a uma distância *d* metros dela (veja a figura). Queremos localizar *P* em ℓ de forma que a intensidade de iluminação seja minimizada. Precisamos usar o fato de que a intensidade de iluminação para uma única fonte é diretamente proporcional à potência da fonte e inversamente proporcional ao quadrado da distância da fonte.

(a) Encontre uma expressão para a intensidade $I(x)$ em um ponto *P*.

(b) Se $d = 5$ m, use os gráficos de $I(x)$ e $I'(x)$ para mostrar que a intensidade é minimizada quando $x = 5$ m, isto é, quando *P* está no ponto médio de ℓ.

(c) Se $d = 10$ m mostre que a intensidade (talvez surpreendentemente) *não* é minimizada no ponto médio.

(d) Em algum ponto entre $d = 5$ m e $d = 10$ m existe um valor de *d* no qual o ponto de iluminação mínima muda abruptamente. Estime esse valor de *d* por métodos gráficos. Encontre então o valor exato de *d*.

PROJETO APLICADO

A FORMA DE UMA LATA

Neste projeto examinaremos a forma mais econômica para uma lata. Primeiro interpretamos isso como se o volume *V* de uma lata cilíndrica fosse dado e precisássemos achar a altura *h* e o raio *r* que minimizasse o custo do metal para fazer a lata (veja a figura). Se desprezarmos qualquer perda de metal no processo de manufatura, então o problema seria minimizar a área da superfície do cilindro. Resolvendo esse problema no Exemplo 2 da Seção 4.7, descobrimos que $h = 2r$, isto é, a altura deve ser igual ao diâmetro. Porém, se você olhar seu armário ou um supermercado com uma régua, descobrirá que a altura é geralmente maior que o diâmetro, e a razão h/r varia de 2 até cerca 3,8. Vamos ver se podemos explicar esse fenômeno.

Discos cortados a partir de quadrados

Discos cortados a partir de hexágonos

1. O material para fazer as latas é cortado de folhas de metal. Os lados cilíndricos são formados dobrando-se retângulos; esses retângulos são cortados da folha com uma pequena ou nenhuma perda. Mas se os discos do topo e da base forem cortados de quadrados de lado $2r$ (como na figura), isso leva a uma considerável perda de metal, que pode ser reciclado, mas que tem um pequeno ou nenhum valor para quem fabrica as latas. Se for esse o caso, mostre que a quantidade de metal usada é minimizada quando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2{,}55$$

2. Uma maneira mais eficiente de obter os discos é dividir a folha de metal em hexágonos e cortar as tampas e bases circulares dos hexágonos (veja a figura). Mostre que se for adotada essa estratégia, então

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2{,}21$$

3. Os valores de h/r que encontramos nos Problemas 1 e 2 estão muito pertos daqueles que realmente ocorrem nas prateleiras do supermercado, mas eles ainda não levam em conta tudo. Se examinarmos mais de perto uma lata, veremos que a tampa e a base são formadas de discos com raio maior que r, que são dobrados sobre as extremidades da lata. Se levarmos em conta isso, deveremos aumentar h/r. Mais significativamente, além do custo do metal, devemos incorporar o custo de manufatura da lata. Vamos supor que a maior parte da despesa esteja em ligar os lados às bordas para formar as latas. Se cortarmos os discos a partir de hexágonos, como no Problema 2, então o custo total será proporcional a

$$4\sqrt{3}\,r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

onde k é o inverso do comprimento que pode ser ligado ao custo de uma unidade de área de metal. Mostre que essa expressão é minimizada quando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Desenhe $\sqrt[3]{V}/k$ como uma função de $x = h/r$ e use seu gráfico para argumentar que quando uma lata é grande ou a junção é barata, deveríamos fazer h/r aproximadamente 2,21 (como no Problema 2). Mas quando a lata é pequena ou a junção é cara, h/r deve ser substancialmente maior.

5. Nossa análise mostra que as latas grandes devem ser quase quadradas, mas as latas pequenas devem ser altas e estreitas. Examine as formas relativas das latas em um supermercado. Nossa conclusão é de forma geral verdadeira na prática? Há exceções? Você pode apontar as razões de latas pequenas não serem sempre altas e estreitas?

4.8 MÉTODO DE NEWTON

Suponha que um vendedor de carro ponha um carro à venda por $ 18 000, ou em pagamentos de $ 375 mensais durante cinco anos. Você gostaria de saber qual a taxa de juros mensal que o vendedor de fato está cobrando. Para encontrar a resposta você deve resolver a equação

$$48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0 \qquad \boxed{1}$$

(Os detalhes são fornecidos no Exercício 41.) Como você resolveria essa equação?

Para uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ existe uma fórmula bem conhecida para as raízes. Para as equações de terceiro e quarto grau também existem fórmulas para as raízes, mas elas são extremamente complicadas. Se f for um polinômio de grau 5 ou maior, não existe nenhuma fórmula (veja observação na página 194). Da mesma forma, não existe uma fórmula que nos possibilite encontrar as raízes exatas de uma equação transcendental como $\cos x = x$.

Podemos encontrar uma solução *aproximada* para a Equação 1 traçando o lado esquerdo da equação. Usando uma ferramenta gráfica, e após experimentar com janela retangular, obtemos o gráfico na Figura 1.

FIGURA 1

Vemos que, além da solução $x = 0$ (que não nos interessa), existe uma solução entre 0,007 e 0,008. Dando um *zoom* obtemos que a raiz é aproximadamente 0,0076. Se precisarmos de maior precisão, poderemos dar repetidos *zooms*, mas isso é desnecessário. Uma alternativa mais rápida é usar um método numérico de encontrar raízes em uma calculadora ou um SCA. Se fizermos isso, encontraremos que a raiz correta até a nona casa decimal é 0,007628603.

■ Tente resolver a Equação 1 usando o método numérico de encontrar raízes de sua calculadora ou computador. Algumas máquinas não são capazes de resolvê-la. Outras têm sucesso, mas requerem que você especifique um ponto inicial para a busca.

Como funcionam esses métodos numéricos de encontrar raízes? É usada uma variedade de métodos, mas a maior parte das calculadoras ou SCA usa o **método de Newton**, também denominado **método de Newton-Raphson**. Vamos explicar agora como funciona esse método, parcialmente para mostrar o que acontece dentro de uma calculadora ou computador, e parcialmente como uma aplicação da ideia de aproximação linear.

A geometria por trás do método de Newton está mostrada na Figura 2, onde a raiz que tentamos encontrar é chamada r. Começamos com uma primeira aproximação x_1, que é obtida por conjectura, ou de um esboço do gráfico de f, ou de um gráfico gerado no computador de f. Considere a reta tangente L à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$ e olhe a intersecção com o eixo x de L, denominado x_2. A ideia por trás do método de Newton é que a reta tangente fica próxima da curva; assim, a intersecção com o eixo x, x_2, está próxima da intersecção com o eixo x da curva (isto é, a raiz r que estamos procurando). Como a tangente é uma reta, podemos facilmente encontrar sua intersecção com o eixo x.

FIGURA 2

Para encontrar uma fórmula para x_2 em termos de x_1 usamos o fato de que a inclinação de L é $f'(x_1)$; assim, sua equação é

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Uma vez que a intersecção com o eixo x de L é x_2, fazemos $y = 0$ e obtemos

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Se $f'(x_1) \neq 0$, podemos isolar x_2 nessa equação:

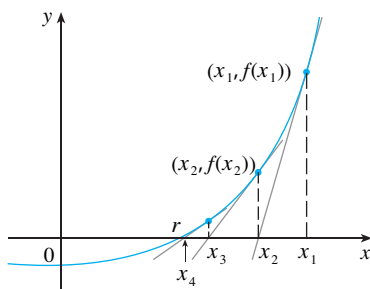
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Usamos x_2 como a segunda aproximação de r.

A seguir repetimos o procedimento com x_1 substituído por x_2, usando a reta tangente em $(x_2, f(x_2))$. Isso dá uma terceira aproximação:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

FIGURA 3

Se ficarmos repetindo esse processo, obteremos uma sequência de aproximações $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ conforme mostra a Figura 3. Em geral, se x_n for a n-ésima aproximação e $f'(x_n) \neq 0$, então a aproximação seguinte é dada por

■ Sequências foram introduzidas brevemente em Uma Apresentação do Cálculo na página XII. Veremos mais sobre sequências na Seção 11.1, no Volume II.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

Se os números x_n ficarem cada vez mais próximos de r à medida que n cresce, dizemos que a sequência *converge* para r e escrevemos

$$\lim_{x \to \infty} x_n = r$$

FIGURA 4

Embora a sequência de aproximações sucessivas convirja para a raiz desejada no caso das funções do tipo ilustrado na Figura 3, em certas circunstâncias a sequência pode não convergir. Por exemplo, considere a situação mostrada na Figura 4. Você pode ver que x_2 é uma aproximação pior que x_1. Esse é provavelmente o caso quando $f'(x_1)$ está próximo de 0. Pode até acontecer de uma aproximação (tal como x_3 na Figura 4) cair fora do domínio de f. Então o método de Newton falha e uma melhor aproximação inicial x_1 deve ser escolhida. Veja os Exercícios 31-34 para exemplos específicos nos quais o método de Newton funciona muito lentamente ou não funciona.

■ A Figura 5 mostra a geometria atrás do primeiro passo do método de Newton para o Exemplo 1. Como $f(2) = 10$, a reta tangente a $y = x^3 - 2x - 5$ em $(2, -1)$ tem equação igual a $y = 10x - 21$ cujo zero está em $x_2 = 2{,}1$.

EXEMPLO 1 Começando com $x_1 = 2$, encontre a terceira aproximação x_3 para a raiz da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$.

SOLUÇÃO Vamos aplicar o método de Newton com

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{e} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

O próprio Newton usou essa equação para ilustrar seu método, e escolheu $x_1 = 2$ após algumas experiências, pois $f(1) = -6$, $f(2) = -1$ e $f(3) = 16$. A Equação 2 fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

FIGURA 5

Com $n = 1$, temos

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{(2)^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2{,}1$$

Então com $n = 2$, obtemos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2}$$

$$= 2{,}1 - \frac{(2{,}1)^3 - 2(2{,}1) - 5}{3(2{,}1)^2 - 2} \approx 2{,}0946$$

Resulta que essa terceira aproximação $x_3 \approx 2{,}0946$ é precisa até quatro casas decimais. □

Suponha que queiramos obter uma dada precisão, digamos de oito casas decimais, empregando o método de Newton. Como saber quando devemos parar? O procedimento experimental geralmente usado é que devemos parar quando duas aproximações sucessivas x_n e x_{n+1} são iguais até a oitava casa decimal. (Um enunciado preciso a respeito da precisão do método de Newton será dado no Exercício 39 na Seção 11.11, no Volume II.)

Observe que o procedimento para ir de n para $n + 1$ é o mesmo para todos os valores de n. (Isso é chamado processo *iterativo*.) Isso significa que o método de Newton é particularmente adequado ao uso de calculadoras programáveis ou de um computador.

EXEMPLO 2 Use o método de Newton para encontrar $\sqrt[6]{2}$ com precisão de oito casas decimais.

SOLUÇÃO Observamos primeiro que encontrar $\sqrt[6]{2}$ equivale a determinar a raiz positiva da equação

$$x^6 - 2 = 0$$

dessa forma, tomamos $f(x) = x^6 - 2$. Então $f'(x) = 6x^5$, e a Fórmula 2 (método de Newton) fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Se escolhermos $x_1 = 1$ como a aproximação inicial, obtemos

$$\begin{aligned} x_2 &\approx 1{,}16666667 \\ x_3 &\approx 1{,}12644368 \\ x_4 &\approx 1{,}12249707 \\ x_5 &\approx 1{,}12246205 \\ x_6 &\approx 1{,}12246205 \end{aligned}$$

Uma vez que x_5 e x_6 são iguais até a oitava casa decimal, concluímos

$$\sqrt[6]{2} \approx 1{,}12246205$$

até a oitava casa decimal. □

EXEMPLO 3 Encontre a raiz da equação $\cos x = x$, com precisão de seis casas decimais.

SOLUÇÃO Primeiro reescrevemos a equação na forma-padrão:

$$\cos x - x = 0$$

FIGURA 6

Portanto, fazemos $f(x) = \cos x - x$. Então $f'(x) = -\text{sen}\, x - 1$, e assim a Fórmula 2 fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\text{sen}\, x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\text{sen}\, x_n + 1}$$

A fim de determinar um valor adequado para x_1 esboçamos o gráfico de $y = \cos x$ e $y = x$ na Figura 6. É evidente que elas se interceptam em um ponto cuja coordenada x é um pouco menor que 1; dessa forma, vamos tomar $x_1 = 1$ como uma primeira aproximação conveniente. Logo, lembrando de colocar nossa calculadora no modo radiano, obtemos

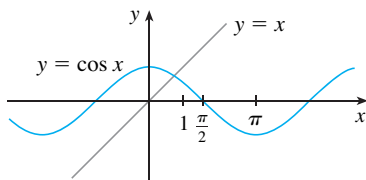
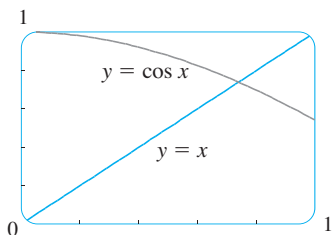
$$\begin{aligned} x_2 &\approx 0{,}75036387 \\ x_3 &\approx 0{,}73911289 \\ x_4 &\approx 0{,}73908513 \\ x_5 &\approx 0{,}73908513 \end{aligned}$$

FIGURA 7

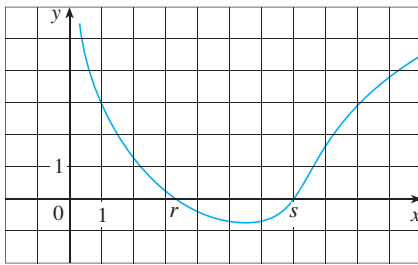
Como x_4 e x_5 são iguais até a sexta casa decimal (na realidade, oitava), concluímos que a raiz da equação, correta até a sexta casa decimal, é 0,739085. □

Em vez de usar o esboço da Figura 6 para obter a aproximação inicial para o método de Newton no Exemplo 3, poderíamos ter usado um gráfico mais apurado fornecido por calculadora ou computador. A Figura 7 sugere o uso de $x_1 = 0{,}75$ como a aproximação inicial. Então o método de Newton dá

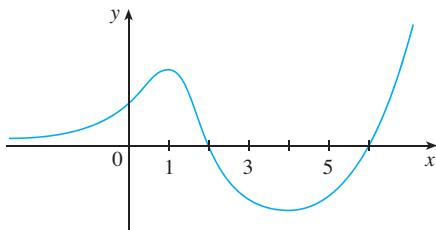
$$x_2 \approx 0{,}73911114 \qquad x_3 \approx 0{,}73908513 \qquad x_4 \approx 0{,}73908513$$

e assim obtemos a mesma resposta anterior, mas com um número menor de passos.

Você deve estar se perguntando por que nos preocupamos com o método de Newton se uma ferramenta gráfica está disponível. Não é mais fácil dar repetidos *zooms* para encontrar as raízes como fizemos na Seção 1.4? Se somente for pedida uma precisão de uma ou duas casas decimais, então realmente o método de Newton é inadequado, e basta uma ferramenta gráfica. Mas se forem exigidas seis ou oito casas decimais, então repetidos *zooms* tornam-se entediantes. Em geral é mais rápido e mais eficiente usar o computador e o método de Newton em conjunto – a ferramenta gráfica para começar e o método de Newton para acabar.

4.8 EXERCÍCIOS

1. A figura mostra o gráfico da função f. Suponha que seja usado o método de Newton para aproximar a raiz r da equação $f(x) = 0$ com $x_1 = 1$ como aproximação inicial.
(a) Trace as retas tangentes que foram usadas para encontrar x_2 e x_3 e estime os valores numéricos de x_2 e x_3.
(b) Uma melhor aproximação seria $x_1 = 5$? Explique.

2. Siga as instruções do Exercício 1(a), mas use $x_1 = 9$ como a aproximação inicial para encontrar a raiz s.

3. Suponha que a reta $y = 5x - 4$ é tangente à curva $y = f(x)$ quando $x = 3$. Se for usado o método de Newton para localizar uma raiz da equação $f(x) = 0$ com a aproximação inicial $x_1 = 3$, encontre a segunda aproximação x_2.

4. Para cada aproximação inicial, determine graficamente o que acontecerá se for usado o método de Newton para a função cujo gráfico é dado.
(a) $x_1 = 0$ (b) $x_1 = 1$ (c) $x_1 = 3$
(d) $x_1 = 4$ (e) $x_1 = 5$

5–8 Use o método de Newton com o valor inicial especificado x_1 para encontrar x_3, a terceira aproximação da raiz da equação dada. (Dê sua resposta com quatro casas decimais.)

5. $x^3 + 2x - 4 = 0, \quad x_1 = 1$ **6.** $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3 = 0, \quad x_1 = -3$

7. $x^5 - x - 1 = 0, \quad x_1 = 1$ **8.** $x^5 + 2 = 0, \quad x_1 = -1$

9. Use o método de Newton com a aproximação inicial $x_1 = -1$ para achar x_2, a segunda aproximação da raiz da equação $x^3 + x + 3 = 0$. Faça o gráfico da função e da reta tangente no ponto $(-1, 1)$. Usando este gráfico explique como o método funciona neste caso.

10. Use o método de Newton com a aproximação inicial $x_1 = 1$ para achar x_2, a segunda aproximação da raiz da equação $x^4 - x - 1 = 0$. Faça o gráfico da função e da reta tangente no ponto $(1, -1)$. Usando este gráfico explique como o método funciona neste caso.

11–12 Use o método de Newton para aproximar o número dado com precisão de oito casas decimais.

11. $\sqrt[5]{20}$ **12.** $\sqrt[100]{100}$

13–16 Use o método de Newton para aproximar a raiz indicada da equação com precisão de seis casas decimais.

13. A raiz de $2x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ no intervalo $[2, 3]$

14. A raiz de $x^4 + x - 4 = 0$ no intervalo $[1, 2]$

15. A raiz positiva de $\operatorname{sen} x = x^2$

16. A raiz positiva de $2 \cos x = x^4$

17–22 Use o método de Newton para encontrar todas as raízes da equação com precisão de seis casas decimais.

17. $x^4 = 1 + x$ **18.** $e^x = 3 - 2x$

19. $(x - 2)^2 = \ln x$ **20.** $\dfrac{1}{x} = 1 + x^3$

21. $\operatorname{tg}^{-1} x = 1 - x$ **22.** $\sqrt{x + 3} = x^2$

23–28 Use o método de Newton para encontrar todas as raízes da equação com precisão de oito casas decimais. Comece fazendo um gráfico para encontrar a aproximação inicial.

23. $x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 10 = 0$

24. $x^2(4 - x^2) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

25. $x^2\sqrt{2 - x - x^2} = 1$ **26.** $3 \operatorname{sen}(x^2) = 2x$

27. $4e^{-x^2} \operatorname{sen} x = x^2 - x + 1$ **28.** $e^{\operatorname{arctg} x} = \sqrt{x^3 + 1}$

29. (a) Aplique o método de Newton à equação $x^2 - a = 0$ para deduzir o seguinte algoritmo para a raiz quadrada (usado pelos antigos babilônios para calcular $\sqrt{a}$)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\sqrt{1000}$ com precisão de seis casas decimais.

30. (a) Aplique o método de Newton à equação $1/x - a = 0$ para deduzir o seguinte algoritmo para os inversos:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(Esse algoritmo possibilita a um computador achar os inversos sem realmente dividir.)

(b) Use a parte (a) para calcular 1/1,6984 com precisão de seis casas decimais.

31. Explique por que o método de Newton não funciona para encontrar as raízes da equação $x^3 - 3x + 6 = 0$ se o valor inicial escolhido for $x_1 = 1$.

32. (a) Use o método de Newton com $x_1 = 1$ para encontrar a raiz da equação $x^3 - x = 1$ com precisão de seis casas decimais.

(b) Resolva a equação da parte (a) usando como aproximação inicial $x_1 = 0{,}6$.

(c) Resolva a equação da parte (a) utilizando $x_1 = 0{,}57$. (Você definitivamente precisa de uma calculadora programável para esta parte.)

(d) Faça o gráfico de $f(x) = x^3 - x - 1$ e suas retas tangentes em $x_1 = 1$, 0,6; e 0,57 para explicar por que o método de Newton é tão sensível ao valor da aproximação inicial.

33. Explique por que o método de Newton falha quando aplicado à equação $\sqrt[3]{x} = 0$ com qualquer valor inicial $x_1 \neq 0$. Ilustre sua explicação com um esboço.

34. Se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

então a raiz da equação $f(x) = 0$ é $x = 0$. Explique por que o método de Newton falha para encontrar a raiz, não importando que aproximação inicial $x_1 \neq 0$ é usada. Ilustre sua explicação com um esboço.

35. (a) Use o método de Newton para encontrar os números críticos da função $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x$ com precisão de três casas decimais.

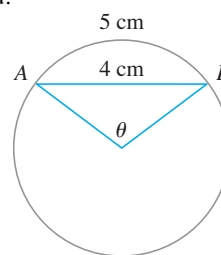
(b) Encontre o valor mínimo absoluto de f com precisão de quatro casas decimais.

36. Use o método de Newton para encontrar o valor máximo absoluto da função $f(x) = x\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ com precisão de seis casas decimais.

37. Use o método de Newton para encontrar as coordenadas do ponto de inflexão da curva $y = e^{\cos x}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, com precisão de seis casas decimais.

38. Dentre as infinitas retas tangentes à curva $y = -\operatorname{sen} x$ que passam pela origem, existe uma que tem a maior inclinação. Use o método de Newton para encontrar a inclinação daquela reta com precisão de seis casas decimais.

39. Use o método de Newton para encontrar as coordenadas, com precisão de seis casas decimais, do ponto na parábola $y = (x-1)^2$ que esteja mais próximo da origem.

40. Na figura, o comprimento da corda AB é 4 cm, e o comprimento do arco AB é 5 cm. Encontre o ângulo central θ, em radianos, correto até a quarta casa decimal. Dê então a resposta com precisão de um grau.

41. Um vendedor vende um carro novo por $ 18 000. Ele também oferece para vender o mesmo carro em pagamentos de $ 375 por mês durante 5 anos. Qual a taxa de juro mensal cobrada pelo vendedor?

Para resolver esse problema você necessitará da fórmula para o valor presente A de uma anuidade formada por n pagamentos iguais de tamanho R com uma taxa de juros i por período de tempo:

$$A = \frac{R}{i}\left[1 - (1+i)^{-n}\right]$$

Substituindo i por x, mostre que

$$48x(1+x)^{60} - (1+x)^{60} + 1 = 0$$

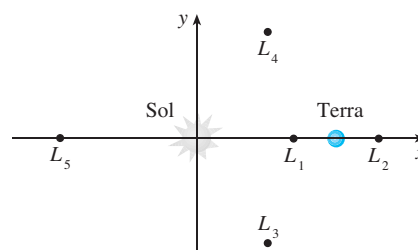
Use o método de Newton para resolver essa equação.

42. A figura mostra o Sol na origem e a Terra no ponto (1, 0). (A unidade aqui é a distância entre o centro da Terra e o Sol, chamada *unidade astronômica*: 1 UA $\approx 1{,}496 \times 10^8$ km.) Existem cinco localizações L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 nesse plano de rotação da Terra em torno do Sol onde um satélite permanece imóvel em relação à Terra, em razão das forças que agem no satélite (inclusive a atração gravitacional da Terra e do Sol) se contrabalancearem. Essas localizações são denominadas *pontos de libração*. (Um satélite de pesquisa solar foi colocado em um desses pontos.) Se m_1 for a massa do Sol, m_2 for a massa da Terra e $r = m_2/(m_1 + m_2)$, resulta que a coordenada x de L_1 é a única raiz da equação de quinto grau

$$p(x) = x^5 - (2 + r)x^4 + (1 + 2r)x^3 - (1 - r)x^2$$
$$+ 2(1 - r)x + r - 1 = 0$$

e a coordenada x de L_2 é a raiz da equação

$$p(x) - 2rx^2 = 0$$

Usando o valor $r \approx 3{,}04042 \times 10^6$, encontre a localização dos pontos de libração (a) L_1 e (b) L_2.

4.9 PRIMITIVAS

Um físico que conhece a velocidade de uma partícula pode desejar saber sua posição em um dado instante. Um engenheiro que pode medir a taxa de variação segundo a qual a água está escoando de um tanque quer saber a quantidade escoada durante um certo período. Um biólogo que conhece a taxa segundo a qual uma população de bactérias está crescendo pode querer deduzir qual o tamanho da população em um certo momento futuro. Em cada caso, o problema é encontrar uma função F cuja derivada é uma função conhecida f. Se a função F existir, ela é chamada *primitiva* de f.

DEFINIÇÃO Uma função F é denominada uma **primitiva** de f no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Por exemplo, seja $f(x) = x^2$. Não é difícil descobrir uma primitiva de f se tivermos a em mente a Regra da Potência. De fato, se $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, então $F'(x) = x^2 = f(x)$. Mas a função $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ também satisfaz $G'(x) = x^2$. Consequentemente, F e G são primitivas de f. Na verdade, qualquer função da forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, em que C é uma constante, é uma primitiva de f. A questão que se levanta é: existem outras?

Para responder a essa questão, lembre-se de que na Seção 4.2 usamos o Teorema do Valor Médio para demonstrar que se duas funções têm derivadas idênticas em um intervalo, então elas devem diferir por uma constante (Corolário 4.2.7). Assim, se F e G são duas primitivas quaisquer de f, então

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

logo $G(x) - F(x) = C$, em que C é uma constante. Podemos escrever isso como $G(x) = F(x) + C$. Temos então o seguinte resultado.

1 TEOREMA Se F for uma primitiva de f em um intervalo I, então a primitiva mais geral de f em I é

$$F(x) + C$$

em que C é uma constante arbitrária.

$y = \frac{x_3}{3} + 3$
$y = \frac{x_3}{3} + 2$
$y = \frac{x_3}{3} + 1$
$y = \frac{x_3}{3}$
$y = \frac{x_3}{3} - 1$
$y = \frac{x_3}{3} - 2$

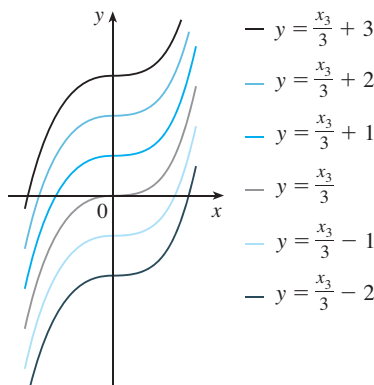



FIGURA 1
Membros da família de primitivas de $f(x) = x^2$

Voltando à função $f(x) = x^2$, vemos que a primitiva geral de f é $\frac{1}{3}x^3 + C$. Atribuindo valores específicos para a constante C obtemos uma família de funções cujos gráficos são translações verticais uns dos outros (veja a Figura 1). Isto faz sentido, pois cada curva deve ter a mesma inclinação em qualquer valor dado de x.

EXEMPLO 1 Encontre a primitiva mais geral de cada uma das seguintes funções.

(a) $f(x) = \text{sen}\, x$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = x^n$, $n \neq -1$

SOLUÇÃO

(a) Se $F(x) = -\cos x$, então $F'(x) = \text{sen}\, x$, logo uma primitiva de $\text{sen}\, x$ é $-\cos x$. Pelo Teorema 1, a primitiva mais geral é $G(x) = -\cos x + C$.

(b) Lembre-se da Seção 3.6 que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Logo, no intervalo $(0, \infty)$, a primitiva geral de $1/x$ é $\ln x + C$. Também sabemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

para todo $x \neq 0$. O Teorema 1 então nos diz que a primitiva geral de $f(x) = 1/x$ é $\ln |x| + C$ em qualquer intervalo que não contenha 0. Em particular, isso é verdadeiro em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Logo a primitiva geral de f é

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(c) Usamos a Regra da Potência para descobrir uma primitiva de x^n. De fato, se $n \neq -1$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Assim, a primitiva geral de $f(x) = x^n$ é

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Isso é válido para todo $n \geqslant 0$, uma vez que $f(x) = x^n$ está definida em um intervalo. Se n for negativo (mas $n \neq -1$), é válido em qualquer intervalo que não contenha 0. □

Como no Exemplo 1, toda fórmula de derivação, quando lida da direita para a esquerda, dá origem a uma fórmula de primitivação. Na Tabela 2 listamos algumas primitivas particulares. Cada fórmula na tabela é verdadeira, pois a derivada da função na coluna direita aparece na coluna esquerda. Em particular, a primeira fórmula diz que a primitiva de uma constante vezes uma função é a constante vezes a primitiva da função. A segunda fórmula afirma que a primitiva de uma soma é a soma das primitivas. (Usamos a notação $F' = f$, $G' = g$.)

2 TABELA DE FÓRMULAS DE PRIMITIVAÇÃO

Função	Primitiva particular	Função	Primitiva particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\text{sen}\, x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec^2 x$	$\text{tg}\, x$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x \,\text{tg}\, x$	$\sec x$
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{sen}^{-1} x$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\text{tg}^{-1} x$
$\cos x$	$\text{sen}\, x$		

■ Para obter a primitiva mais geral (em um intervalo) a partir daquelas da Tabela 2, devemos adicionar uma constante (ou constantes), como no Exemplo 1.

EXEMPLO 2 Encontre todas as funções g de tais que

$$g'(x) = 4 \text{ sen } x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

SOLUÇÃO Queremos achar uma primitiva de

$$g'(x) = 4 \text{ sen } x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \text{ sen } x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Assim, queremos descobrir a primitiva de

$$g'(x) = 4 \text{ sen } x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

Usando as fórmulas da Tabela 2 junto com o Teorema 1 obtemos

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -4 \cos x + \tfrac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C$$ □

Nas aplicações do cálculo são muito comuns situações como a do Exemplo 2, em que é pedido para encontrar uma função sendo fornecidos dados sobre suas derivadas. Uma equação que envolva as derivadas de uma função é chamada **equação diferencial**. As equações diferenciais serão estudadas com mais detalhes no Capítulo 9, no Volume II, mas no momento podemos resolver algumas equações diferenciais elementares. A solução geral de uma equação diferencial envolve uma constante arbitrária (ou constantes), como no Exemplo 2. Contudo, podem ser dadas condições extras que vão determinar as constantes e assim especificar univocamente a solução.

■ A Figura 2 mostra os gráficos da função f' do Exemplo 3 e de sua primitiva f. Observe que $f'(x) > 0$, logo f é sempre crescente. Observe também que quando f' tem um máximo ou mínimo, f parece ter um ponto de inflexão. Logo, o gráfico serve como verificação de nossos cálculos.

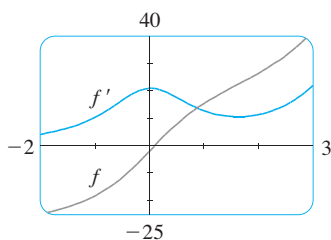



FIGURA 2

EXEMPLO 3 Encontre f se $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ e $f(0) = -2$.

SOLUÇÃO A primitiva geral de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

é

$$f(x) = e^x + 20 \text{ tg}^{-1} x + C$$

Para determinar C, usamos o fato de que $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20 \text{ tg}^{-1} 0 + C = -2$$

Assim, temos $C = -2 - 1 = -3$; logo, a solução particular é

$$f(x) = e^x + 20 \text{ tg}^{-1} x - 3$$ □

EXEMPLO 4 Encontre f se $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ e $f(1) = 1$.

SOLUÇÃO A primitiva geral de $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ é

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Usando as regras de primitivação mais uma vez, encontramos que

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Para determinar C e D usamos as condições dadas que $f(0) = 4$ e $f(1) = 1$. Visto que $f(0) = 0 + D = 4$, temos $D = 4$. Uma vez que

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$

temos $C = -3$. Consequentemente, a função pedida é

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$ □

Se nos for dado o gráfico de uma função f, parece razoável que possamos esboçar o gráfico de uma primitiva F. Suponha, por exemplo, que nos seja dado que $F(0) = 1$. Então temos um ponto de partida $(0, 1)$, e a direção segundo a qual movemos nosso lápis é dada em cada estágio pela derivada $F'(x) = f(x)$. No próximo exemplo usamos os princípios deste capítulo para mostrar como fazer o gráfico de F mesmo quando não temos uma fórmula para f. Esse seria o caso, por exemplo, quando $f(x)$ é determinada por dados experimentais.

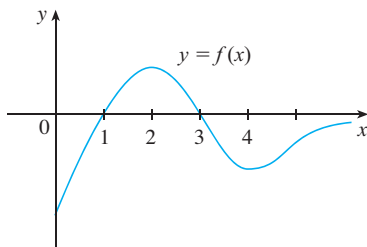



FIGURA 3

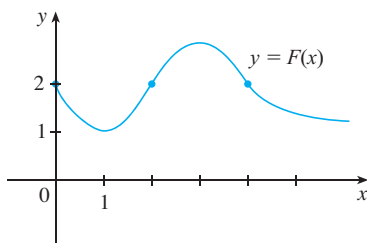



FIGURA 4

EXEMPLO 5 O gráfico de uma função f é dado na Figura 3. Faça um esboço de uma primitiva F, dado que $F(0) = 2$.

SOLUÇÃO Estamos orientados pelo fato de que a inclinação de $y = F(x)$ é $f(x)$. Vamos começar no ponto $(0, 2)$, traçando F como uma função inicialmente decrescente, uma vez que $f(x)$ é negativa quando $0 < x < 1$. Observe que $f(1) = f(3) = 0$, logo F tem tangentes horizontais quando $x = 1$ e $x = 3$. Para $1 < x < 3$, $f(x)$ é positiva e F é crescente. Vemos que F tem mínimo local quando $x = 1$ e máximo local quando $x = 3$. Para $x > 3$, $f(x)$ é negativa e F é decrescente em $(3, \infty)$. Uma vez que $f(x) \to 0$ quando $x \to \infty$, o gráfico de F torna-se mais achatado quando $x \to \infty$. Observe também que $F''(x) = f'(x)$ muda de positivo para negativo em $x = 2$ e de negativo para positivo em $x = 4$, logo F tem pontos de inflexão quando $x = 2$ e $x = 4$. Usamos essa informação para esboçar o gráfico para a primitiva na Figura 4. □

MOVIMENTO RETILÍNEO

A primitivação é particularmente útil na análise do movimento de um objeto que se move em uma reta. Lembre-se de que se o objeto tem função posição $s = f(t)$, então a função velocidade é $v(t) = s'(t)$. Isso significa que a função posição é uma primitiva da função velocidade. Da mesma maneira, a função aceleração é $a(t) = v'(t)$; logo, a função velocidade é uma primitiva da aceleração. Se a aceleração e os valores iniciais $s(0)$ e $v(0)$ forem conhecidos, então a função posição pode ser encontrada encontrando a primitiva duas vezes.

EXEMPLO 6 Uma partícula move-se em uma reta e tem aceleração dada por $a(t) = 6t + 4$. Sua velocidade inicial é $v(0) = -6$ cm/s, e seu deslocamento inicial é $s(0) = 9$ cm. Encontre sua função posição $s(t)$.

SOLUÇÃO Como $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, a primitivação dá

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Observe que $v(0) = C$. Mas temos $v(0) = -6$, logo $C = -6$ e

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Uma vez que $v(t) = s'(t)$, s é a primitiva de v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Isso dá $s(0) = D$. Temos $s(0) = 9$, logo $D = 9$ e a função posição pedida é

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$ □

Um objeto próximo da superfície da Terra está sujeito a uma força gravitacional que produz uma aceleração para baixo denotada por g. Para um movimento próximo à Terra podemos supor que g é constante, sendo seu valor cerca de 9,8 m/s^2 (ou 32 pés/s^2).

EXEMPLO 7 Uma bola é arremessada para cima com uma velocidade de 15 m/s da borda de um penhasco 140 m acima do solo. Encontre sua altura acima do solo t segundos mais tarde. Quando ela atinge sua altura máxima? Quando atinge o solo?

SOLUÇÃO O movimento é vertical, e escolhemos o sentido positivo para cima. No instante t, a distância acima do solo é $s(t)$ e a velocidade $v(t)$ está decrescendo. Portanto, a aceleração deve ser negativa, e temos

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -9{,}8$$

Procurando a primitiva, temos

$$v(t) = -9{,}8t + C$$

■ A Figura 5 mostra a função posição. O gráfico confirma nossas conclusões. A bola atinge sua altura máxima após de 1,5 s e atinge o solo após 7,1 s.

FIGURA 5

Para determinar C, usamos a informação dada que $v(0) = 15$. Isso dá $15 = 0 + C$, logo

$$v(t) = -9{,}8t + 15$$

A altura máxima é atingida quando $v(t) = 0$, isto é, depois de $15/9{,}8 \approx 1{,}53$s. Uma vez que $s'(t) = v(t)$, determinamos a primitiva outra vez e obtemos

$$s(t) = -4{,}9t^2 + 15t + D$$

Usando o fato de que $s(0) = 140$, temos $140 = 0 + D$ e então

$$s(t) = -4{,}9t^2 + 15t + 140$$

A expressão para $s(t)$ é válida até que a bola atinja o solo. Isso acontece quando $s(t) = 0$, isto é, quando

$$-4{,}9t^2 - 15t - 140 = 0$$

Usando a fórmula quadrática para resolver essa equação obtemos

$$t = \frac{15 \pm \sqrt{2969}}{9{,}8}$$

Rejeitamos a solução com o sinal de menos, uma vez que ela fornece um valor negativo para t. Portanto, a bola atinge o solo após

$$t = \frac{15 + \sqrt{2969}}{9{,}8} \approx 7{,}1\text{s}$$

□

4.9 EXERCÍCIOS

1–20 Encontre a primitiva mais geral da função. (Verifique sua resposta derivando.)

1. $f(x) = x - 3$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

3. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3$

4. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3$

5. $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$

6. $f(x) = x(2 - x)^2$

7. $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$

8. $f(x) = 2x + 3x^{1{,}7}$

9. $f(x) = 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}$

10. $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^4}$

11. $f(x) = \dfrac{10}{x^9}$

12. $g(x) = \dfrac{5 - 4x^3 + 2x^6}{x^6}$

13. $f(u) = \dfrac{u^4 + 3\sqrt{u}}{u^2}$

14. $f(x) = 3e^x + 7\sec^2 x$

15. $g(\theta) = \cos\theta - 5 \operatorname{sen}\theta$

16. $f(t) = \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{senh} t$

17. $f(x) = 5e^x - 3\cosh x$

18. $f(x) = 2\sqrt{x} + 6\cos x$

19. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{x^4}$

20. $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$

21–22 Encontre a primitiva F de f que satisfaça a condição dada. Verifique sua resposta comparando os gráficos de f e F.

21. $f(x) = 5x^4 - 2x^5$, $F(0) = 4$

22. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}$, $F(1) = 0$

23–46 Encontre f.

23. $f''(x) = 6x + 12x^2$

24. $f''(x) = 2 + x^3 + x^6$

25. $f''(x) = \frac{2}{3}x^{2/3}$

26. $f''(x) = 6x + \operatorname{sen} x$

27. $f'''(x) = e^t$

28. $f'''(t) = t - \sqrt{t}$

29. $f'(x) = 1 - 6x, \quad f(0) = 8$

30. $f'(x) = 8x^3 + 12x + 3, \quad f(1) = 6$

31. $f'(x) = \sqrt{x}\,(6 + 5x), \quad f(1) = 10$

32. $f'(x) = 2x - 3/x^4, \quad x > 0, \quad f(1) = 3$

33. $f'(t) = 2\cos t + \sec^2 t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2, \quad f(\pi/3) = 4$

34. $f'(x) = (x^2 - 1)/x, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(-1) = 0$

35. $f'(x) = x^{-1/3}, \quad f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$

36. $f'(x) = 4/\sqrt{1 - x^2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

37. $f''(x) = 24x^2 + 2x + 10, \quad f(1) = 5, \quad f'(1) = -3$

38. $f''(x) = 4 - 6x - 40x^3, \quad f(0) = 2, \quad f'(0) = 1$

39. $f''(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta, \quad f(0) = 3, \quad f'(0) = 4$

40. $f''(t) = 3/\sqrt{t}\,, \quad f(4) = 20, \quad f'(4) = 7$

41. $f''(x) = 2 - 12x, \quad f(0) = 9, \quad f(2) = 15$

42. $f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 4, \quad f(0) = 8, \quad f(1) = 5$

43. $f''(x) = 2 + \cos x, \quad f(0) = -1, \quad f(\pi/2) = 0$

44. $f''(t) = 2e^t + 3\operatorname{sen} t, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0$

45. $f''(x) = x^{-2}, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$

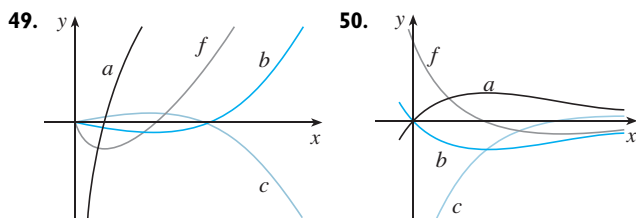
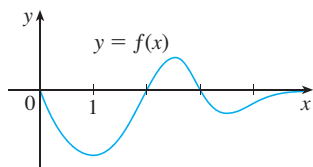
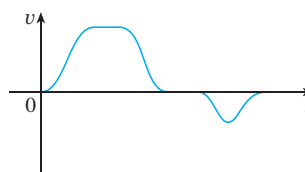
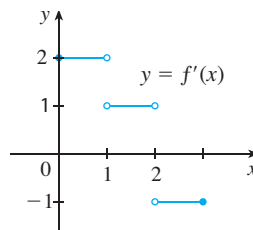
46. $f'''(x) = \cos x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 3$

47. Dado que o gráfico de f passa pelo ponto $(1, 6)$ e que a inclinação de sua reta tangente em $(x, f(x))$ é $2x + 1$, encontre $f(2)$.

48. Encontre uma função f tal que $f'(x) = x^3$ e tal que a reta $x + y = 0$ seja tangente ao gráfico de f.

49–50 O gráfico de uma função f está mostrado. Qual gráfico é uma primitiva de f e por quê?

49.

50.

51. O gráfico de uma função está mostrado na figura. Faça um esboço de uma primitiva de F, dado que $F(0) = 1$.

52. O gráfico da função velocidade de um carro está mostrado na figura. Esboce o gráfico da função posição.

53. O gráfico de f' está mostrado na figura. Esboce o gráfico de f se f for contínua e $f(0) = -1$.

54. (a) Use uma ferramenta gráfica para fazer o gráfico de $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.
(b) Começando com o gráfico da parte (a), esboce um gráfico da primitiva F que satisfaça $F(0) = 1$.
(c) Use as regras desta seção para achar uma expressão para $F(x)$.
(d) Faça o gráfico de F usando a expressão da parte (c). Compare com seu esboço da parte (b).

55–56 Trace um gráfico de f e use-o para fazer um esboço da primitiva que passe pela origem.

55. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}, \quad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$

56. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} - 1, \quad -1{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5$

57–62 Uma partícula move-se de acordo com os dados a seguir. Encontre a posição da partícula.

57. $v(t) = \operatorname{sen} t - \cos t, \quad s(0) = 0$

58. $v(t) = 1{,}5\sqrt{t}\,, \quad s(4) = 10$

59. $a(t) = t - 2, \quad s(0) = 1, \quad v(0) = 3$

60. $a(t) = \cos t + \operatorname{sen} t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 5$

61. $a(t) = 10\operatorname{sen} t + 3\cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

62. $a(t) = t^2 - 4t + 6, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 20$

63. Uma pedra é abandonada de um posto de observação da Torre CN, 450 m acima do solo.
(a) Determine a distância da pedra acima do nível do solo no instante t.
(b) Quanto tempo leva para a pedra atingir o solo?
(c) Com que velocidade ela atinge o solo?
(d) Se a pedra for atirada para baixo com uma velocidade de 5 m/s, quanto tempo levará para ela que atinja o solo?

64. Mostre que, para um movimento em uma reta com aceleração constante a, velocidade inicial v_0 e deslocamento inicial s_0, o deslocamento depois de um tempo t é

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

65. Um objeto é lançado para cima com velocidade inicial v_0 metros por segundo a partir de um ponto s_0 metros acima do solo. Mostre que

$$[v(t)]^2 = v_0^2 - 19{,}6[s(t) - s_0]$$

66. Duas bolas são arremessadas para cima à margem do penhasco no Exemplo 7. A primeira é arremessada com uma velocidade de 15 m/s, e a outra é arremessada 1 segundo depois, com uma velocidade de 8 m/s. As bolas passam uma pela outra alguma vez?

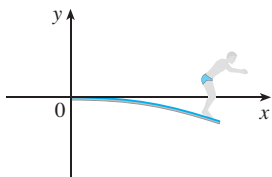
67. Uma pedra é largada de um penhasco e atinge o solo com uma velocidade de 40 m/s. Qual a altura do penhasco?

68. Se um mergulhador de massa m permanece na ponta de um trampolim de comprimento L e densidade linear g, o trampolim toma a forma da curva $y = f(x)$, em que

$$EIy'' = mg(L - x) + \tfrac{1}{2}\rho g(L - x)^2$$

e E e I são constantes positivas que dependem do material do trampolim e g (< 0) é a aceleração da gravidade.

(a) Encontre uma expressão para a forma da curva.

(b) Use $f(L)$ para estimar a distância da horizontal à ponta do trampolim.

69. Uma companhia estima que o custo marginal (em dólares por item) de produzir x itens é $1{,}92 - 0{,}002x$. Se o custo de produzir um item for \$ 562, encontre o custo de produzir 100 itens.

70. A densidade linear de um cabo de comprimento de 1 m é dado por $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$, em gramas por centímetro, onde x é medido em centímetros a partir da extremidade do cabo. Encontre a massa do cabo.

71. Uma vez que pingos de chuva crescem à medida que caem, sua área superficial cresce e, portanto, a resistência à sua queda aumenta. Um pingo de chuva tem uma velocidade inicial para baixo de 10 m/s e sua aceleração para baixo é

$$a = \begin{cases} 9 - 0{,}9t & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 0 & \text{se } t > 10 \end{cases}$$

Se o pingo de chuva estiver inicialmente a 500 m acima do solo, quanto tempo ele levará para cair?

72. Um carro está viajando a 80 km/h quando seu condutor freia completamente, produzindo uma desaceleração constante de 7m/s^2. Qual a distância percorrida antes de o carro parar?

73. Qual a aceleração necessária para aumentar a velocidade de um carro a 50 km/h para 80 km/h em 5 s?

74. Um carro é freado com uma desaceleração constante de 5m/s^2, produzindo marcas de freagem medindo 60 m antes de parar completamente. Quão rápido estava o carro viajando quando o freio foi acionado pela primeira vez?

75. Um carro está viajando a 100 km/h quando o motorista vê um acidente 80 m adiante e pisa no freio. Qual desaceleração constante é necessária para parar o carro em tempo de evitar a batida?

76. Um modelo de foguete é lançado para cima a partir do repouso. Sua aceleração para os três primeiros segundos é $a(t) = 18t$, e nesse ínterim o combustível acaba, e ele se transforma em um corpo em queda livre. Após 14 s o paraquedas do foguete se abre, e a velocidade (para baixo) diminui linearmente para $-5{,}5$ m/s em 5 segundos. O foguete então cai até o solo naquela taxa.

(a) Determine a função posição s e a função velocidade v (para todo instante t). Esboce os gráficos de s e v.

(b) Em que instante o foguete atingiu sua altura máxima e qual é essa altura?

(c) Em que instante o foguete atinge a terra?

77. Um trem-bala de alta velocidade acelera e desacelera a uma taxa de $1{,}2\text{ m/s}^2$. Sua velocidade máxima de cruzeiro é 145 km/h.

(a) Qual será a distância máxima percorrida pelo trem se ele acelerar a partir do repouso até atingir a velocidade de cruzeiro e permanecer nessa velocidade por 15 minutos?

(b) Suponha que o trem comece a partir do repouso e então pare completamente em 15 minutos. Que distância máxima ele poderá percorrer nessas condições?

(c) Encontre o tempo mínimo para o trem viajar entre duas estações consecutivas, distantes 72 km uma da outra.

(d) A viagem de uma estação para outra leva 37,5 minutos. Qual a distância entre as estações?

4 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Explique a diferença entre um máximo absoluto e um máximo local. Ilustre com um esboço.
2. (a) O que diz o Teorema do Valor Extremo?
   (b) Explique o funcionamento do Método do Intervalo Fechado.
3. (a) Enuncie o Teorema de Fermat.
   (b) Defina um número crítico de f.
4. (a) Enuncie o Teorema de Rolle.
   (b) Enuncie o Teorema do Valor Médio e dê uma interpretação geométrica.
5. (a) Enuncie o Teste Crescente/Decrescente.
   (b) O que significa dizer que f é côncava para cima em I?
   (c) Enuncie o Teste da Concavidade.
   (d) O que são pontos de inflexão? Como são encontrados?
6. (a) Enuncie o Teste da Primeira Derivada.
   (b) Enuncie o Teste da Segunda Derivada.
   (c) Quais as vantagens e desvantagens relativas desses testes?
7. (a) O que nos diz a Regra de L'Hôspital?
   (b) Como você pode usar a Regra de L'Hôspital se tiver um produto $f(x)g(x)$ onde $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$?
   (c) Como você pode usar a Regra de L'Hôspital se tiver uma diferença $f(x) - g(x)$ onde $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$?
   (d) Como você pode usar a Regra de L'Hôspital se tiver uma potência $[f(x)]^{g(x)}$ onde $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$?
8. Se você pode usar uma calculadora gráfica ou computador, para que precisa do cálculo para fazer o gráfico da função?
9. (a) Dada uma aproximação inicial x_1 para uma raiz da equação $f(x) = 0$, explique geometricamente, com um diagrama, como a segunda aproximação x_2 no método de Newton é obtida.
   (b) Escreva uma expressão para x_2 em termos de x_1, $f(x_1)$ e $f'(x_1)$.
   (c) Escreva uma expressão para x_{n+1} em termos de x_n, $f(x_n)$ e $f'(x_n)$.
   (d) Sob quais circunstâncias o método de Newton provavelmente falhará ou funcionará muito vagarosamente?
10. (a) O que é uma primitiva de uma função f?
    (b) Suponha que F_1 e F_2 sejam ambas primitivas de f em um intervalo I. Como estão relacionadas F_1 e F_2?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se $f'(c) = 0$, então f tem um máximo ou um mínimo local em c.
2. Se f tiver um valor mínimo absoluto em c, então $f'(c) = 0$.
3. Se f for contínua em (a, b), então f atinge um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em (a, b).
4. Se f for derivável e $f(-1) = f(1)$, então há um número c tal que $|c| < 1$ e $f'(c) = 0$.
5. Se $f'(x) < 0$ para $1 < x < 6$, então f é decrescente em $(1, 6)$.
6. Se $f''(2) = 0$, então $(2, f(2))$ é um ponto de inflexão da curva $y = f(x)$.
7. Se $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, então $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.
8. Existe uma função f tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ e $f'(x) > 1$ para todo x.
9. Existe uma função f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ para todo x.
10. Existe uma função f tal que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x.
11. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então $f + g$ é crescente em I.
12. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então $f - g$ é crescente em I.
13. Se f e g forem crescentes em um intervalo I, então fg é crescente em I.
14. Se f e g forem funções crescentes positivas em um intervalo I, então fg é crescente em I.
15. Se f for crescente e $f(x) > 0$ em I, então $g(x) = 1/f(x)$ é decrescente em I.

16. Se f for par, então f' será par.

17. Se f for periódica, então f' será periódica.

18. A primitiva mais geral de $f(x) = x^{-2}$ é

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

19. Se $f'(x)$ existe e não é nula para nenhum x, então $f(1) \neq f(0)$.

20. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = 1$

EXERCÍCIOS

1–6 Encontre os valores extremos absolutos e locais da função no intervalo dado.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, \quad [2, 4]$

2. $f(x) = x\sqrt{1-x}, \quad [-1, 1]$

3. $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1}, [-2, 2]$

4. $f(x) = (x^2 + 2x)^3, \quad [-2, 1]$

5. $f(x) = x + \text{sen } 2x, \quad [0, \pi]$

6. $f(x) = (\ln x)/x^2, \quad [1, 3]$

7–14 Calcule o limite.

7. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } \pi x}{\ln(1+x)}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x}$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

10. $\lim_{x\to \infty} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

11. $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x}$

12. $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

13. $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

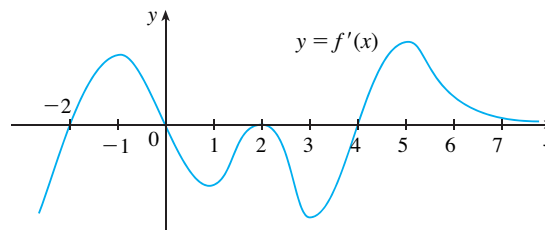
14. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\text{tg } x)^{\cos x}$

15–17 Esboce o gráfico de uma função que satisfaça as condições dadas.

15. $f(0) = 0, \quad f'(2) = f'(1) = f'(9) = 0,$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 6} f(x) = -\infty,$
$f'(x) < 0$ em $(-\infty, -2), (1, 6)$, e $(9, \infty)$,
$f'(x) > 0$ em $(2, 1)$ e $(6, 9)$,
$f''(x) > 0$ em $(-\infty, 0)$ e $(12, \infty)$,
$f''(x) < 0$ em $(0, 6)$ e $(6, 12)$

16. $f(0) = 0, \quad f$ é contínua e par,
$f'(x) = 2x$ se $0 < x < 1, f'(x) = -1$ se $1 < x < 3$,
$f'(x) = 1$ se $x > 3$

17. f é ímpar, $f'(x) = 0$ para $0 < x < 2$,
$f'(x) > 0$ para $x > 2, \quad f''(x) > 0$ para $0 < x < 3$,
$f''(x) < 0$ para $x > 3, \lim_{x\to\infty} f(x) = -2$

18. A figura mostra o gráfico da *derivada* f' de uma função f.
(a) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?
(b) Para que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?
(c) Esboce o gráfico de f''.
(d) Esboce um possível gráfico de f.

19–34 Use o roteiro da Seção 4.5 para esboçar a curva.

19. $y = 2 - 2x - x^3$

20. $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$

21. $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

22. $y = \frac{1}{1 - x^2}$

23. $y = \frac{1}{x(x-3)^2}$

24. $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$

25. $y = x^2/(x + 8)$

26. $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

27. $y = x\sqrt{2+x}$

28. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

29. $y = \text{sen}^2 x - 2\cos x$

30. $y = 4x - \text{tg } x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

31. $y = \text{sen}^{-1}(1/x)$

32. $y = e^{2x - x^2}$

33. $y = xe^{-2x}$

34. $y = x + \ln(x^2 + 1)$

35–38 Faça os gráficos de f que revelem todos os aspectos da curva. Use os gráficos de f' e f'' para estimar os intervalos de crescimento e de decrescimento, valores extremos, intervalos de concavidade e pontos de inflexão. No Exercício 35, use o cálculo para achar exatamente essas quantidades.

35. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

36. $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + x + 3}$

37. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$

38. $f(x) = x^2 + 6{,}5 \text{ sen } x, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5$

39. Faça o gráfico de $f(x) = e^{-1/x^2}$ em uma janela retangular que mostre todos os principais aspectos dessa função. Estime os pontos de inflexão. A seguir, use o cálculo para achá-los exatamente.

SCA **40.** (a) Faça o gráfico da função $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$.
(b) Explique a forma do gráfico calculando os limites de $f(x)$ quando x tende a $\infty, -\infty, 0^+$ e 0^-.
(c) Use o gráfico de f para estimar as coordenadas dos pontos de inflexão.

(d) Use seu SCA para calcular e fazer o gráfico de f.

(e) Use o gráfico da parte (d) para estimar mais precisamente o ponto de inflexão.

SCA **41–42** Use os gráficos de f, f' e f'' para estimar a coordenada x dos pontos de máximo, de mínimo e de inflexão de f.

41. $f(x) = \dfrac{\cos x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

42. $f(x) = e^{-0,1x}\ln(x^2 - 1)$

43. Investigue a família de funções $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + C)$. Que aspectos os membros dessa família têm em comum? Como eles diferem? Para quais valores de C a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$? Para quais valores de C a função f não tem gráfico? O que acontece quando $C \to \infty$?

44. Investigue a família de funções $f(x) = cxe^{-cx^2}$. O que acontece com os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão quando c varia? Ilustre suas conclusões fazendo o gráfico de vários membros da família.

45. Mostre que a equação $3x + 2\cos x + 5 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

46. Suponha que f seja contínua em $[0, 4]$, $f(0) = 1$ e $2 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todo x em $(0, 4)$. Mostre que $9 \leqslant f(4) \leqslant 21$.

47. Aplicando o Teorema do Valor Médio para a função $f(x) = x^{1/5}$ no intervalo $[32, 33]$, mostre que

$$2 < \sqrt[5]{33} < 2{,}0125$$

48. Para que valores das constantes a e b, $(1, 6)$ é um ponto de inflexão da curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$?

49. Seja $g(x) = f(x^2)$, onde f é duas vezes derivável para todo x, $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncava para cima em $(0, \infty)$.

(a) Em que números g tem um valor extremo?

(b) Discuta a concavidade de g.

50. Encontre dois inteiros positivos tal que a soma do primeiro número com quatro vezes o segundo número é 1 000, e o produto dos números é o maior possível.

51. Mostre que a menor distância do ponto (x_1, y_1) a uma reta $Ax + By + C = 0$ é

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

52. Encontre o ponto sobre a hipérbole $xy = 8$ que está mais próximo ao ponto $(3, 0)$.

53. Encontre a menor área possível de um triângulo isósceles que está circunscrito em um círculo de raio r.

54. Encontre o volume do maior cone circular que pode ser inscrito em uma esfera de raio r.

55. No ΔABC, D está em AB, $CD \perp AB$, $|AD| = |BD| = 4$ cm e $|CD| = 5$ cm. Onde estaria o ponto P escolhido em CD para a soma $|PA| + |PB| + |PC|$ ser mínima?

56. Faça o Exercício 55 quando $|CD| = 2$ cm.

57. A velocidade de uma onda de comprimento L em água profunda é

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

onde K e C são constantes positivas conhecidas. Qual é o comprimento da onda que dá a velocidade mínima?

58. Um tanque de armazenamento de metal com volume V deve ser construído com a forma de um cilindro circular reto com um hemisfério em cima. Quais as dimensões que vão exigir a menor quantidade de metal?

59. Uma arena de esportes tem capacidade para 15 mil espectadores sentados. Com o preço do bilhete a \$ 12, a frequência média em um jogo é de 11 mil espectadores. Uma pesquisa de mercado indica que, para cada dólar de redução no preço do bilhete, a média da frequência aumenta em 1 000. Como deve ser estabelecido o preço do bilhete para maximizar o rendimento da venda de entradas?

60. Um fabricante determinou que o custo de fazer x unidades de uma mercadoria é $C(x) = 1\,800 + 25x - 0{,}2x^2 + 0{,}001x^3$ e a função demanda é $p(x) = 48{,}2 - 0{,}03x$.

(a) Faça o gráfico das funções custo e receita e use os gráficos para estimar o nível de produção para o lucro máximo.

(b) Use o cálculo para achar o nível de produção para o lucro máximo.

(c) Estime o nível de produção que minimize o custo médio.

61. Use o método de Newton para achar a raiz da equação $x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ no intervalo $[1, 2]$ com precisão de seis casas decimais.

62. Use o método de Newton para achar todas as raízes da equação $\operatorname{sen} x = x^2 - 3x + 1$ com precisão de seis casas decimais.

63. Use o método de Newton para achar o máximo absoluto da função $f(t) = \cos t + t - t^2$ com precisão de oito casas decimais.

64. Use o roteiro na Seção 4.5 para esboçar o gráfico da curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Use o método de Newton quando for necessário.

65–72 Encontre f.

65. $f'(x) = \cos x - (1 - x^2)^{-1/2}$

66. $f'(x) = 2e^x + \sec x \operatorname{tg} x$

67. $f'(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$

68. $f'(x) = \operatorname{senh} x + 2\cosh x, \quad f(0) = 2$

69. $f'(t) = 2t - 3\operatorname{sen} t, \quad f(0) = 5$

70. $f'(u) = \dfrac{u^2 + \sqrt{u}}{u}, \quad f(1) = 3$

71. $f''(x) = 1 - 6x + 48x^2, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$

72. $f''(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5, \quad f(0) = 2, \quad f(1) = 0$

73–74 Uma partícula se move conforme os seguintes dados. Encontre a posição da partícula.

73. $v(x) = 2t - 1/(1 + t^2), \quad s(0) = 1$

74. $a(t) = \text{sen}\, t + 3 \cos t, \quad s(0) = 0, v(0) = 2$

75. (a) Se $f(x) = 0{,}1e^x + \text{sen}\, x$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$, use um gráfico de f para esboçar um gráfico da primitiva F de f que satisfaça $F(0) = 0$.

(b) Encontre uma expressão para $F(x)$.

(c) Faça o gráfico de F usando a expressão da parte (b). Compare com seu esboço da parte (a).

76. Investigue a família de curvas dada por

$$f(x) = x^4 + x^3 + cx^2$$

Em particular, você deve determinar o valor de transição de c no qual a quantidade de números críticos varia e o valor de transição no qual o número de pontos de inflexão varia. Ilustre as várias possíveis formas com gráficos.

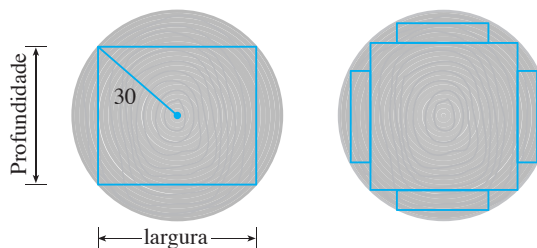
77. Uma caixa é lançada de um helicóptero a 500 m acima do chão. Seu paraquedas não abre, mas ela foi planejada para suportar uma velocidade de impacto de 100 m/s. Ela suportará o impacto ou não?

78. Em uma corrida automobilística ao longo de uma estrada reta, o carro A passou o carro B duas vezes. Demonstre que em algum instante durante a corrida suas acelerações eram iguais. Diga quais as suas hipóteses.

79. Uma viga retangular será cortada de uma tora de madeira com raio de 30 cm.

(a) Mostre que a viga com área da seção transversal máxima é quadrada.

(b) Quatro pranchas retangulares serão cortadas de cada uma das quatro seções da tora que restarão após o corte da viga quadrada. Determine as dimensões das pranchas que terão área da seção transversal máxima.

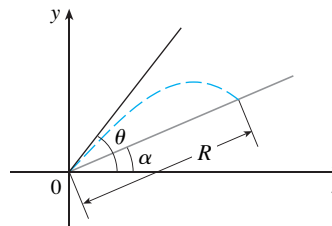
(c) Suponha que a resistência de uma viga retangular seja proporcional ao produto de sua largura e o quadrado de sua profundidade. Encontre as dimensões da viga mais resistente que pode ser cortada de uma tora cilíndrica.

80. Se um projétil for disparado com uma velocidade inicial v em um ângulo de inclinação θ a partir da horizontal, então sua trajetória, desprezando a resistência do ar, é uma parábola

$$y = (\text{tg}\, \theta)x - \frac{g}{2v^2 \cos^2\theta} x^2 \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

(a) Suponha que o projétil seja disparado da base de um plano que está inclinado de um ângulo α, $\alpha > 0$, a partir da horizontal, como mostrado na figura. Mostre que o alcance do projétil, medido no plano inclinado, é dado por

$$R(\theta) = \frac{2v^2 \cos^2\theta\, \text{sen}(\theta - \alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

(b) Determine θ tal que R seja máximo.

(c) Suponha que o plano esteja em um ângulo α *abaixo* da horizontal. Determine o alcance R e o ângulo segundo o qual o projétil deve ser disparado para maximizar R.

81. Mostre que para $x > 0$, temos

$$\frac{x}{1 + x^2} < \text{tg}^{-1}\, x < x$$

82. Esboce o gráfico de uma função f tal que $f'(x) < 0$ para todo x, $f''(x) > 0$ para $|x| > 1$, $f''(x) < 0$ para $|x| < 1$ e $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) + x] = 0$.

PROBLEMAS QUENTES

Um dos mais importantes princípios de resolução de problemas é a *analogia*. Se você está tendo dificuldades em começar a lidar com um problema, é algumas vezes útil começar resolvendo um similar, porém mais simples. O problema a seguir ilustra o princípio. Cubra completamente a solução e tente resolvê-lo primeiro, você mesmo.

EXEMPLO Se x, y e z forem números positivos, demonstre que

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} \geqslant 8$$

SOLUÇÃO O começo deste problema pode ser difícil. (Muitos estudantes o atacaram efetuando a multiplicação no numerador, mas isso somente cria uma confusão.) Vamos tentar pensar em um problema mais simples e parecido. Quando diversas variáveis estão envolvidas, é frequentemente útil pensar em um problema análogo com menos variáveis. No caso presente podemos reduzir o número de variáveis de três para um e demonstrar a desigualdade análoga

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para } x > 0 \tag{1}$$

De fato, se formos capazes de demonstrar (1), então segue a desigualdade desejada, pois

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)\left(\frac{z^2+1}{z}\right) \geqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

A chave para demonstrar (1) está em reconhecer que é uma versão disfarçada de um problema de mínimo. Se fizermos

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

então $f'(x) = 1 - (1/x^2)$, de modo que $f'(x) = 0$ quando $x = 1$. Também, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ e $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Consequentemente, o valor mínimo absoluto de f é $f(1) = 2$. Isso significa que

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para todos os valores de } x$$

e, como anteriormente mencionado, a desigualdade dada segue pela multiplicação.

A desigualdade em (1) pode também ser demonstrada sem cálculo. De fato, se $x > 0$, temos

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \iff x^2+1 \geqslant 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

$$\iff (x-1)^2 \geqslant 0 \qquad \square$$

Como a última desigualdade é obviamente verdadeira, a primeira também o é.

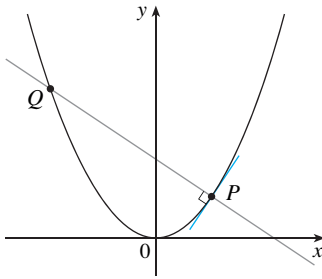
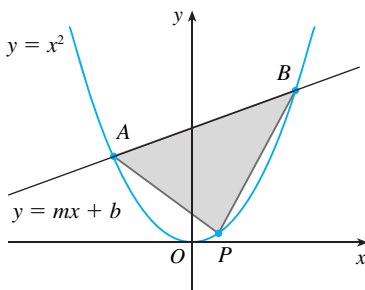
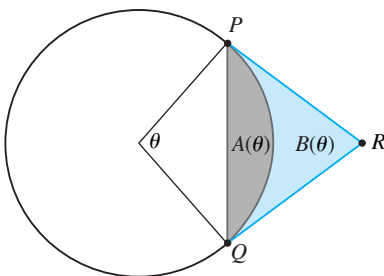
Relembre
O que você aprendeu da solução desse exemplo?
- Para resolver um problema envolvendo diversas variáveis, pode ser útil resolver um problema análogo com somente uma variável.
- Quando tentar demonstrar uma desigualdade, pode ajudar pensá-la como um problema de máximo ou de mínimo.

PROBLEMAS

1. Se um retângulo tiver sua base no eixo x e dois vértices sobre a curva $y = e^{-x^2}$, mostre que o retângulo tem a maior área possível quando os dois vértices estiverem nos pontos de inflexão da curva.

2. Mostre que $|\text{sen } x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ para todo x.

3. Mostre que, para todos os valores positivos de x e y,

$$\frac{e^{x+y}}{xy} \geqslant e^2$$

4. Mostre que, $x^2 y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leqslant 16$ para todos os valores positivos de x e y, tais que $|x| \leqslant 2$ e $|y| \leqslant 2$.

5. Se a, b, c, e d forem constantes tais que

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + \operatorname{sen} bx + \operatorname{sen} cx + \operatorname{sen} dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$$

encontre o valor da soma $a + b + c + d$.

FIGURA PARA O PROBLEMA 9

6. Encontre o ponto sobre a parábola $y = 1 - x^2$ no qual a reta tangente corta do primeiro quadrante o triângulo com a menor área.

7. Encontre o ponto mais alto e o mais baixo sobre a curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.

8. Esboce o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $|x + y| \leqslant e^x$.

9. Se $P(a, a^2)$ for qualquer ponto na parábola $y = x^2$, exceto a origem, seja Q o ponto em que a reta normal intercepta a parábola novamente. Mostre que o segmento de reta PQ tem o comprimento mais curto possível quando $a = 1/\sqrt{2}$.

FIGURA PARA O PROBLEMA 13

10. Para quais valores de c a curva $y = cx^3 + e^x$ tem pontos de inflexão?

11. Determine os valores do número a para os quais a função f não tem ponto crítico:

$$f(x) = (a^2 + a - 6) \cos 2x + (a - 2)x + \cos 1$$

12. Esboce a região do plano que consiste em todos os pontos (x, y) tais que

$$2xy \leqslant |x - y| \leqslant x^2 + y^2$$

13. A reta $y = mx + b$ intercepta a parábola $y = x^2$ nos pontos A e B (veja a figura). Encontre o ponto P sobre o arco AOB da parábola que maximize a área do triângulo PAB.

14. $ABCD$ é um pedaço de papel quadrado com lados de comprimento 1 m. Um quarto de círculo é traçado de B a D com centro em A. O pedaço de papel é dobrado ao longo de EF, com E em AB e F em AD, de tal forma que A caia sobre o quarto de círculo. Determine a área máxima e a mínima que o triângulo AEF pode ter.

15. Para quais números positivos a a curva $y = a^x$ intercepta a reta $y = x$?

16. Para que valores de a é verdade que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x = e$$

FIGURA PARA O PROBLEMA 18

17. Seja $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, onde $a_1, a_2, \ldots, an$ são números reais e n é um inteiro positivo. Se for dado que $|f(x)| \leqslant |\operatorname{sen} x|$ para todo x, mostre que

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$$

18. Um arco de círculo PQ subtende um ângulo central θ como na figura. Seja $A(\theta)$ a área entre a corda PQ e o arco PQ. Seja $B(\theta)$ a área entre as retas tangentes PR, QR e o arco. Encontre

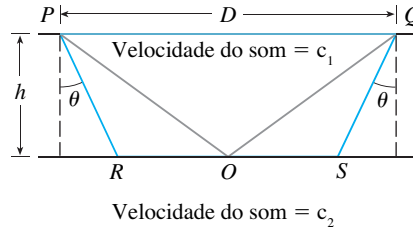
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

19. As velocidades do som c_1 em uma camada superior e c_2 em uma camada inferior de rocha e a espessura h da camada superior podem ser determinadas pela exploração sísmica se a velocidade do som na camada inferior for maior que a velocidade do som na camada superior. Uma carga de dinamite é detonada em um ponto P e os sinais transmitidos são registrados em um ponto Q, o qual está a uma distância D de P. O primeiro sinal leva T_1 segundos para chegar ao ponto Q pela superfície. O próximo

sinal viaja do ponto P ao ponto R, do ponto R para o ponto S na camada inferior e daí para o ponto Q e leva T_2 segundos para fazer este percurso todo. O terceiro sinal é refletido na camada inferior no ponto médio de RS e leva T_3 segundos para chegar em Q.

(a) Escreva T_1, T_2 e T_3 em termos de D, h, c_1, c_2 e θ.

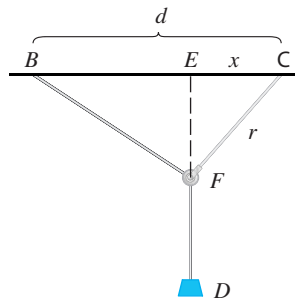
(b) Mostre que T_2 assume o seu valor mínimo em sen $\theta = c_1/c_2$.

(c) Suponha que $D = 1$ km, $T_1 = 0{,}26$ s, $T_2 = 0{,}32$ s, $T_3 = 0{,}34$ s. Ache c_1, c_2 e h.

Observação: os geofísicos usam essa técnica para estudar a estrutura da crosta terrestre, quando fazem prospecção de petróleo ou examinam falhas na estrutura do terreno.

20. Para quais valores de c existe uma reta que intercepta a curva $y = x^4 + cx^3 + 12x^2 - 5x + 2$ em quatro pontos distintos?

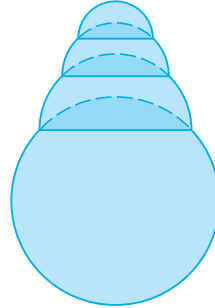
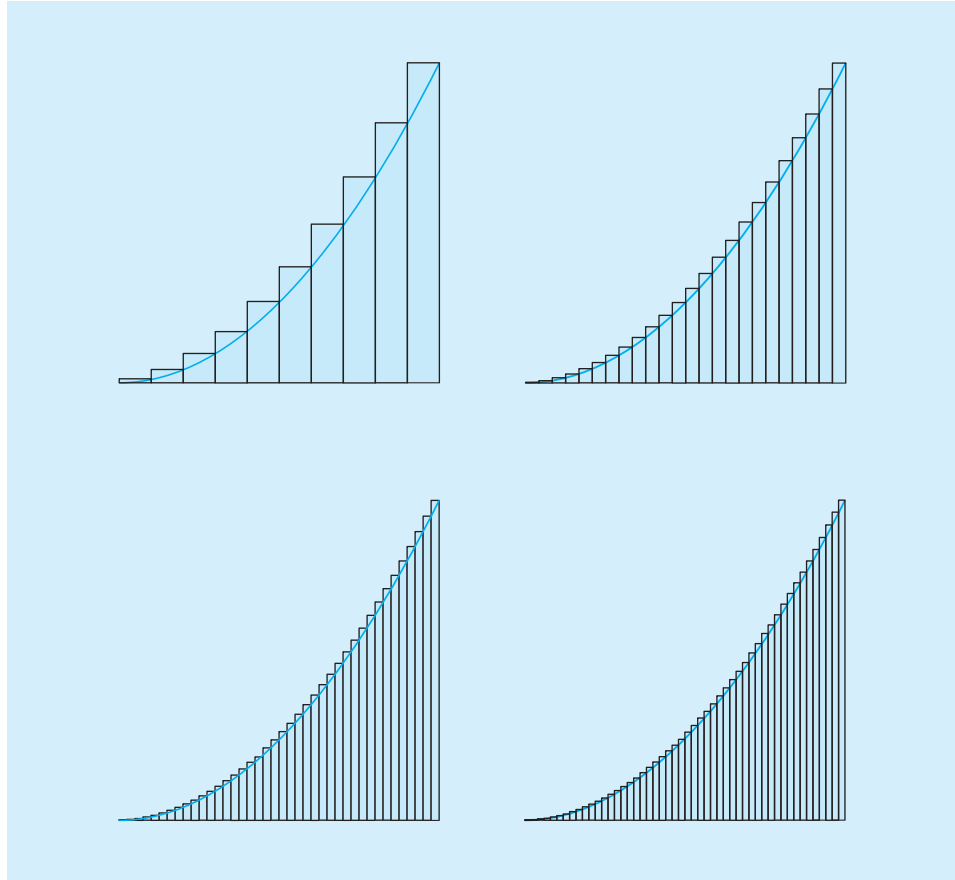
21. Um dos problemas propostos pelo marquês de L'Hôspital em seu livro *Analyse des Infiniment Petits* diz respeito a uma polia que está presa ao teto de um cômodo em um ponto C por uma corda de comprimento r. Em outro ponto B do teto, a uma distância d de C (onde $d > r$), uma corda de comprimento ℓ é amarrada e essa corda passa pela polia em um ponto F e temos presa a ela um peso W. O peso é liberado e chega ao seu ponto de equilíbrio na posição D. L'Hôspital argumentou que esse equilíbrio ocorre quando $|ED|$ é maximizado. Mostre que quando o sistema alcança o equilíbrio, o valor de x é

$$\frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$$

Observe que essa expressão independe de W e ℓ.

22. Dada a uma esfera de raio r, ache a altura da pirâmide de menor volume cuja base é um quadrado e cujas base e faces triangulares são todas tangentes à esfera. E, se a base da pirâmide fosse um polígono com n lados e ângulos iguais? (Use o fato de que o volume da pirâmide é $\frac{1}{3}Ah$, em que A é a área da base.)

23. Suponha que uma bola de neve derrete de maneira que seu volume decresce a uma taxa proporcional a área de sua superfície. Se levar três horas para a bola de neve derreter para a metade de seu volume original, quanto demorará para a bola de neve derreter completamente?

24. Uma bolha hemisférica é colocada sobre uma bolha esférica de raio 1. Uma bolha hemisférica menor é então colocada sobre a primeira bolha. O processo continua até que sejam formados n compartimentos, incluindo a esfera. (A figura mostra o caso para $n = 4$.) Use a indução matemática para demonstrar que a altura máxima de qualquer torre de bolhas com n compartimentos é dada pela expressão $1 + \sqrt{n}$.

5

INTEGRAIS

Para calcular uma área, aproximamos a região por retângulos e fazemos o número de retângulos se tornar grande. A área exata é o limite das somas das áreas destes retângulos.

No Capítulo 2 usamos os problemas de tangente e de velocidade para introduzir a derivada, que é a ideia central do cálculo diferencial. Neste capítulo, começaremos com os problemas de área e de distância e os utilizaremos para formular a ideia de integral definida, que é o conceito básico do cálculo integral. Veremos nos Capítulos 6 e 8 como usar a integral para resolver os problemas relativos a volumes, comprimentos de curvas, predições populacionais, saída de sangue do coração, força sobre um dique, trabalho, excedente de consumo e beisebol, entre muitos outros.

Há uma conexão entre o cálculo integral e o diferencial. O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a integral com a derivada e veremos, neste capítulo, que isso simplifica bastante a solução de muitos problemas.

5.1 ÁREAS E DISTÂNCIAS

■ Agora é um bom momento para ler (ou reler) *Uma Apresentação do Cálculo* (veja a página XXII). Lá, são discutidas as ideias unificadoras do cálculo, e a seção ajuda a colocar em perspectiva de onde saímos e para onde iremos.

Nesta seção vamos descobrir que, na tentativa de encontrar a área sob uma curva ou a distância percorrida por um carro, encontramos o mesmo tipo especial de limite.

O PROBLEMA DA ÁREA

Começamos por tentar resolver o problema da área: achar a área de uma região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a até b. Isso significa que S, ilustrada na Figura 1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geqslant 0$], pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x.

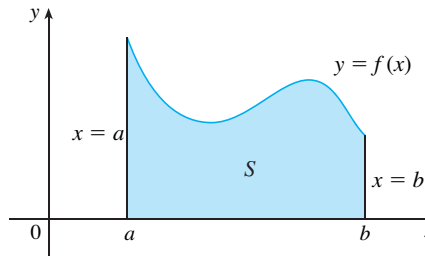
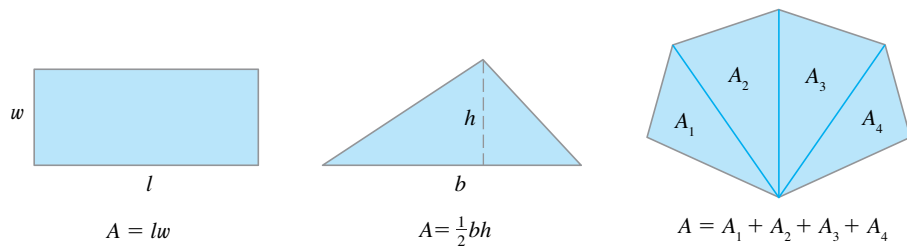



FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Ao tentar resolver o problema da área, devemos nos perguntar: qual o significado da palavra *área*? Essa questão é fácil de ser respondida para regiões com lados retos. Para um retângulo, a área é definida como o produto do comprimento e da largura. A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura. A área de um polígono pode ser encontrada dividindo-o em triângulos (como na Figura 2) e a seguir somando-se as áreas dos triângulos.

FIGURA 2 $A = lw$ $\quad A = \frac{1}{2}bh$ $\quad A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Não é tão fácil, no entanto, encontrar a área de uma região com lados curvos. Temos uma ideia intuitiva de qual é a área de uma região. Mas parte do problema da área é tornar precisa essa ideia intuitiva, dando uma definição exata de área.

Lembre-se de que, ao definir uma tangente, primeiro aproximamos a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e, então, tomamos o limite dessas aproximações. Uma ideia similar será usada aqui para as áreas. Em primeiro lugar, aproximamos a região S utilizando retângulos e depois tomamos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos. Os exemplos a seguir ilustram esse procedimento.

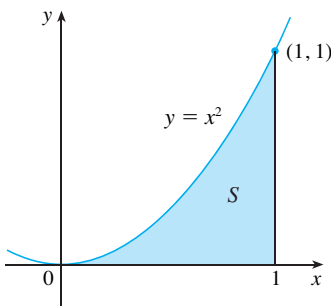



FIGURA 3

EXEMPLO 1 Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

SOLUÇÃO Observamos primeiro que a área de S deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que S seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3 e S_4, traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$, como na Figura 4(a).

(a)

(b)

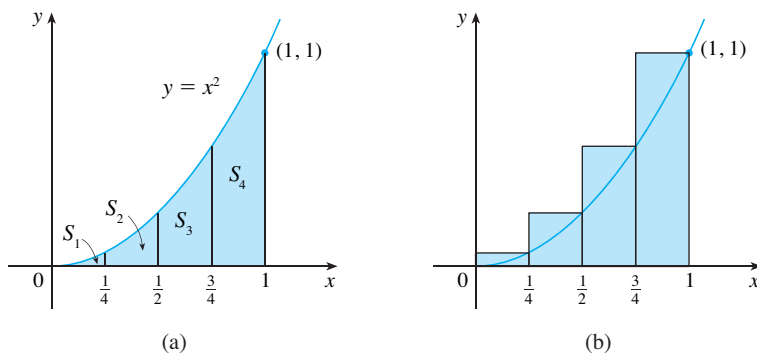



FIGURA 4

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [veja a Figura 4(b)]. Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nas extremidades direitas dos subintervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ e $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Cada um dos retângulos tem largura $\frac{1}{4}$ e as alturas são $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2$ e 1^2. Se chamarmos R_4 a soma das áreas desses retângulos aproximantes, obteremos

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

Da Figura 4(b) vemos que a área A de S é menor que R_4, logo

$$A < 0{,}46875$$

FIGURA 5

Em vez de usar os retângulos na Figura 4(b), poderíamos usar os retângulos menores na Figura 5, cujas alturas seguem os valores de f nas extremidades esquerdas dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.) A soma das áreas desses retângulos aproximantes é

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0{,}21875$$

Vemos que a área de S é maior que L_4; assim, temos estimativas inferior e superior para A:

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875$$

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas. A Figura 6 mostra o que acontece quando dividimos a região S em oito faixas com a mesma largura.

(a) Usando as extremidades esquerdas

(b) Usando as extremidades direitas

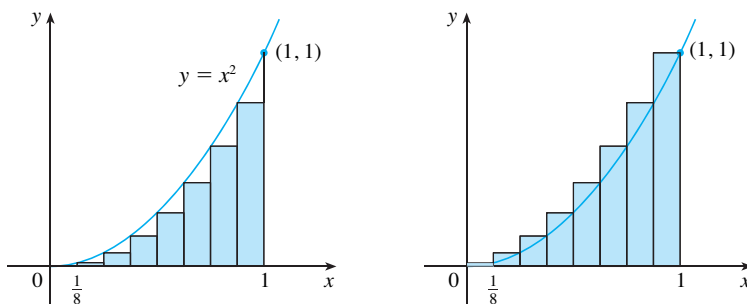



FIGURA 6
Aproximando S por 8 retângulos

Calculando a soma das áreas dos retângulos menores (L_8) e a soma das áreas dos retângulos maiores (R_8), obtemos estimativas inferior e superior melhores para A:

$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375$$

Assim, uma resposta possível para a questão é dizer que a verdadeira área de S está em algum lugar entre 0,2734375 e 0,3984375.

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0.3283500	0,3383500
1 000	0,3328335	0,3338335

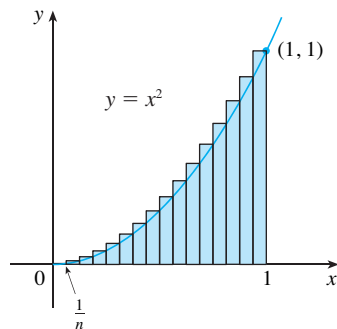
Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas. A tabela na lateral mostra os resultados de cálculos similares (com um computador) usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n). Em particular, vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 1 000 faixas conseguimos estreitar a desigualdade ainda mais: A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: $A \approx 0{,}3333335$. □

Dos valores na tabela parece que R_n aproxima-se de $\frac{1}{3}$ à medida que aumentamos n. Vamos confirmar isso no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Para a região S do Exemplo 1, mostre que a soma das áreas dos retângulos aproximantes superiores tende a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

FIGURA 7

SOLUÇÃO R_n é a soma das áreas dos n retângulos na Figura 7. Cada retângulo tem uma largura $1/n$, e as alturas são os valores da função $f(x) = x^2$ nos pontos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; isto é, as alturas são $(1/n)^2, (2/n)^2, (3n)^2, \ldots, (n/n)^2$. Assim

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

Utilizamos aqui a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$\boxed{1} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Talvez você já tenha visto essa fórmula antes. Ela está demonstrada no Exemplo 5 do Apêndice E.

Substituindo a Fórmula 1 em nossa expressão para R_n, obtemos

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Assim, temos

■ Estamos calculando aqui o limite da sequência $\{R_n\}$. As sequências foram discutidas em *Uma Apresentação do Cálculo* e serão estudadas em detalhes no Capítulo 11, no Volume II. Seus limites são calculados da mesma forma que os limites no infinito (Seção 2.6). Em particular, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$$ □

Pode ser mostrado que as somas aproximantes inferiores também tendem a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

Das Figuras 8 e 9 parece que, à medida que aumentamos n, tanto L_n como R_n tornam-se aproximações cada vez melhores da área de S. Portanto, *definimos* a área A como o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes, isto é,

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

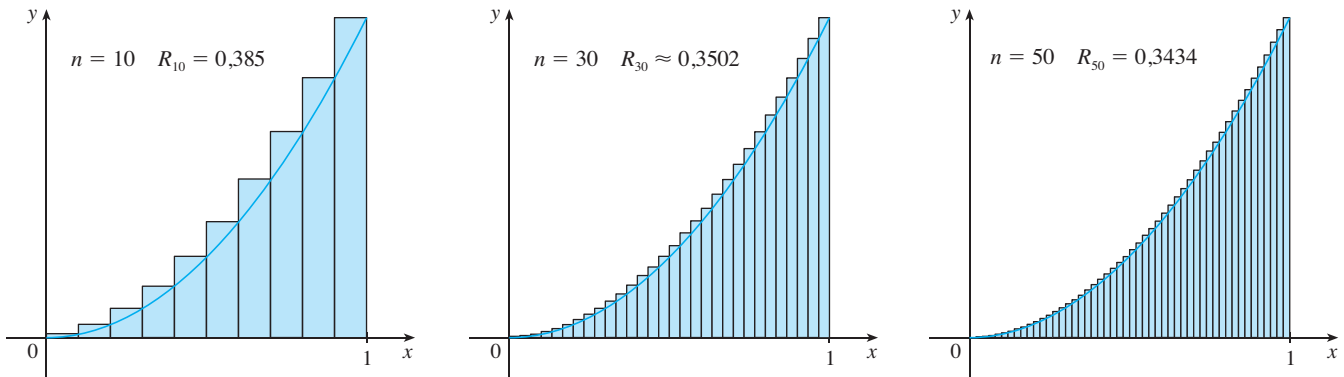
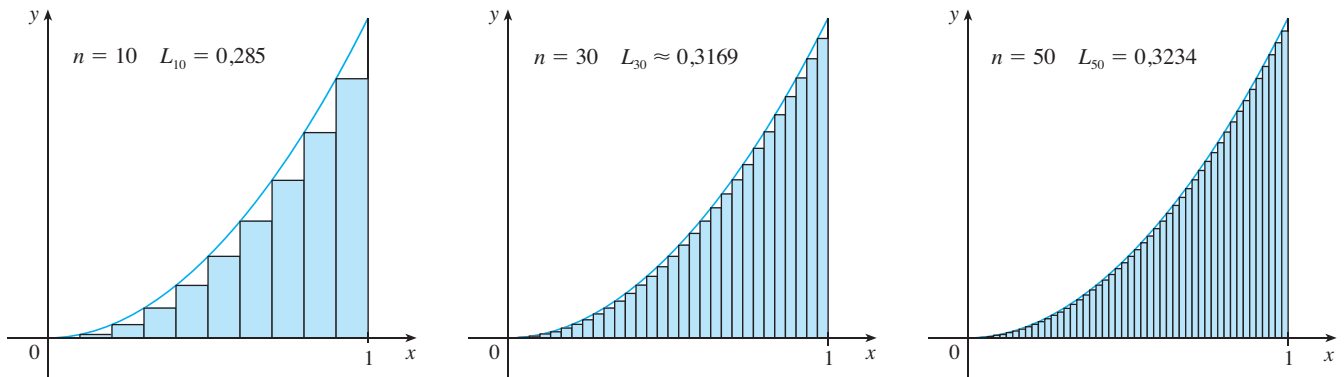



FIGURA 8

FIGURA 9
A área é o número que é menor que todas as somas superiores e maior que todas as somas inferiores

Vamos aplicar a ideia dos Exemplos 1 e 2 para as regiões S mais gerais da Figura 1. Começamos por subdividir S em n faixas $S_1, S_2, ..., S_n$ de igual largura, como na Figura 10.

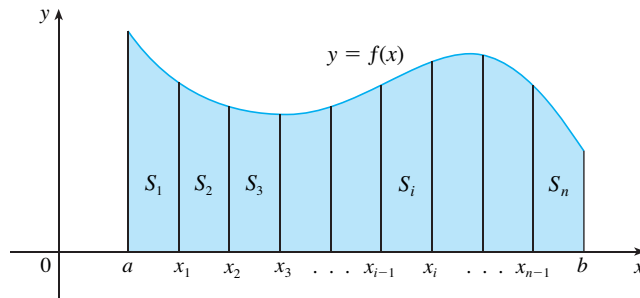



FIGURA 10

A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$; assim, a largura de cada uma das n faixas é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. As extremidades direitas dos subintervalos são

$$x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$
$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$
$$\vdots$$

Vamos aproximar a i-ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f na extremidade direita (veja a Figura 11). Então, a área do i-ésimo retângulo é $f(x_i)\,\Delta x$. O que consideramos intuitivamente como a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos, que é

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

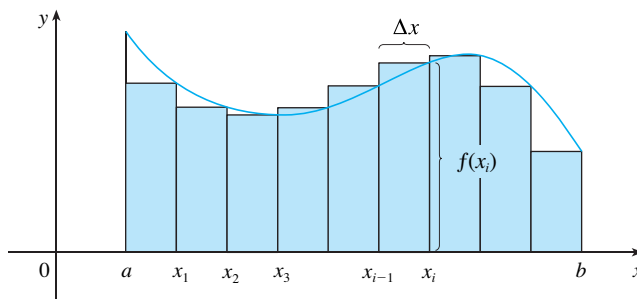



FIGURA 11

A Figura 12 mostra essa aproximação para $n = 2, 4, 8$ e 12. Observe que essa aproximação parece tornar-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, quando $n \to \infty$. Portanto, vamos definir a área A da região S da seguinte forma.

(a) $n = 2$

(b) $n = 4$

(c) $n = 8$

(d) $n = 12$

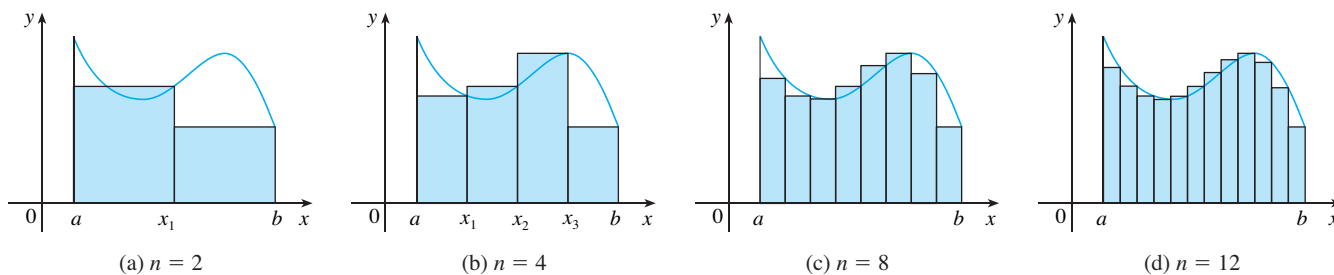



FIGURA 12

2 DEFINIÇÃO A **área** A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]$$

Pode ser demonstrado que o limite na Definição 2 sempre existe, uma vez que estamos supondo que f seja contínua. Pode também ser demonstrado que obteremos o mesmo valor se usarmos as extremidades esquerdas dos subintervalos:

3 $$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x]$$

De fato, em vez de usar as extremidades esquerda ou direita, podemos tomar a altura do i-ésimo retângulo como o valor de f em *qualquer* número x_i^* no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Chamamos os números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ de **pontos amostrais**. A Figura 13 mostra os retângulos aproximantes quando os pontos amostrais não foram escolhidos como as extremidades. Logo, uma expressão mais geral para a área de S é

4 $$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$$

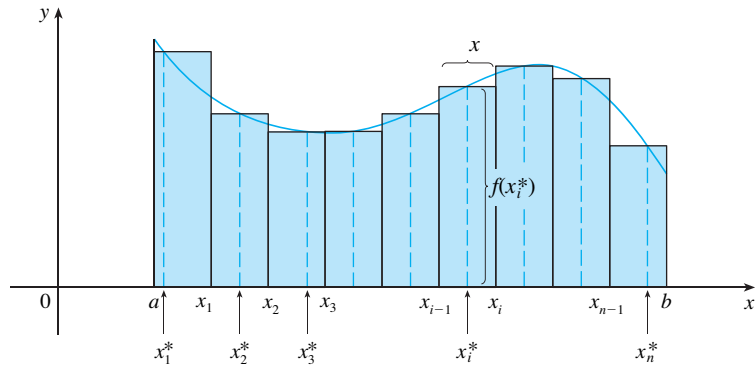



FIGURA 13

Frequentemente usamos a **notação de somatória (notação sigma)** para escrever somas de muitos termos de maneira mais compacta. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

Assim, as expressões para a área nas Equações 2, 3 e 4 podem ser escritas da seguinte forma:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

■ Se você precisar de prática com a notação sigma, olhe os exemplos e tente alguns dos exercícios do Apêndice E.

Também podemos reescrever a Fórmula 1 da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EXEMPLO 3 Seja A a área da região que está sob o gráfico de $f(x) = e^{-x}$ entre $x = 0$ e $x = 2$.
(a) Usando as extremidades direitas, ache uma expressão para A como um limite. Não calcule o limite.
(b) Estime a área, tomando como pontos amostrais os pontos médios e usando quatro e depois dez subintervalos.

SOLUÇÃO

(a) Uma vez que $a = 0$ e $b = 2$, a largura de um subintervalo é

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

logo $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$ e $x_n = 2n/n$. A soma das áreas dos retângulos aproximantes é

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

De acordo com a Definição 2, a área é

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right)$$

Usando a notação de somatória podemos escrever

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

É difícil calcular esse limite diretamente à mão, mas com a ajuda de um SCA isso não é tão complicado (veja o Exercício 24). Na Seção 5.3 seremos capazes de encontrar A mais facilmente usando um método diferente.

FIGURA 14

(b) Com $n = 4$, os subintervalos com mesma largura $\Delta x = 0{,}5$ são $[0, 0{,}5]$, $[0{,}5, 1]$, $[1, 1{,}5]$ e $[1{,}5, 2]$. Os pontos médios desses intervalos são $x_1^* = 0{,}25$, $x_2^* = 0{,}75$, $x_3^* = 1{,}25$, e $x_4^* = 1{,}75$ e a soma das áreas dos quatro retângulos aproximantes (veja a Figura 14) é

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\Delta x \\ &= f(0{,}25)\Delta x + f(0{,}75)\Delta x + f(1{,}25)\Delta x + f(1{,}75)\Delta x \\ &= e^{-0{,}25}(0{,}5) + e^{-0{,}75}(0{,}5) + e^{-1{,}25}(0{,}5) + e^{-1{,}75}(0{,}5) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{-0{,}25} + e^{-0{,}75} + e^{-1{,}25} + e^{-1{,}75}) \approx 0{,}8557 \end{aligned}$$

Logo, uma estimativa para a área é

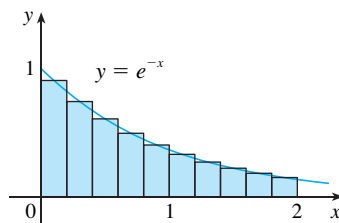
$$A \approx 0{,}8557$$

FIGURA 15

Com $n = 10$, os subintervalos são $[0, 0{,}2]$, $[0{,}2, 0{,}4]$, . . . , $[1{,}8, 2]$ e os pontos médios são $x_1^* = 0{,}1$, $x_2^* = 0{,}3$, $x_3^* = 0{,}5$, . . . , $x_{10}^* = 1{,}9$. Assim,

$$A \approx M_{10} = f(0{,}1)\Delta x + f(0{,}3)\Delta x + f(0{,}5)\Delta x + \cdots + f(1{,}9)\Delta x$$

$$= 0{,}2(e^{-0{,}1} + e^{-0{,}3} + e^{-0{,}5} + \cdots + e^{-1{,}9}) \approx 0.8632$$

Da Figura 15, parece que essa estimativa é melhor que aquela com $n = 4$. □

O PROBLEMA DA DISTÂNCIA

Vamos considerar agora o *problema da distância*: achar a distância percorrida por um objeto durante um certo período de tempo sendo conhecida a velocidade do objeto em todos os instantes. (Em um certo sentido, é o problema inverso do problema da velocidade discutido na Seção 2.1.) Se a velocidade permanece constante, então o problema da distância é de fácil solução através da fórmula

$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}$$

Mas se a velocidade variar, não é tão fácil determinar a distância percorrida. Vamos investigar o problema no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 Suponha que queiramos estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos. A cada 5 segundos registramos a leitura do velocímetro na seguinte tabela:

Tempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (km/h)	27	34	38	46	51	50	45

Para ter o tempo e a velocidade em unidades consistentes, vamos converter a velocidade para metros por segundo (1 km/h = 1 000/3 600 m/s):

Tempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,6	12,8	14,2	13,9	12,5

Durante os cinco primeiros segundos a velocidade não varia muito, logo, podemos estimar a distância percorrida durante esse tempo supondo que a velocidade seja constante. Se tomarmos a velocidade durante aquele intervalo de tempo como a velocidade inicial (7,5 m/s), então obteremos aproximadamente a distância percorrida durante os cinco primeiros segundos:

$$7{,}5\text{m/s} \times 5\text{ s} = 37{,}5\text{ m}$$

Analogamente, durante o segundo intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente constante, e vamos considerá-la quando $t = 5$ s. Assim, nossa estimativa para a distância percorrida de $t = 5$ s até $t = 10$ s é

$$9{,}4\text{m/s} \times 5\text{ s} = 47\text{ m}$$

Adicionando estimativas similares para os outros intervalos de tempo, obtemos uma estimativa para a distância total percorrida:

$$(7{,}5 \times 5) + (9{,}4 \times 5) + (10{,}6 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) = 342\text{ m}$$

Podemos, da mesma forma, usar a velocidade no *fim* de cada intervalo de tempo em vez de no começo como a velocidade constante. Então nossa estimativa fica

$$(9{,}4 \times 5) + (10{,}6 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) + (12{,}5 \times 5) = 367\text{ m}$$

Se quisermos uma estimativa mais precisa, podemos tomar as leituras de velocidade a cada 2 segundos ou até mesmo a cada segundo. □

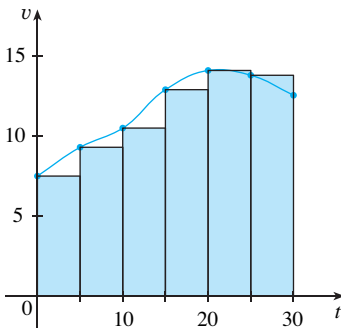



FIGURA 16

Talvez os cálculos no Exemplo 4 o façam lembrar-se das somas usadas anteriormente para estimar as áreas. A similaridade tem explicação quando esboçamos um gráfico da função velocidade do carro na Figura 16 e traçamos os retângulos cujas alturas são as velocidades iniciais para cada intervalo de tempo. A área do primeiro retângulo é $7{,}5 \times 5 = 37{,}5$, que é também a nossa estimativa para a distância percorrida nos primeiros cinco segundos. De fato, a área de cada retângulo pode ser interpretada como uma distância, pois a altura representa a velocidade, a largura e o tempo. A soma das áreas dos retângulos na Figura 16 é $L_6 = 342$, que é nossa estimativa inicial para a distância total percorrida.

Em geral, suponha que o objeto se move com velocidade $v = f(t)$, em que $a \leqslant t \leqslant b$ e $f(t) \geqslant 0$ (logo, o objeto move-se sempre no sentido positivo). Vamos registrar as velocidades nos instantes $t_0(= a), t_1, t_2, ..., t_n(= b)$, de forma que a velocidade seja aproximadamente constante em cada subintervalo. Se esses tempos forem igualmente espaçados, então entre duas leituras consecutivas temos o período de tempo $\Delta t = (b - a)/n$. Durante o primeiro intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente $f(t_0)$ e, portanto, a distância percorrida é de aproximadamente $f(t_0)\Delta t$. Analogamente, a distância percorrida durante o segundo intervalo de tempo é de cerca de $f(t_1)\Delta t$ e a distância total percorrida durante o intervalo de tempo $[a, b]$ é de aproximadamente

$$f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t$$

Se usarmos as velocidades nas extremidades direitas em vez de nas extremidades esquerdas, nossa estimativa para a distância total ficará

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

Quanto maior a frequência com que medimos a velocidade, mais precisa nossa estimativa; logo, parece plausível que a distância *exata* d percorrida seja o *limite* de tal expressão:

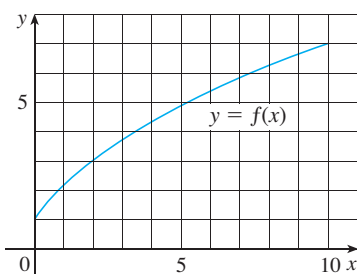
5 $$d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

Veremos na Seção 5.4 que isso é realmente verdadeiro.

Como a Equação 5 tem a mesma forma que nossas expressões para a área nas Equações 2 e 3, segue que a distância percorrida é igual à área sob o gráfico da função velocidade. Nos Capítulos 6 e 8 veremos que outras quantidades de interesse nas ciências naturais e sociais — tais como o trabalho realizado por uma força variável ou a saída de sangue do coração — podem também ser interpretadas como a área sob uma curva. Logo, ao calcular áreas neste capítulo, tenha em mente que elas podem ser interpretadas de várias formas práticas.

5.1 EXERCÍCIOS

1. (a) Lendo os valores do gráfico dado de f, utilize cinco retângulos para encontrar as estimativas inferior e superior para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 10$. Em cada caso, esboce os retângulos que você usar.

(b) Encontre novas estimativas, usando dez retângulos em cada caso.

2. (a) Use seis retângulos para achar estimativas de cada tipo para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 12$.

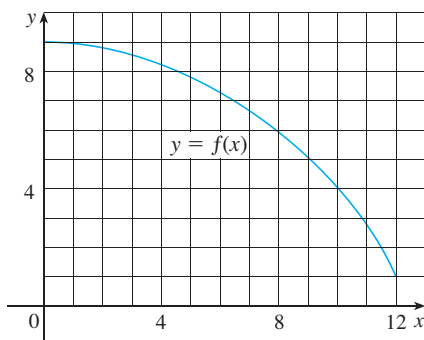
(i) L_6 (pontos amostrais estão nas extremidades esquerdas)

(ii) R_6 (pontos amostrais estão nas extremidades direitas)

(iii) M_6 (pontos amostrais estão nos pontos médios)

(b) L_6 é uma subestimativa ou superestimativa em relação à área verdadeira?

(c) R_6 é uma subestimativa ou superestimativa em relação à área verdadeira?

(d) Entre os números L_6, R_6 e M_6, qual fornece a melhor estimativa? Explique.

3. (a) Estime a área sob o gráfico de $f(x) = \cos x$ de $x = 0$ até $x = \pi/2$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?

(b) Repita a parte (a) usando as extremidades esquerdas.

4. (a) Estime a área sob o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ de $x = 0$ até $x = 4$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?

(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.

5. (a) Estime a área sob o gráfico de $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ até $x = 2$ usando três retângulos aproximantes e extremidades direitas. Então, aperfeiçoe sua estimativa utilizando seis retângulos aproximantes. Esboce a curva e os retângulos aproximantes.

(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.

(c) Repita a parte (a) empregando os pontos médios.

(d) De seus esboços das partes (a), (b) e (c), qual parece ser a melhor estimativa?

6. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = e^{-x^2}$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

(b) Estime a área sob o gráfico de f usando quatro retângulos aproximantes e tomando como pontos amostrais (i) as extremidades direitas e (ii) os pontos médios. Em cada caso, esboce a curva e os retângulos.

(c) Aperfeiçoe suas estimativas da parte (b) usando oito retângulos.

7–8 Com uma calculadora programável (ou um computador), é possível calcular as expressões para a soma das áreas de retângulos aproximantes, mesmo para valores grandes de n, usando *laços*. (Em uma TI use o comando Is>; em uma Casio use Isz; em uma HP ou no BASIC use um *laço* FOR–NEXT.) Calcule a soma das áreas dos retângulos aproximantes utilizando subintervalos iguais e extremidades direitas para $n = 10$, 30 e 50. Então, conjecture o valor exato da área.

7. A região sob $y = x^4$ de 0 até 1

8. A região sob $y = \cos x$ de 0 até $\pi/2$

SCA **9.** Alguns sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam retângulos aproximantes e calculam as somas de suas áreas, pelo menos se x_i^* for uma extremidade esquerda ou direita. (Por exemplo, no Maple use leftbox, rightbox, leftsum e rightsum.)

(a) Se $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, ache as somas esquerda e direita para $n = 10$, 30 e 50.

(b) Ilustre fazendo o gráfico dos retângulos da parte (a).

(c) Mostre que a área exata sob f está entre 0,780 e 0,791.

SCA **10.** (a) Se $f(x) = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, use os comandos discutidos no Exercício 9 para encontrar as somas esquerda e direita para $n = 10, 30$ e 50.

(b) Ilustre fazendo o gráfico dos retângulos da parte (a).

(c) Mostre que a área exata sob f está entre 2,50 e 2,59.

11. A velocidade de um corredor aumenta regularmente durante os três primeiros segundos de uma corrida. Sua velocidade em intervalos de meio segundo é dada em uma tabela. Ache as estimativas superior e inferior para a distância que ele percorreu durante esses três segundos.

t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v (m/s)	0	1,9	3,3	4,5	5,5	5,9	6,2

12. A leitura do velocímetro de uma motocicleta em intervalos de 12 segundos é mostrada na tabela a seguir.

(a) Estime a distância percorrida pela motocicleta durante esse período, usando a velocidade no começo dos intervalos de tempo.

(b) Dê outra estimativa utilizando a velocidade no fim dos intervalos de tempo.

(c) As estimativas feitas nas partes (a) e (b) são estimativas superior e inferior? Explique.

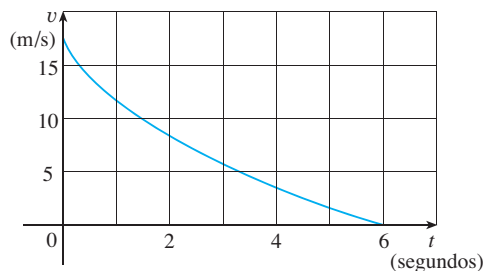
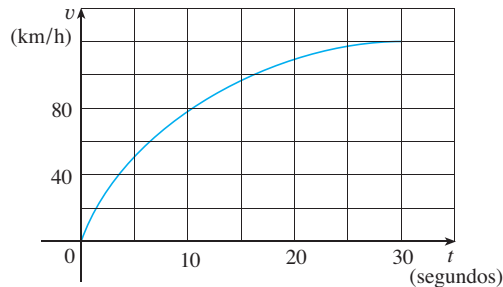
t (s)	0	12	24	36	48	60
v (m/s)	9,1	8,5	7,6	6,7	7,3	8,2

13. O óleo vaza de um tanque a uma taxa de $r(t)$ litros por hora. A taxa decresce à medida que o tempo passa e os valores da taxa em intervalos de duas horas são mostrados na tabela a seguir. Ache estimativas superior e inferior para a quantidade total que vazou.

t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (L/h)	8,7	7,6	6,8	6,2	5,7	5,3

14. Quando estimamos distâncias a partir dos dados da velocidade, algumas vezes é necessário usar tempos $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ que não estão igualmente espaçados. Podemos ainda estimar as distâncias usando os períodos de tempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por exemplo, em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo propósito era instalar o satélite de comunicação Intelsat. A tabela, fornecida pela NASA, mostra os dados da velocidade do ônibus entre o lançamento e a entrada em funcionamento dos foguetes auxiliares. Use estes dados para estimar a altura acima da superfície da terra do *Endeavour* 62 segundos depois do lançamento.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56
Fim da manobra de inclinação	15	97
Regulador de pressão a 89%	20	136
Regulador de pressão a 67%	32	226
Regulador de pressão a 104%	59	404
Pressão dinâmica máxima	62	440
Separação dos foguetes auxiliares	125	1 265

15. O gráfico da velocidade de um carro freando é mostrado. Use-o para estimar a distância percorrida pelo carro enquanto os freios estão sendo aplicados.

16. O gráfico da velocidade de um carro em aceleração a partir do repouso até uma velocidade de 120 km/h em um período de 30 segundos é mostrado. Estime a distância percorrida durante esse período.

17–19 Use a Definição 2 para achar uma expressão para a área sob o gráfico de f como um limite. Não calcule o limite.

17. $f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 16$

18. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad 3 \leqslant x \leqslant 10$

19. $f(x) = x \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2$

20–21 Determine uma região cuja área seja igual ao limite dado. Não calcule o limite.

20. $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} + \left(5 + \frac{2i}{n}\right)^{10}$

21. $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \operatorname{tg} \frac{i\pi}{4n}$

22. (a) Utilize a Definição 2 para achar uma expressão para a área sob a curva $y = x^3$ de 0 a 1 como um limite.

(b) A fórmula a seguir para a soma dos cubos dos primeiros n inteiros está demonstrada no Apêndice E. Use-a para calcular o limite da parte (a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

SCA **23.** (a) Expresse a área sob a curva $y = x^5$ de 0 até 2 como um limite.

(b) Use um sistema de computação algébrica para encontrar a soma em sua expressão da parte (a).

(c) Calcule o limite da parte (a).

SCA **24.** Encontre a área exata da região sob o gráfico de $y = e^{-x}$ de 0 até 2 usando um sistema de computação algébrica para calcular a soma e então o limite no Exemplo 3(a). Compare sua resposta com a estimativa obtida no Exemplo 3(b).

SCA **25.** Encontre a área exata sob a curva cosseno $y = \cos x$ de $x = 0$ até $x = b$, onde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use um sistema de computação algébrica para calcular a soma e o limite.) Em particular, qual é a área se $b = \pi/2$?

26. (a) Seja A_n a área de um polígono com n lados iguais inscrito em um círculo com raio r. Dividindo o polígono em n triângulos congruentes com ângulo central $2\pi/n$ mostre que

$$A_n = \tfrac{1}{2} nr^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$. [*Sugestão*: Use a Equação 3.3.2.]

5.2 A INTEGRAL DEFINIDA

Vimos na Seção 5.1 que um limite da forma

$$\boxed{1} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$$

aparece quando calculamos uma área. Vimos também que ele aparece quando tentamos achar a distância percorrida por um objeto. Resulta que esse mesmo tipo de limite ocorre em uma grande variedade de situações, mesmo quando f não é necessariamente uma função positiva. Nos Capítulos 6 e 8 veremos que os limites da forma (1) também surgem no processo de encontrar o comprimento de curvas, volumes de sólidos, centros de massas, forças por causa da pressão da água e trabalho, como também em outras quantidades. Daremos, portanto, a esse tipo de limite um nome e notação especiais.

2 **DEFINIÇÃO DE INTEGRAL DEFINIDA** Se f é uma função contínua definida em $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0\ (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n\ (= b)$ as extremidades desses subintervalos, escolhemos os **pontos amostrais** x_1^* , x_2^* , ..., x_n^* nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de** f **de** a **a** b é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

desde que este limite exista. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$.

O significado exato do limite que define a integral é o seguinte:

Para todo número $\varepsilon > 0$ existe um inteiro N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \right| < \varepsilon$$

para todo inteiro $n > N$ e toda escolha de x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$.

OBS. 1 O símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz e é denominado **sinal de integral**. Ele é um S alongado e foi assim escolhido porque uma integral é um limite de somas. Na no-

tação $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ é chamado **integrando**, a e b são ditos **limites de integração**, a é o **limite inferior**, b, o **limite superior**, e o símbolo dx indica simplesmente que a variável independente é x; $\int_a^b f(x)\,dx$ é todo um símbolo. O processo de calcular uma integral é conhecido como **integração**.

OBS. 2 A integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número, não depende de x. De fato, em vez de x podemos usar qualquer outra letra sem mudar o valor da integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

OBS. 3 A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

que ocorre na Definição 2 é chamada **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866). Assim, a Definição 2 diz que a integral definida de uma função integrável pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado por uma soma de Riemann.

Sabemos que se f for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes (veja a Figura 1). Comparando a Definição 2 com a definição de área da Seção 5.1, vemos que a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b (veja a Figura 2).

RIEMANN

Bernhard Riemann fez seu doutorado sob a orientação do legendário Gauss na Universidade de Göttingen e lá permaneceu para lecionar. Gauss, que não tinha o hábito de elogiar outros matemáticos, referiu-se a Riemann como "uma mente criativa, ativa e verdadeiramente matemática, e de uma originalidade gloriosamente fértil". A Definição 2 de integral que usamos se deve a Riemann. Ele também fez grandes contribuições para a teoria de funções de variáveis complexas, física-matemática, teoria dos números e fundamentos da geometria. Os conceitos mais amplos de espaço e geometria de Riemann favoreceriam, 50 anos mais tarde, o desenvolvimento da teoria geral da relatividade de Einstein. Riemann, que nunca teve boa saúde, morreu de tuberculose aos 39 anos.

FIGURA 1
Se $f(x) \geqslant 0$, a soma de Riemann $\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ é a soma de áreas de retângulos

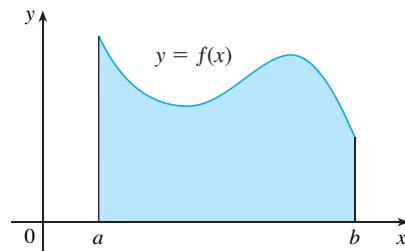



FIGURA 2
Se $f(x) \geqslant 0$, a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b

Se f assumir valores positivos e negativos, como na Figura 3, então a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e do *oposto* das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x (as áreas dos retângulos cinza menos as áreas dos retângulos azuis). Quando tomamos o limite dessas somas de Riemann, obtemos a situação ilustrada na Figura 4. Uma integral definida pode ser interpretada como **área resultante**, isto é, a diferença das áreas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

em que A_1 é a área da região acima do eixo x e abaixo do gráfico de f, e A_2 é a área da região abaixo do eixo x e acima do gráfico de f.

FIGURA 3
$\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ é uma aproximação para área resultante

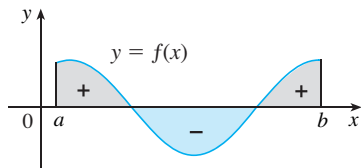



FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\,dx$ é a área resultante

OBS. 4 Embora tenhamos definido $\int_a^b f(x)\,dx$ dividindo $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento, há situações nas quais é vantajoso trabalhar com intervalos de comprimentos diferentes. Por exemplo, no Exercício 14 da Seção 5.1, a NASA forneceu dados de velocidade em instantes que não são igualmente espaçados, mas mesmo assim fomos capazes de estimar a distância percorrida. E existem métodos para a integração numérica que aproveitam os subintervalos desiguais.

Se os comprimentos dos subintervalos forem $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, teremos de garantir que todos esses comprimentos tendem a 0 no processo de limite. Isso acontece se o maior comprimento, max Δx_i, tender a 0. Portanto, nesse caso a definição de integral definida fica

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

OBS. 5 Definimos a integral definida para uma função integrável, mas nem todas as funções são integráveis (veja os Exercícios 67-68). O teorema seguinte mostra que a maioria das funções que ocorrem comumente é de fato integrável. Ele é demonstrado em cursos mais avançados.

3 TEOREMA Se f for contínua em $[a, b]$, ou tiver apenas um número finito de descontinuidades de saltos, então f é integrável em $[a, b]$; ou seja, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Se f for integrável em $[a, b]$, então o limite na Definição 2 existe e dá o mesmo valor não importa como escolhamos os pontos amostrais x_i^*. Para simplificar o cálculo da integral, com frequência tomamos como pontos amostrais as extremidades direitas. Então, $x_i^* = x_i$ e a definição de integral se simplifica como a seguir.

4 TEOREMA Se f for integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

em que $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i\Delta x$

EXEMPLO 1 Expresse

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x$$

como uma integral no intervalo $[0, \pi]$.

SOLUÇÃO Comparando o limite dado com o limite da Teorema 4, vemos que eles são idênticos se escolhermos $f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x$. São dados $a = 0$ e $b = \pi$. Temos, portanto, pelo Teorema 4,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x = \int_0^\pi (x^3 + x \operatorname{sen} x)dx \quad \square$$

Mais tarde, quando aplicarmos a integral definida a situações físicas, será importante reconhecer os limites de somas como integrais, como fizemos no Exemplo 1. Quando Leibniz escolheu a notação para a integral, ele optou por ingredientes que lembrassem o processo de limite. Em geral, quando escrevemos

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

substituímos $\lim \sum$ por $\int$, x_i^* por x e Δx por dx.

CÁLCULO DE INTEGRAIS

Quando usamos a definição para calcular uma integral definida, precisamos saber como trabalhar com somas. As três equações a seguir dão fórmulas para as somas de potências de inteiros positivos. A Equação 5 talvez lhe seja familiar de um curso de álgebra. As Equações 6 e 7 foram discutidas na Seção 5.1 e estão demonstradas no Apêndice E.

5 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7 $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

As fórmulas remanescentes são regras simples para trabalhar com a notação somatória:

■ As Fórmulas 8-11 são demonstradas escrevendo cada lado na forma expandida. O lado esquerdo da Equação 9 é

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$

O lado direito é

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Eles são iguais pela propriedade distributiva. As outras fórmulas estão discutidas no Apêndice E.

8 $$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

9 $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

10 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

11 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

EXEMPLO 2

(a) Calcule a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$ tomando como pontos amostrais as extremidades direitas e $a = 0$, $b = 3$ e $n = 6$.

(b) Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUÇÃO

(a) Com $n = 6$, o comprimento dos intervalos é

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

e as extremidades direitas são $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1{,}0$, $x_3 = 1{,}5$, $x_4 = 2.0$, $x_5 = 2{,}5$ e $x_6 = 3{,}0$. Logo, a soma de Riemann é

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x$$

$$= f(0{,}5)\Delta x + f(1{,}0)\Delta x + f(1{,}5)\Delta x + f(2{,}0)\Delta x + f(2{,}5)\Delta x + f(3{,}0)\Delta x$$

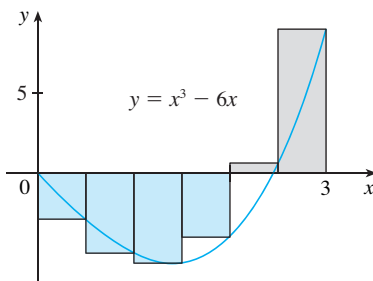
$$= \tfrac{1}{2}(-2{,}875 - 5 - 5{,}625 - 4 + 0{,}625 + 9)$$

$$= -3{,}9375$$

FIGURA 5

Observe que f não é uma função positiva e, portanto, a soma de Riemann não representa uma soma de áreas de retângulos. Mas ela representa a soma das áreas dos retângulos cinza (acima do eixo x) menos a soma das áreas dos retângulos azuis (abaixo do eixo x) na Figura 5.

(b) Com n subintervalos, temos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Assim, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$ e, em geral, $x_i = 3i/n$. Uma vez que estamos utilizando as extremidades direitas, podemos usar a Equação 3:

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

■ Na soma, n é uma constante (ao contrário de i), de modo que podemos mover $3/n$ para frente do sinal de $\sum$.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \qquad \text{(Equação 8 com } c = 3/n\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right] \qquad \text{(Equações 11 e 9)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right\} \qquad \text{(Equações 7 e 5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6{,}75$$

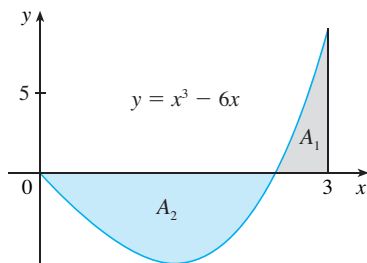



FIGURA 6
$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6{,}75$

Essa integral não pode ser interpretada como uma área, pois f assume valores positivos e negativos. Porém, ela pode ser interpretada como a diferença de áreas $A_1 - A_2$, em que A_1 e A_2 estão na Figura 6.

A Figura 7 ilustra o cálculo mostrando os termos positivos e negativos na soma de Riemann direita R_n para $n = 40$. Os valores na tabela mostram as somas de Riemann tendendo ao valor exato da integral, $-6{,}75$, quando $n \to \infty$.

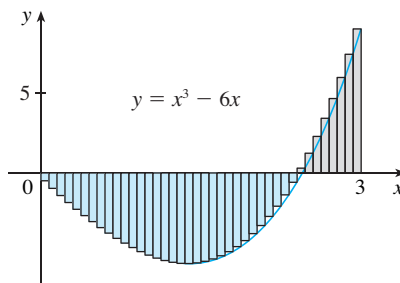



FIGURA 7
$R_n \approx -6{,}3998$

n	R_n
40	$-6{,}3998$
100	$-6{,}6130$
500	$-6{,}7229$
1000	$-6{,}7365$
5000	$-6{,}7473$

□

Um método muito mais simples para o cálculo da integral do Exemplo 2 será dado na Seção 5.3.

EXEMPLO 3

■ Como $f(x) = e^x$ é positiva, a integral no Exemplo 3 representa a área mostrada na Figura 8.

(a) Escreva uma expressão para $\int_1^3 e^x\,dx$ como um limite de somas.
(b) Use um SCA para calcular a expressão.

SOLUÇÃO

(a) Temos aqui $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$ e

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2}{n}$$

FIGURA 8

Logo $x_0 = 1, x_1 = 1 + 2/n, x_2 = 1 + 4/n, x_3 = 1 + 6/n$ e

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

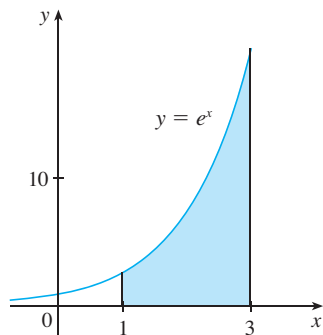
Do Teorema 4, obtemos

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1 + 2i/n}$$

(b) Se utilizarmos um SCA para calcular a soma e simplificar, obteremos

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1 + 2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

■ Um SCA é capaz de encontrar uma expressão explícita para essa soma, pois ela é uma série geométrica. O limite pode ser encontrado usando a Regra de L'Hôspital.

Agora usamos o SCA para calcular o limite:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

Na próxima seção, aprenderemos um método muito mais fácil para calcular integrais. □

EXEMPLO 4 Calcule as integrais a seguir interpretando cada uma em termos de áreas.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ (b) $\int_0^3 (x - 1)dx$

SOLUÇÃO

FIGURA 9

(a) Uma vez que $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, podemos interpretar essa integral como a área sob a curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ de 0 até 1. Mas, uma vez que $y^2 = 1 - x^2$, temos $x^2 + y^2 = 1$, o que mostra que o gráfico de f é o quarto de círculo de raio 1 na Figura 9. Portanto

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi\,(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

(Na Seção 7.3 seremos capazes de *demonstrar* que a área de um círculo de raio r é πr^2.)

(b) O gráfico de $y = x - 1$ é a reta com inclinação 1 mostrada na Figura 10. Calculamos a integral como a diferença das áreas de dois triângulos:

$$\int_0^3 (x - 1)dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2 \cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1{,}5$$

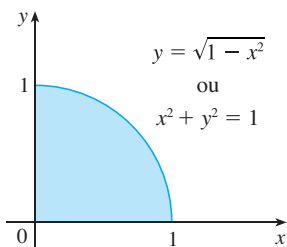
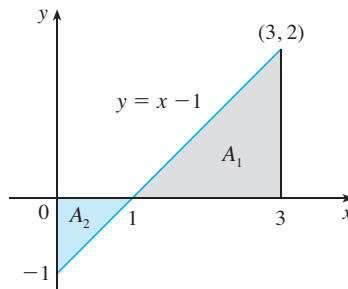



FIGURA 10

□

A REGRA DO PONTO MÉDIO

Frequentemente escolhemos o ponto amostral x_i^* como a extremidade direita do i-ésimo intervalo, pois isso é conveniente para o cálculo do limite. Porém, se o propósito for encontrar uma *aproximação* para uma integral, é geralmente melhor escolher x_i^* como o ponto médio do intervalo, o qual denotamos por $\bar{x}_i$. Qualquer soma de Riemann é uma aproximação para uma integral, mas se usarmos os pontos médios obteremos a seguinte aproximação.

REGRA DO PONTO MÉDIO

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x = \Delta x[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

onde $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

e $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{ponto médio de } [x_{i-1}, x_i]$$

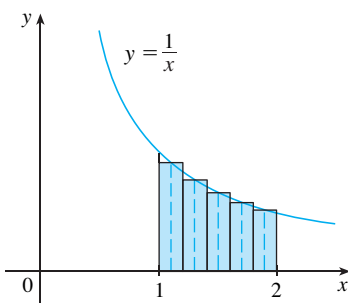
EXEMPLO 5 Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para aproximar $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUÇÃO As extremidades dos cinco subintervalos são 1, 1,2, 1,4, 1,6, 1,8 e 2,0, portanto, os pontos médios são 1,1, 1,3, 1,5, 1,7 e 1,9. O comprimento dos subintervalos é $\Delta x = (2-1)/5 = \frac{1}{5}$, de modo que a Regra do Ponto Médio dá

FIGURA 11

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,9}\right)$$

$$\approx 0,691908$$

Uma vez que $f(x) = 1/x > 0$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, a integral representa uma área, e a aproximação dada pela Regra do Ponto Médio é a soma das áreas dos retângulos mostrados na Figura 11. □

Por ora, não sabemos quão precisa é a aproximação do Exemplo 5, mas na Seção 7.7 vamos aprender um método para estimar o erro envolvido no uso da Regra do Ponto Médio. Nesta parte, discutiremos outros métodos de aproximação de integrais definidas.

Se aplicarmos a Regra do Ponto Médio à integral no Exemplo 2, obteremos o que está mostrado na Figura 12. A aproximação $M_{40} \approx -6,7563$ está muito mais perto do valor verdadeiro $-6,75$ do que a aproximação pela extremidade direita, $R_{40} \approx -6,3998$, mostrada na Figura 7.

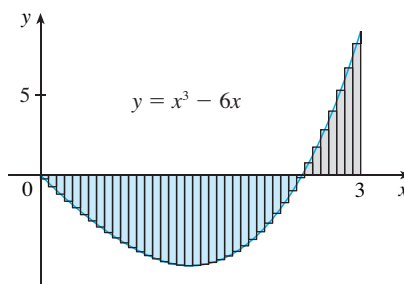



FIGURA 12
$M_{40} \approx -6,7563$

PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

Quando definimos a integral definida $\int_a^b f(x)dx$, implicitamente assumimos que $a < b$. Mas a definição como o limite de somas de Riemann faz sentido mesmo que $a > b$. Observe que se invertermos a e b, então Δx mudará de $(b - a)/n$ para $(a - b)/n$. Portanto

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Se $a = b$, então $\Delta x = 0$, e

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Vamos desenvolver agora algumas propriedades básicas das integrais que nos ajudarão a calcular as integrais de forma mais simples. Vamos supor que f e g sejam funções contínuas.

FIGURA 13
$\int_a^b c\, dx = c(b - a)$

PROPRIEDADES DA INTEGRAL

1. $\int_a^b c\, dx = c(b - a)$, onde c é qualquer constante
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
3. $\int_a^b cf(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$, onde c é qualquer constante
4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$

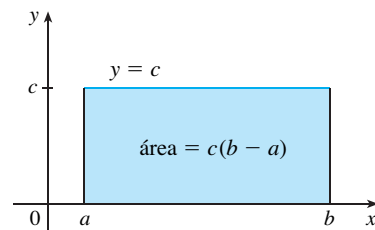
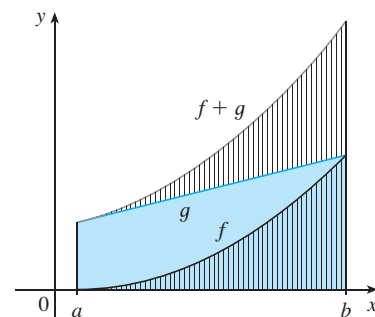



FIGURA 14
$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

A Propriedade 1 diz que a integral de uma função constante, $f(x) = c$, é a constante vezes o comprimento do intervalo. Se $c > 0$ e $a < b$, isto é esperado, pois $c(b - a)$ é a área do retângulo sombreado na Figura 13.

A Propriedade 2 diz que a integral de uma soma é a soma das integrais. Para as funções positivas, isso diz que a área sob $f + g$ é a área sob f mais a área sob g. A Figura 14 nos ajuda a entender por que isto é verdadeiro: em vista de como funciona a adição gráfica, os segmentos de reta vertical correspondentes têm a mesma altura.

Em geral, a Propriedade 2 decorre do Teorema 4 e do fato de que o limite de uma soma é a soma dos limites:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

■ A Propriedade 3 parece intuitivamente razoável, pois sabemos que multiplicar uma função por um número positivo c expande ou comprime verticalmente seu gráfico por um fator c. Logo, expande ou comprime cada retângulo aproximante por um fator c, e, portanto, tem por efeito multiplicar a área por c.

A Propriedade 3 pode ser demonstrada de forma análoga e diz que a integral de uma constante vezes uma função é a constante vezes a integral da função. Em outras palavras, uma constante (mas *somente* uma constante) pode ser movida para a frente do sinal de integração. A Propriedade 4 é demonstrada escrevendo $f - g = f + (-g)$ e usando as Propriedades 2 e 3 com $c = -1$.

EXEMPLO 6 Use as propriedades das integrais para calcular $\int_0^1 (4 + 3x^2)\, dx$.

SOLUÇÃO Usando as Propriedades 2 e 3 das integrais, temos

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\, dx = \int_0^1 4\, dx + \int_0^1 3x^2\, dx = \int_0^1 4\, dx + 3\int_0^1 x^2\, dx$$

Sabemos da Propriedade 1 que

$$\int_0^1 4\,dx = 4(1 - 0) = 4$$

e encontramos no Exemplo 2 da Seção 5.1 que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Logo

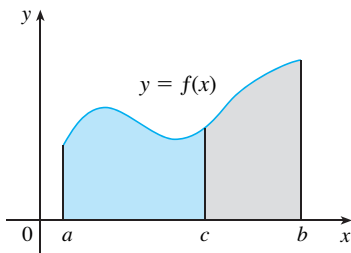
$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= 4 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 5 \qquad \square$$

A propriedade a seguir nos diz como combinar integrais da mesma função em intervalos adjacentes:

FIGURA 15

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Isto não é fácil de ser demonstrado em geral, mas para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $a < c < b$ a Propriedade 5 pode ser vista a partir da interpretação geométrica na Figura 15: a área sob $y = f(x)$ de a até c mais a área de c até b é igual à área total de a até b.

EXEMPLO 7 Se $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ e $\int_0^8 f(x)\,dx = 12$, encontre $\int_8^{10} f(x)\,dx$.

SOLUÇÃO Pela Propriedade 5 temos

$$\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

logo,
$$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^8 f(x)\,dx = 17 - 12 = 5 \qquad \square$$

Observe que as Propriedades 1–5 são verdadeiras se $a < b$, $a = b$ ou $a > b$. As propriedades a seguir, nas quais comparamos os tamanhos de funções e os de integrais, são verdadeiras somente se $a \leqslant b$.

PROPRIEDADES COMPARATIVAS DA INTEGRAL

6. Se $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

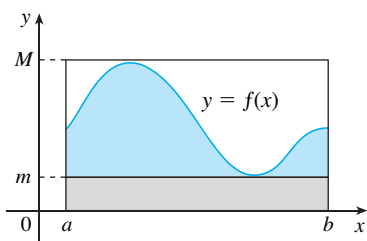
7. Se $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

Se $f(x) \geqslant 0$, então $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área sob o gráfico de f, logo a interpretação geométrica da Propriedade 6 é simplesmente que as áreas são positivas. Mas a propriedade pode ser demonstrada a partir da definição de integral (Exercício 64). A Propriedade 7 diz que uma função maior tem uma integral maior. Ela segue das Propriedades 6 e 4, pois $f - g \geqslant 0$.

FIGURA 16

A Propriedade 8 está ilustrada na Figura 16 para o caso onde $f(x) \geqslant 0$. Se f for contínua, poderemos tomar m e M como o máximo e o mínimo absolutos de f no intervalo $[a, b]$. Nesse caso, a Propriedade 8 diz que a área sob o gráfico de f é maior que a área do retângulo com altura m e menor que a área do retângulo com altura M.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 8 Uma vez que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, a Propriedade 7 nos dá

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

Usando a Propriedade 1 para calcular a integral do lado esquerdo e do lado direito, obtemos

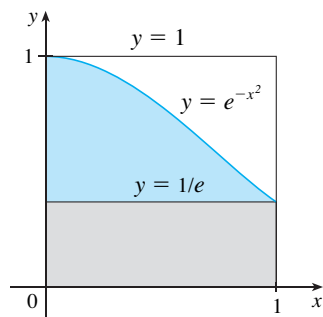
$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a) \qquad \square$$

A Propriedade 8 é útil quando tudo o que queremos é uma estimativa grosseira do tamanho de uma integral sem nos preocupar com o uso da Regra do Ponto Médio.

FIGURA 17

EXEMPLO 8 Use a Propriedade 8 para estimar o valor de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(x) = e^{-x^2}$ é uma função decrescente no intervalo $[0, 1]$, seu máximo absoluto é $M = f(0) = 1$ e seu mínimo absoluto é $m = f(1) = e^{-1}$. Assim, usando a Propriedade 8,

$$e^{-1}(1 - 0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1 - 0)$$

ou

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Como $e^{-1} \approx 0{,}3679$, podemos escrever

$$0{,}367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$ □

O resultado do Exemplo 8 é ilustrado na Figura 17. A integral é maior que a área do retângulo inferior e menor que a área do quadrado.

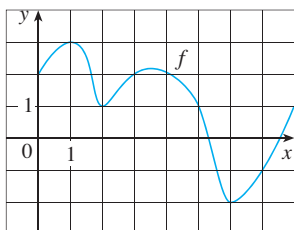
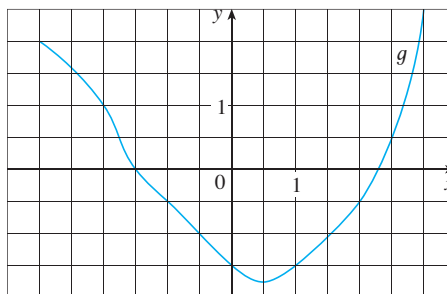
5.2 EXERCÍCIOS

1. Calcule a soma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $2 \leqslant x \leqslant 14$, com quatro subintervalos, tomando os pontos amostrais como as extremidades direitas. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.

2. Se $f(x) = \ln x - 1$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, calcule a soma de Riemann com $n = 6$, tomando como pontos amostrais as extremidades esquerdas. (Dê sua resposta correta até a sexta casa decimal.) O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

3. Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leqslant x \leqslant 6$, calcule a soma de Riemann com $n = 5$ correta até a sexta casa decimal, tomando como pontos amostrais os pontos médios. O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

4. (a) Ache a soma de Riemann para $f(x) = \text{sen}\, x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, com seis termos, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. (Dê sua resposta correta até a sexta casa decimal.) Explique o que representa a soma de Riemann com a ajuda de um esboço.
(b) Repita a parte (a) tomando como pontos amostrais os pontos médios.

5. É dado o gráfico de uma função f. Estime $\int_0^8 f(x)\,dx$ utilizando quatro subintervalos com (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios.

6. O gráfico de g é apresentado. Estime $\int_{-3}^3 g(x)\,dx$ com seis subintervalos usando (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios.

7. Uma tabela de valores de uma função crescente f é dada. Use a tabela para encontrar uma estimativa inferior e superior para $\int_0^{25} f(x)\,dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	−42	−37	−25	−6	15	36

8. A tabela fornece os valores de uma função obtidos experimentalmente. Use-os para estimar $\int_3^9 f(x)\,dx$ utilizando três subintervalos iguais com (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios. Se for sabido que a função é decrescente, você pode dizer se suas estimativas são menores ou maiores que o valor exato da integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	−3,4	−2,1	−0,6	0,3	0,9	1,4	1,8

9–12 Use a Regra do Ponto Médio com o valor dado n para aproximar a integral. Arredonde cada resposta para quatro casas decimais.

9. $\int_2^{10} \sqrt{x^3 + 1}\, dx, \quad n = 4$ **10.** $\int_0^{\pi} \sec(x/3)\, dx, \quad n = 6$

11. $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx, \quad n = 5$ **12.** $\int_2^4 x \ln x\, dx, \quad n = 4$

SCA **13.** Se você tiver um SCA que possa calcular as aproximações pelo Ponto Médio e fazer o gráfico dos retângulos correspondentes (use os comandos middlesum e middlebox do Maple), verifique a resposta do Exercício 11 e ilustre com um gráfico. Repita então com $n = 10$ e $n = 20$.

14. Com uma calculadora programável ou computador (veja as instruções para o Exercício 7 da Seção 5.1), calcule as somas de Riemann esquerda e direita para a função $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ no intervalo $[0, 1]$ com $n = 100$. Explique por que essas estimativas mostram que

$$0{,}306 < \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx < 0{,}315$$

Deduza que a aproximação usando a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ no Exercício 11 é precisa até a segunda casa decimal.

15. Use uma calculadora ou um computador para fazer uma tabela dos valores das somas R_n de Riemann à direita para a integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ com $n = 5, 10, 50$ e 100. De qual valor esses números parecem estar se aproximando?

16. Use uma calculadora ou um computador para fazer uma tabela dos valores das somas L_n e R_n de Riemann à esquerda e à direita para a integral $\int_0^2 e^{-x^2}\, dx$ com $n = 5, 10, 50$ e 100. Entre quais dois números o valor da integral deve ficar? Você pode fazer uma afirmação análoga para a integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2}\, dx$? Explique.

17–20 Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado.

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\Delta x, \quad [2, 6]$

18. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos x_i}{x_i}\Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2}\,\Delta x, \quad [1, 8]$

20. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5]\Delta x, \quad [0, 2]$

21-25 Use a forma da definição de integral dada no Teorema 4 para calcular a integral.

21. $\int_{-1}^5 (1 + 3x)\, dx$ **22.** $\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)\, dx$

23. $\int_0^2 (2 - x^2)\, dx$ **24.** $\int_0^5 (1 + 2x^3)\, dx$

25. $\int_1^2 x^3\, dx$

26. (a) Encontre uma aproximação para a integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$ usando uma soma de Riemann com as extremidades direitas e $n = 8$.

(b) Faça um diagrama como a Figura 3 para ilustrar a aproximação da parte (a).

(c) Use o Teorema 4 para calcular $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$.

(d) Interprete a integral da parte (c) como uma diferença de áreas e ilustre com diagramas como o da Figura 4.

27. Demonstre que $\int_a^b x\, dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$.

28. Demonstre que $\int_a^b x^2\, dx = \dfrac{b^3 - a^3}{3}$.

29–30 Expresse a integral como um limite de somas. Não calcule o limite.

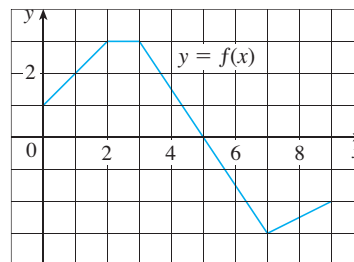
29. $\int_2^6 \frac{x}{1 + x^5}\, dx$ **30.** $\int_1^{10} (x - 4 \ln x)\, dx$

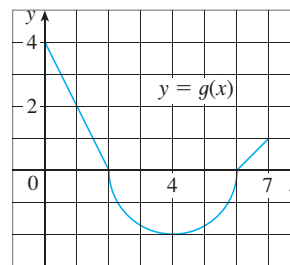
SCA **31–32** Expresse a integral como um limite de somas. Depois, calcule, usando um sistema de computação algébrica para encontrar a soma e o limite.

31. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 5x\, dx$ **32.** $\int_2^{10} x^6\, dx$

33. O gráfico de f está mostrado. Calcule cada integral interpretando-a em termos das áreas.

(a) $\int_0^2 f(x)\, dx$ (b) $\int_0^5 f(x)\, dx$

(c) $\int_5^7 f(x)\, dx$ (d) $\int_0^9 f(x)\, dx$

34. O gráfico de g consiste em duas retas e um semicírculo. Use-o para calcular cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\, dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\, dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\, dx$

35–40 Calcule a integral, interpretando-a em termos das áreas.

35. $\int_1^3 (1 + 2x)\, dx$ **36.** $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

37. $\int_{-3}^0 (1 + \sqrt{9 - x^2})\, dx$ **38.** $\int_{-1}^3 (3 - 2x)\, dx$

39. $\int_{-1}^2 |x|\, dx$ **40.** $\int_1^{10} |x - 5|\, dx$

41. Calcule $\int_{\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

42. Dado que $\int_0^1 3x\sqrt{x^2 + 4}\, dx = 5\sqrt{5} - 8$, o que é $\int_1^0 3u\sqrt{u^2 + 4}\, du$?

43. No Exemplo 2 da Seção 5.1 mostramos que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Use esse fato e as propriedades das integrais para calcular $\int_0^1 (5 - 6x^2)\,dx$.

44. Use as propriedades das integrais e o resultado do Exemplo 3 para calcular $\int_1^3 (2e^x - 1)\,dx$.

45. Use o resultado do Exemplo 3 para calcular $\int_1^3 e^{x+2}\,dx$.

46. Use o resultado do Exercício 27 e o fato de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$ (do Exercício 25 na Seção 5.1), com as propriedades das integrais, para calcular $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\,dx$.

47. Escreva como uma integral única na forma $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$$

48. Se $\int_1^5 f(x)\,dx = 12$ e $\int_4^5 f(x)\,dx = 3{,}6$, encontre $\int_1^4 f(x)\,dx$.

49. Se $\int_0^9 f(x)\,dx = 37$ e $\int_0^9 g(x)\,dx = 16$, encontre $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx$.

50. Encontre $\int_0^5 f(x)\,dx$ se

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geqslant 3 \end{cases}$$

51. Suponha que f tenha um valor mínimo absoluto m e um valor máximo absoluto M. Entre quais dois valores $\int_0^2 f(x)\,dx$ deve ficar? Que propriedade das integrais lhe permitem tirar esta conclusão?

52–54 Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais.

52. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx$

53. $2 \leqslant \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant 2\sqrt{2}$

54. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\,dx \leqslant \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$

55–60 Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

55. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

56. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^2}\,dx$

57. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$

58. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\,dx$

59. $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

60. $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\,dx$

61–62 Use as propriedades das integrais, junto com os Exercícios 27 e 28, para demonstrar a desigualdade.

61. $\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\,dx \geqslant \dfrac{26}{3}$

62. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx \leqslant \dfrac{\pi^2}{8}$

63. Demonstre a Propriedade 3 das integrais.

64. Demonstre a Propriedade 6 das integrais.

65. Se f for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

[*Sugestão*: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.]

66. Use o resultado do Exercício 65 para mostrar que

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x\,dx\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

67. Seja $f(x) = 0$ se x for um número racional qualquer e $f(x) = 1$ se x for um número irracional qualquer. Mostre que f não é integrável em $[0, 1]$.

68. Seja $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/x$ se $0 < x \leqslant 1$. Mostre que f não é integrável em $[0, 1]$. [*Sugestão*: mostre que o primeiro termo na soma de Riemann, $f(x_i^*)\Delta x$, pode ser tornado arbitrariamente grande.]

69–70 Expresse o limite como uma integral definida.

69. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{i^4}{n^5}$ [*Sugestão*: Considere $f(x) = x^4$.]

70. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1 + (i/n)^2}$

71. Encontre $\int_1^2 x^{-2}\,dx$. *Sugestão*: Escolha x_i^* como a média geométrica de x_{i-1} e x_i (isto é, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) e use a identidade

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

PROJETO DE DESCOBERTA

FUNÇÕES ÁREA

1. (a) Trace a reta $y = 2t + 1$ e use a geometria para achar a área sob essa reta, acima do eixo t, e entre as retas verticais $t = 1$ e $t = 3$.

(b) Se $x > 1$, seja $A(x)$ a área da região que está sob a reta $y = 2t + 1$ entre $t = 1$ e $t = x$. Esboce essa região e use a geometria para achar uma expressão para $A(x)$.

(c) Derive a função área $A(x)$. O que você observa?

2. (a) Se $x \geqslant -1$, seja

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\,dt$$

$A(x)$ representa a área de uma região. Esboce essa região.

(b) Use o resultado do Exercício 28 da Seção 5.2 para encontrar uma expressão para $A(x)$.

(c) Encontre $A'(x)$. O que você observa?

(d) Se $x \geqslant -1$e h é um número positivo pequeno, então $A(x + h) - A(x)$ representa a área de uma região. Descreva e esboce a região.

(e) Trace um retângulo que aproxime a região da parte (d). Comparando as áreas dessas duas regiões, mostre que

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

(f) Use a parte (e) para dar uma explicação intuitiva para o resultado da parte (c).

3. (a) Trace o gráfico da função $f(x) = \cos(x^2)$ na janela retangular $[0, 2]$ por $[-1{,}25, 1{,}25]$.

(b) Se definirmos uma nova função g por

$$g(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$$

então $g(x)$ é a área sob o gráfico de f de 0 até x [até $f(x)$ torna-se negativa, onde $g(x)$ torna-se uma diferença de áreas]. Use a parte (a) para determinar o valor de x no qual $g(x)$ começa a decrescer. [Diferente da integral do Problema 2, é impossível calcular a integral que define g para obter uma expressão explícita para $g(x)$.]

(c) Use o comando de integração em sua calculadora ou computador para estimar $g(0{,}2)$, $g(0{,}4)$, $g(0{,}6)$, . . . , $g(1{,}8)$, $g(2)$. A seguir, use esses valores para esboçar um gráfico de g.

(d) Use seu gráfico de g da parte (c) para esboçar o gráfico de g' usando a interpretação de $g'(x)$ como a inclinação de uma reta tangente. Como se comparam os gráficos de g' e de f?

4. Suponha que f seja uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e definimos uma nova função g pela equação

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Com base nos seus resultados dos Problemas 1-3, conjecture uma expressão para $g'(x)$.

5.3 O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O nome Teorema Fundamental do Cálculo é apropriado, pois ele estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu de um problema aparentemente não relacionado, o problema da área. O mentor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descobriu que esses dois problemas estão, na verdade, estreitamente relacionados. Ele percebeu que a derivação e a integração são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitava a calcular áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas, como fizemos nas Seções 5.1 e 5.2.

A primeira parte do Teorema Fundamental lida com funções definidas por uma equação da forma

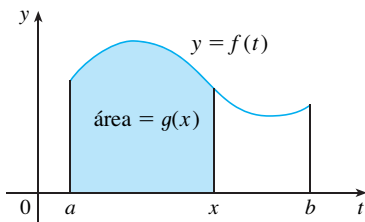



FIGURA 1

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \boxed{1}$$

onde f é uma função contínua em $[a, b]$ e x varia entre a e b. Observe que g depende somente de x, que aparece como o limite superior variável da integral. Se x for um número fixado, então a integral $\int_a^x f(t)\,dt$ é um número definido. Se variamos x, o número $\int_a^x f(t)\,dt$ também varia e define uma função de x denotada por $g(x)$.

Se f for uma função positiva, então $g(x)$ pode ser interpretada como a área sob o gráfico de f de a até x, onde x pode variar de a até b. (Imagine g como a função "área até aqui", veja a Figura 1.)

EXEMPLO 1 Se f for a função contínua cujo gráfico está mostrado na Figura 2 e $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, ache os valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ e $g(5)$. A seguir, faça um esboço do gráfico de g.

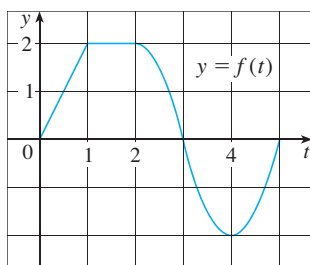



FIGURA 2

SOLUÇÃO Primeiro, observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. Da Figura 3, sabemos que $g(1)$ é a área de um triângulo:

$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para achar $g(2)$ somamos $g(1)$ à área de um retângulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estimamos que a área abaixo da curva definida por f no intervalo de 2 a 3 é aproximadamente 1,3, assim,

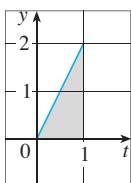
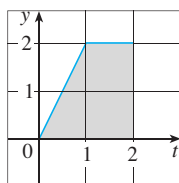
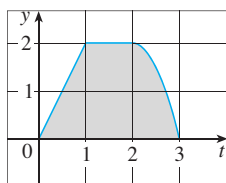
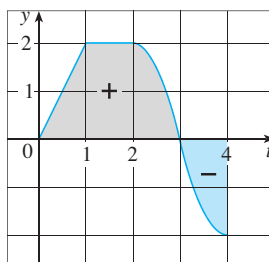
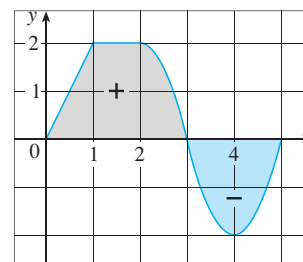
$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1{,}3 = 4{,}3$$

$g(1) = 1$

$g(2) = 3$

$g(3) \approx 4{,}3$

$g(4) \approx 3$

$g(5) \approx 1{,}7$

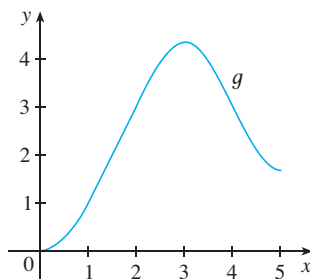
FIGURA 3

Para $t > 3$, $f(t)$ é negativo e, dessa forma, começamos a subtrair as áreas:

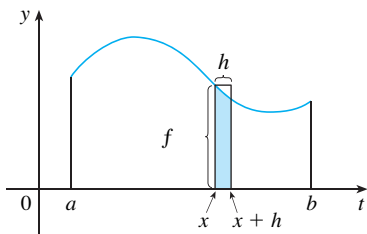
$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4{,}3 + (-1{,}3) = 3{,}0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1{,}3) = 1{,}7$$

FIGURA 4
$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Usamos esses valores para fazer o esboço do gráfico de g apresentado na Figura 4. Observe que, pelo fato de $f(t)$ ser positiva para $t < 3$, continuamos adicionando área para $t < 3$ e assim g é crescente até $x = 3$, onde atinge o seu valor máximo. Para $x > 3$, g decresce porque $f(t)$ é negativa. □

Se tomarmos $f(t) = t$ e $a = 0$, então, usando o Exercício 27 da Seção 5.2, temos

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Observe que $g'(x) = x$, isto é, $g' = f$. Em outras palavras, se g for definida como a integral de f pela Equação 1, então g resulta ser uma primitiva de f, pelo menos nesse caso. E se

esboçarmos a derivada da função g mostrada na Figura 4 pelas inclinações estimadas das tangentes, teremos um gráfico semelhante ao de f na Figura 2. Portanto, suspeitamos que $g' = f$, também, no Exemplo 1.

Para ver por que isso pode ser verdadeiro em geral, consideramos qualquer função contínua f com $f(x) \geqslant 0$. Então, $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pode ser interpretada como a área sob o gráfico de f de a até x, como na Figura 1.

FIGURA 5

A fim de calcular $g'(x)$ a partir da definição de derivada, primeiro observamos que, para $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ é obtida subtraindo áreas, de forma que reste a área sob o gráfico de f de x até $x + h$ (a área em destaque na Figura 5). Para h pequeno, pode-se ver da figura que essa área é aproximadamente igual à área do retângulo com altura $f(x)$ e largura h:

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

logo,

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

Intuitivamente, portanto, esperamos que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

O fato de isso ser verdadeiro, mesmo quando f não é necessariamente positiva, é a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

■ Abreviamos o nome deste teorema por TFC1. Em palavras, ele afirma que a derivada de uma integral definida com relação a seu limite superior é seu integrando calculado no limite superior.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO, PARTE 1 Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

DEMONSTRAÇÃO Se x e $x + h$ estão em (a, b), então

$$\begin{aligned} g(x + h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{(pela Propriedade 5)} \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt \end{aligned}$$

logo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Por ora, vamos assumir que $h > 0$. Uma vez que f é contínua em $[x, x + h]$, o Teorema do Valor Extremo afirma que há números u e v em $[x, x + h]$ tal que $f(u) = m$ e $f(v) = M$, onde m e M são valores mínimo e máximo absolutos de f em $[x, x + h]$ (veja a Figura 6).

FIGURA 6

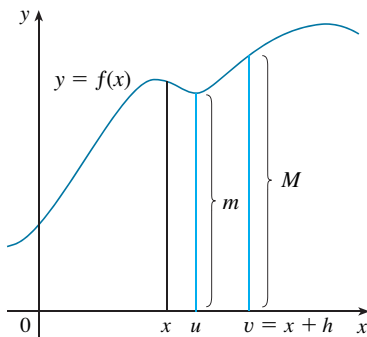
Pela Propriedade 8 das integrais, temos

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant Mh$$

isto é,

$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)h$$

Uma vez que $h > 0$, podemos dividir essa desigualdade por h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)$$

Agora, usamos a Equação 2 para substituir a parte do meio dessa desigualdade:

3 $$f(u) \leqslant \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

A desigualdade 3 pode ser demonstrada de maneira similar para o caso $h < 0$ (veja o Exercício 67).

Agora, tomemos $h \to 0$. Então, $u \to x$ e $v \to x$, uma vez que u e v estão entre x e $x + h$. Consequentemente,

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x)$$

e $$\lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x)$$

pois f é contínua em x. Concluímos, de (3) e do Teorema do Confronto, que

4 $$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$$

Se $x = a$ ou b, então a Equação 4 pode ser interpretada como um limite lateral. Então, o Teorema 2.8.4 (modificado para limites laterais) mostra que g é contínua em $[a, b]$. □

Usando a notação de Leibniz para as derivadas, podemos escrever o TFC1 como

5 $$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

quando f for contínua. Grosseiramente falando, a Equação 5 nos diz que se primeiro integramos f e então derivamos o resultado, retornamos à função original f.

FIGURA 7

$f(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$

$S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

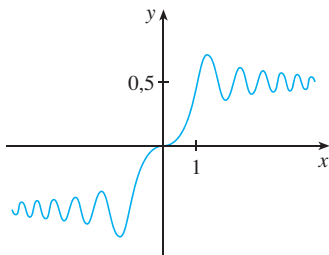



FIGURA 8

A função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

EXEMPLO 2 Ache a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ é contínua, a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo fornece

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$ □

EXEMPLO 3 Embora uma fórmula da forma $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ possa parecer uma maneira estranha de definir uma função, livros de física, química e estatística estão repletos dessas funções. Por exemplo, a **função de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\, dt$$

é assim chamada em homenagem ao físico francês Augustin Fresnel (1788-1827), famoso por seus estudos em óptica. Essa função apareceu pela primeira vez na teoria de difração das ondas de luz de Fresnel, porém mais recentemente foi aplicada no planejamento de autoestradas.

A parte 1 do Teorema Fundamental nos diz como derivar a função de Fresnel:

$$S'(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$$

Isso significa que podemos aplicar todos os métodos do cálculo diferencial para analisar S (veja o Exercício 61).

A Figura 7 mostra os gráficos de $f(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$ e da função de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Foi usado um computador para fazer o gráfico de S, calculando o valor dessa integral para vários valores de x. Realmente parece que $S(x)$ é a área sob o gráfico de f de 0 até x [até $x \approx 1{,}4$ quando $S(x)$ torna-se uma diferença de áreas]. A Figura 8 mostra uma parte maior do gráfico de S.

Se começarmos agora com o gráfico de S da Figura 7 e pensarmos sobre como deve ser sua derivada, parece razoável que $S'(x) = f(x)$. [Por exemplo, S é crescente quando $f(x) > 0$ e decrescente quando $f(x) < 0$.] Logo, isso dá uma confirmação visual da Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo. □

EXEMPLO 4 Ache $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\, dt$.

SOLUÇÃO Aqui, devemos ser cuidadosos ao usar a Regra da Cadeia com o TFC1. Seja $u = x^4$. Então,

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\, dt = \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\, dt$$

$$= \frac{d}{du}\left(\int_1^{u} \sec t\, dt\right)\frac{du}{dx} \qquad \text{(pela Regra da Cadeia)}$$

$$= \sec u \frac{du}{dx} \qquad \text{(pelo TFC1)}$$

$$= \sec(x^4) \cdot 4x^3$$ □

Na Seção 5.2 calculamos as integrais, a partir da definição, como um limite de somas de Riemann e vimos que esse procedimento é às vezes longo e difícil. A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, que segue facilmente da primeira parte, nos fornece um método muito mais simples para o cálculo de integrais.

■ Abreviamos este teorema por TFC2.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO, PARTE 2 Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Sabemos da Parte 1 que $g'(x) = f(x)$; isto é, g é uma primitiva de f. Se F for qualquer outra primitiva de f em $[a, b]$, então sabemos do Corolário 4.2.7 que F e g diferem por uma constante:

6 $$F(x) = g(x) + C$$

para $a < x < b$. Mas, tanto F quanto g são contínuas em $[a, b]$ e, portanto, tomando limites em ambos os lados da Equação 6 (quando $x \to a^+$ e $x \to b^-$), vemos que isso também é válido quando $x = a$ e $x = b$.

Se fizermos $x = a$ na fórmula de $g(x)$, obteremos

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$$

Portanto, usando a Equação 6 com $x = b$ e $x = a$, temos

$$F(b) - F(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C]$$

$$= g(b) - g(a) = g(b)$$

$$= \int_a^b f(t)\, dt$$ □

A Parte 2 do Teorema Fundamental afirma que se conhecermos uma primitiva F de f, então poderemos calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ simplesmente subtraindo os valores de F nas extremidades do intervalo $[a, b]$. É surpreendente que $\int_a^b f(x)\,dx$, definida por um procedimento complicado envolvendo todos os valores de $f(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, possa ser encontrada sabendo-se os valores de $F(x)$ em somente dois pontos, a e b.

Embora o Teorema possa ser surpreendente à primeira vista, ele fica plausível se o interpretamos em termos físicos. Se $v(t)$ for a velocidade de um objeto e $s(t)$ for sua posição no instante t, então $v(t) = s'(t)$, portanto s é uma primitiva de v. Na Seção 5.1 consideramos um objeto que se move sempre no sentido positivo e fizemos a conjectura de que a área sob a curva da velocidade é igual à distância percorrida. Em símbolos:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Isso é exatamente o que o TFC2 diz nesse contexto.

EXEMPLO 5 Calcule a integral $\int_1^3 e^x\,dx$.

■ Compare os cálculos no Exemplo 5 com os muito mais difíceis no Exemplo 3 da Seção 5.2.

SOLUÇÃO A função $f(x) = e^x$ é contínua em toda parte e sabemos que uma primitiva é $F(x) = e^x$; logo, pela Parte 2 do Teorema Fundamental, temos

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Observe que o TFC2 diz que podemos usar *qualquer* primitiva F de f. Portanto, podemos usar a mais simples, isto é, $F(x) = e^x$, em vez de $e^x + 7$ ou $e^x + C$. □

Frequentemente usamos a notação

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Logo, a equação do TFC2 pode ser escrita como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{em que} \qquad F' = f$$

Outras notações comuns são $F(x)\Big|_a^b$ e $[F(x)]_a^b$.

EXEMPLO 6 Ache a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1.

■ Ao aplicar o Teorema fundamental, usamos uma primitiva particular F de f. Não é necessário usar a primitiva mais geral.

SOLUÇÃO Uma primitiva de $f(x) = x^2$ é $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. A área A pedida é encontrada usando-se a Parte 2 do Teorema Fundamental:

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$ □

Se você comparar o cálculo do Exemplo 6 com o do Exemplo 2 na Seção 5.1, verá que o Teorema Fundamental dá um método *muito* mais curto.

EXEMPLO 7 Calcule $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

SOLUÇÃO A integral dada é uma abreviação para

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$$

Uma primitiva de $f(x) = 1/x$ é $F(x) = \ln |x|$, e, como $3 \leqslant x \leqslant 6$, podemos escrever $F(x) = \ln x$. Logo,

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3$$

FIGURA 9

$$= \ln \frac{6}{3} = \ln 2$$ □

EXEMPLO 8 Encontre a área sob a curva cosseno de 0 até b, onde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUÇÃO Uma vez que uma primitiva de $f(x) = \cos x$ é $F(x) = \text{sen}\, x$, temos

$$A = \int_0^b \cos x\, dx = \text{sen}\, x \Big]_0^b = \text{sen}\, b - \text{sen}\, 0 = \text{sen}\, b$$

Em particular, tomando $b = \pi/2$, teremos demonstrado que a área sob a curva cosseno de 0 até $\pi/2$ é sen $(\pi/2) = 1$. (Veja a Figura 9.) □

Quando o matemático francês Gilles de Roberval encontrou a área sob as curvas seno e cosseno, em 1635, isto era um problema muito desafiador que requeria uma grande dose de engenhosidade. Se não tivéssemos a vantagem do Teorema Fundamental, teríamos de calcular um limite de somas difícil usando obscuras identidades trigonométricas (ou um SCA, como no Exercício 25 da Seção 5.1). Isso foi ainda mais difícil para Roberval, porque o aparato de limites não tinha sido inventado em 1635. Mas nas décadas de 1660 e 1670, quando o Teorema Fundamental foi descoberto por Barrow e explorado por Newton e Leibniz, esses problemas ficaram muito fáceis, como você pode ver no Exemplo 8.

EXEMPLO 9 O que está errado no seguinte cálculo?

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUÇÃO Para começar, observamos que esse cálculo deve estar errado, pois a resposta é negativa, mas $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ e a Propriedade 6 de integrais afirma que $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$ quando $f \geqslant 0$. O Teorema Fundamental do Cálculo aplica-se a funções contínuas. Ele não pode ser aplicado aqui, pois $f(x) = 1/x^2$ não é contínua em $[-1, 3]$. De fato, f tem uma descontinuidade infinita em $x = 0$, portanto

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \text{não existe}$$ □

DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO COMO PROCESSOS INVERSOS

Vamos finalizar esta seção justapondo as duas partes do Teorema Fundamental.

> **O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO** Suponha que f seja contínua em $[a, b]$.
>
> **1.** Se $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, então $g'(x) = f(x)$.
>
> **2.** $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, quando F for qualquer primitiva de f, isto é, $F' = f$.

Observamos que a Parte 1 pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

o que quer dizer que se f for integrada e o resultado, derivado, obteremos de volta a função original f. Como $F'(x) = f(x)$, a Parte 2 pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

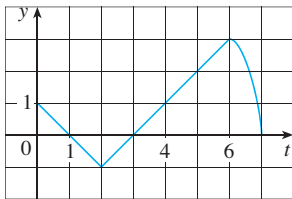
Essa versão afirma que se tomarmos uma função F, a derivarmos e depois integrarmos o resultado, chegaremos de volta à função original F, mas na forma $F(b) - F(a)$. Juntas, as

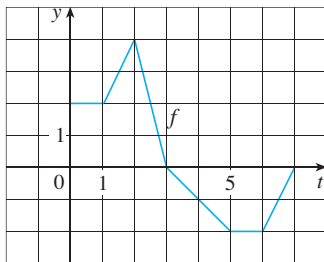
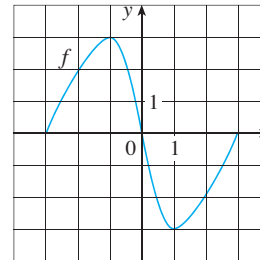
duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo mostram que a derivação e a integração são processos inversos. Cada um desfaz o que o outro fez.

O Teorema Fundamental do Cálculo é inquestionavelmente o mais importante do cálculo e realmente é um dos grandes feitos da mente humana. Antes de sua descoberta, desde os tempos de Eudóxio e Arquimedes até os de Galileu e Fermat, os problemas de encontrar áreas, volumes e comprimentos de curva eram tão difíceis que somente um gênio poderia fazer frente ao desafio. Agora, porém, armado com o método sistemático que Leibniz e Newton configuraram a partir do Teorema Fundamental, veremos nos capítulos a seguir que esses problemas desafiadores são acessíveis para todos nós.

5.3 EXERCÍCIOS

1. Explique claramente o que você entende por "derivação e integração são processos inversos".

2. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ onde f é a função cujo gráfico é mostrado.

(a) Calcule $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6.
(b) Estime $g(7)$.
(c) Onde g tem um valor máximo? Onde possui um valor mínimo?
(d) Faça um esboço do gráfico de g.

3. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico está mostrado.
(a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.
(b) Em que intervalos g está crescendo?
(c) Onde g tem um valor máximo?
(d) Faça um esboço do gráfico de g.

4. Seja $g(x) = \int_{-3}^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico está mostrado.
(a) Calcule $g(-3)$ e $g(3)$.
(b) Estime $g(-2)$, $g(-1)$ e $g(0)$.
(c) Em que intervalo g está crescendo?
(d) Onde g tem um valor máximo?
(e) Faça um esboço do gráfico de g.
(f) Use o gráfico da parte (e) para esboçar o gráfico de $g'(x)$. Compare com o gráfico de f.

5–6 Esboce a área representada por $g(x)$. A seguir, encontre $g'(x)$ de duas maneiras: (a) utilizando a Parte 1 do Teorema Fundamental e (b) calculando a integral usando a Parte 2 e então derivando.

5. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$

6. $g(x) = \int_0^x (1 + \sqrt{t})\,dt$

7–18 Use a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar a derivada da função.

7. $g(x) = \int_1^x \dfrac{1}{t^3 + 1}\,dt$

8. $g(x) = \int_1^x \ln t\,dt$

9. $g(y) = \int_2^y t^2 \operatorname{sen} t\,dt$

10. $g(u) = \int_3^u \dfrac{1}{x + x^2}\,dx$

11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\;dt$

$\left[\textit{Sugestão}: \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\;dt = -\int_\pi^x \sqrt{1 + \sec t}\;dt\right]$

12. $G(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$

13. $h(x) = \int_2^{1/x} \operatorname{arctg} t\,dt$

14. $h(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1 + r^3}\,dr$

15. $y = \int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\,dt$

16. $y = \int_1^{\cos x} (1 + v^2)^{10}\,dv$

17. $y = \int_{1-3x}^1 \dfrac{u^3}{1 + u^2}\,du$

18. $y = \int_{e^x}^0 \operatorname{sen}^3 t\,dt$

19–42 Calcule a integral.

19. $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x)\,dx$

20. $\int_{-2}^5 6\,dx$

21. $\int_1^4 (5 - 2t - 3t^2)\,dt$

22. $\int_0^1 (1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9)\,du$

23. $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

24. $\int_0^1 x^{3/7}\,dx$

25. $\int_1^2 \dfrac{3}{t^4}\,dt$

26. $\int_\pi^{2\pi} \cos\theta\,d\theta$

27. $\int_0^2 x(2 + x^5)\, dx$

28. $\int_0^1 (3 + x\sqrt{x})\, dx$

29. $\int_1^9 \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$

30. $\int_0^2 (y - 1)(2y + 1)\, dx$

31. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\, dt$

32. $\int_0^{\pi/4} \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$

33. $\int_1^2 (1 + 2y)^2\, dy$

34. $\int_0^1 \cosh t\, dt$

35. $\int_1^9 \frac{1}{2x}\, dx$

36. $\int_0^1 10^x\, dx$

37. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$

38. $\int_0^1 \frac{4}{t^2 + 1}\, dt$

39. $\int_{-1}^1 e^{u+1}\, du$

40. $\int_1^2 \frac{4 + u^2}{u^3}\, du$

41. $\int_0^\pi f(x)\, dx \quad$ onde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ \cos x & \text{se } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

42. $\int_{-2}^2 f(x)\, dx \quad$ onde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 - x^2 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

43–46 O que está errado na equação?

43. $\int_{-2}^1 x^{-4}\, dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-2}^1 = -\frac{3}{8}$

44. $\int_{-1}^2 \frac{4}{x^3}\, dx = -\left.\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^2 = \frac{3}{2}$

45. $\int_{\pi/3}^\pi \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta = \sec\theta\Big]_{\pi/3}^\pi = -3$

46. $\int_0^\pi \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x\Big]_0^\pi = 0$

47–50 Use um gráfico para dar uma estimativa grosseira da área da região que fica abaixo da curva dada. A seguir, ache a área exata.

47. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 27$

48. $y = x^{-4}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

49. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

50. $y = \sec^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

51–52 Calcule a integral e interprete-a como uma diferença de áreas. Ilustre com um esboço.

51. $\int_{-1}^2 x^3\, dx$

52. $\int_{\pi/4}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

53–56 Ache a derivada da função

53. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\, du$

$\left[\textit{Sugestão}: \int_{2x}^{3x} f(u)\, du = \int_{2x}^{0} f(u)\, du + \int_0^{3x} f(u)\, du\right]$

54. $g(x) = \int_{\operatorname{tg} x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2 + t^4}}\, dt$

55. $y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\, \operatorname{sen} t\, dt$

56. $y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2)\, du$

57. Se $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$, onde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1 + u^4}}{u}\, du$, determine $F''(2)$.

58. Ache o intervalo em que a curva $y = \int_0^x \frac{1}{1 + t + t^2}\, dt$ é côncava para cima.

59. Se $f(1) = 12$, f' é contínua e $\int_1^4 f'(x)\, dx = 17$, qual é o valor de $f(4)$?

60. A **função erro** dada por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

é muito usada em probabilidade, estatística e engenharia.

(a) Mostre que $\int_a^b e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

(b) Mostre que a função $y = e^{x^2} \operatorname{erf}(x)$ satisfaz a equação diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

61. A função de Fresnel S foi definida no Exemplo 3, e seus gráficos estão nas Figuras 7 e 8.

(a) Em que valores de x essa função tem valores de máximos locais?

(b) Em que intervalos a função é côncava para cima?

SCA (c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, com precisão de duas casas decimais:

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt = 0{,}2$$

SCA 62. A **função seno integral**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

é importante em engenharia elétrica. [O integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ não está definido quando $t = 0$, mas sabemos que seu limite é 1 quando $t \to 0$. Logo, definimos $f(0) = 1$, e isso faz de f uma função contínua em toda parte.]

(a) Trace o gráfico de Si.

(b) Em que valores de x essa função tem valores de máximos locais?

(c) Ache as coordenadas do primeiro ponto de inflexão à direita da origem.

(d) Essa função tem assíntotas horizontais?

(e) Resolva a seguinte equação com precisão de uma casa decimal:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 1$$

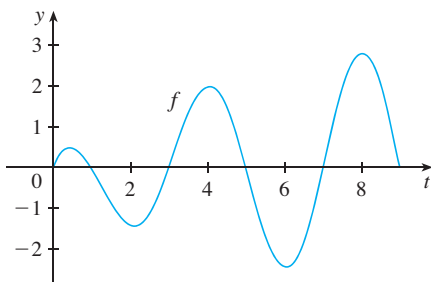
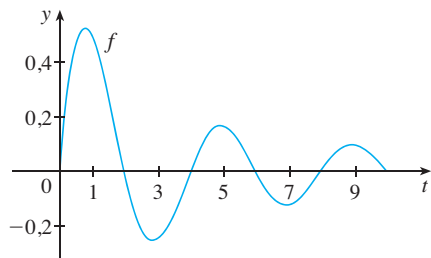
63–64 Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, onde f é a função cujo gráfico está mostrado.

(a) Em que valores de x ocorrem os valores de máximos e mínimos locais em g?

(b) Onde g atinge seu valor máximo absoluto?

(c) Em que intervalos g é côncavo para baixo?

(d) Esboce o gráfico de g.

63.

64.

65–66 Calcule o limite, reconhecendo primeiro a soma como uma soma de Riemann para uma função definida em [0, 1].

65. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{i^3}{n^4}$

66. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}} + \sqrt{\dfrac{2}{n}} + \sqrt{\dfrac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\dfrac{n}{n}}\right)$

67. Justifique (3) para o caso $h < 0$.

68. Se f é contínua e g e h são funções deriváveis, encontre uma fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

69. (a) Mostre que $1 \leqslant \sqrt{1+x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.
(b) Mostre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant 1{,}25$.

70. (a) Mostre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.
(b) Deduza que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$.

71. Mostre que

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \leqslant 0{,}1$$

comparando o integrando a uma função mais simples

72. Seja

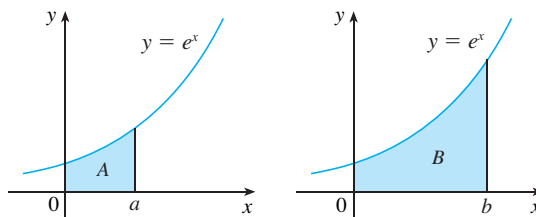
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

e $$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

(a) Ache uma expressão para $g(x)$ similar àquela para $f(x)$.
(b) Esboce os gráficos de f e g.
(c) Onde f é derivável? Onde g é derivável?

73. Ache uma função f e um número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} \qquad \text{para todo } x > 0.$$

74. A área marcada B é três vezes a área marcada A. Expresse b em termos de a.

75. Uma empresa possui uma máquina que se deprecia a uma taxa contínua $f = f(t)$, onde t é o tempo medido em meses desde seu último recondicionamento. Como a cada vez em que a máquina é recondicionada incorre-se em um custo fixo A, a empresa deseja determinar o tempo ótimo T (em meses) entre os recondicionamentos.
(a) Explique por que $\int_0^t f(s)\,ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo t desde o último recondicionamento.
(b) Seja $C = C(t)$ dado por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

O que representa C e por que a empresa quer minimizar C?
(c) Mostre que C tem um valor mínimo nos números $t = T$ onde $C(T) = f(T)$.

76. Uma companhia de alta tecnologia compra um novo sistema computacional cujo valor inicial é V. O sistema depreciará a uma taxa $f = f(t)$ e acumulará custos de manutenção a uma taxa $g = g(t)$, onde t é o tempo medido em meses. A companhia quer determinar o tempo ótimo para substituir o sistema.
(a) Seja

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]ds$$

Mostre que os números críticos de C ocorrem nos números t nos quais $C(t) = f(t) + g(t)$.
(b) Suponha que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{se } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{se } t > 30 \end{cases}$$

e $$g(t) = \frac{Vt^2}{12\,900} \qquad t > 0$$

Determine o período de tempo T para que a depreciação total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ seja igual ao valor inicial V.
(c) Determine o mínimo absoluto de C em $(0, T]$.
(d) Esboce os gráficos de C e $f + g$ no mesmo sistema de coordenadas e verifique o resultado da parte (a) nesse caso.

5.4 INTEGRAIS INDEFINIDAS E O TEOREMA DA VARIAÇÃO TOTAL

Vimos na Seção 5.3 que a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo fornece um método muito poderoso para calcular a integral definida de uma função, desde que possamos encontrar uma primitiva dessa função. Nesta seção, vamos introduzir uma notação para primitivas, rever as fórmulas para as primitivas e então usá-las para calcular integrais definidas. Também reformularemos o TFC2, de forma a torná-lo mais facilmente aplicável a problemas da ciência e engenharia.

INTEGRAIS INDEFINIDAS

Ambas as partes do Teorema Fundamental estabelecem conexões entre as primitivas e as integrais definidas. A Parte 1 estabelece que se f for contínua, então $\int_a^x f(t)\,dt$ é uma primitiva de f. A Parte 2 afirma que $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser encontrada calculando-se $F(b) - F(a)$, em que F é uma primitiva de f.

Precisamos de uma notação conveniente para primitivas que torne fácil trabalhar com elas. Em virtude da relação dada pelo Teorema Fundamental entre primitivas e integrais, a notação $\int f(x)\,dx$ é tradicionalmente usada para a primitiva de f e é chamada **integral indefinida**. Assim,

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x)$$

Por exemplo, podemos escrever

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

Portanto, podemos olhar uma integral indefinida como representando toda uma *família* de funções (uma primitiva para cada valor da constante C).

Você deve fazer uma distinção cuidadosa entre integral definida e indefinida. Uma integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número, enquanto uma integral indefinida $\int f(x)\,dx$ é uma função (ou uma família de funções). A conexão entre elas é dada pela Parte 2 do Teorema Fundamental. Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

A eficiência do Teorema Fundamental depende de termos um suprimento de primitivas de funções. Portanto, vamos apresentar de novo a Tabela de Fórmulas de Primitivação da Seção 4.9, com algumas outras, na notação de integrais indefinidas. Cada fórmula pode ser verificada derivando-se a função do lado direito e obtendo-se o integrando. Por exemplo

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x + C) = \sec^2 x$$

1 TABELAS DE INTEGRAIS INDEFINIDAS

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

Lembre-se de que, pelo do Teorema 4.9.1, a primitiva mais geral *sobre um dado intervalo* é obtida adicionando-se uma constante a uma dada primitiva. **Adotamos a convenção de que quando uma fórmula para uma integral indefinida geral é dada, ela é válida somente em um intervalo**. Assim, escrevemos

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

subentendendo que isso é válido no intervalo $(0, \infty)$ ou no intervalo $(-\infty, 0)$. Isso é verdadeiro apesar do fato de que a primitiva geral da função $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, é

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{se } x < 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

■ A integral indefinida no Exemplo 1 tem seu gráfico traçado na Figura 1 para vários valores de C. O valor de C é a intersecção com o eixo y.

4

−1,5

1,5

−4

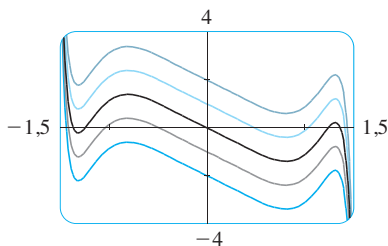



FIGURA 1

EXEMPLO 1 Ache a integral indefinida geral

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

SOLUÇÃO Usando nossa convenção e a Tabela 1, temos

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx = 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx$$

$$= 10\frac{x^5}{5} - 2\operatorname{tg} x + C = 2x^5 - 2\operatorname{tg} x + C$$

Você pode verificar essa resposta derivando-a. □

EXEMPLO 2 Calcule $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$

SOLUÇÃO Essa integral indefinida não é imediatamente reconhecível na Tabela 1, logo, usamos identidades trigonométricas para reescrever a função antes de integrá-la:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$

$$= \int \operatorname{cossec}\theta \cot\theta\, d\theta = -\operatorname{cossec} + C \qquad \square$$

EXEMPLO 3 Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUÇÃO Usando o TFC2 e a Tabela 1, temos

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\Big]_0^3$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)$$

$$= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6{,}75$$

Compare esse cálculo com o Exemplo 2(b) da Seção 5.2. □

■ A Figura 2 mostra o gráfico do integrando no Exemplo 4. Sabemos da Seção 5.2 que o valor da integral pode ser interpretado como a soma de áreas com o sinal de mais, menos a área com sinal de menos.

FIGURA 2

EXEMPLO 4 Ache $\displaystyle\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$ e interprete o resultado em termos de áreas.

SOLUÇÃO O Teorema Fundamental dá

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx = 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\operatorname{tg}^{-1}2 - 0$$

$$= -4 + 3\operatorname{tg}^{-1}2$$

Esse é o valor exato da integral. Se uma aproximação decimal for desejada, poderemos usar uma calculadora para aproximar $\operatorname{tg}^{-1}2$. Fazendo isso, obtemos

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0{,}67855 \qquad \square$$

EXEMPLO 5 Calcule $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$.

SOLUÇÃO Precisamos primeiro escrever o integrando em uma forma mais simples, efetuando a divisão:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$

$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Big]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Big]_1^9$$

$$= \left(2\cdot 9 + \tfrac{2}{3}\cdot 9^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right) - \left(2\cdot 1\ \tfrac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$

$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9} \qquad \square$$

APLICAÇÕES

A Parte 2 do Teorema Fundamental diz que se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f. Isso significa que $F' = f$, logo a equação pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sabemos que $F'(x)$ representa a taxa de variação de $y = F(x)$ em relação a x e $F(b) - F(a)$ é a variação em y quando x muda de a para b. [Observe que y pode, por exemplo, crescer, decrescer e então crescer novamente. Embora y possa variar nas duas direções, $F(b) - F(a)$ representa a variação *total* em y.] Logo, podemos reformular o TFC2 em palavras da forma a seguir.

TEOREMA DA VARIAÇÃO TOTAL A integral de uma taxa de variação é a variação total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esse princípio pode ser aplicado para todas as taxas de variação nas ciências naturais e sociais discutidas na Seção 3.7. Aqui estão alguns exemplos dessa ideia:

- Se $V(t)$ for o volume de água em um reservatório no instante t, então sua derivada $V'(t)$ é a taxa segundo a qual a água flui para dentro do reservatório no instante t. Portanto

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

é a variação na quantidade de água no reservatório entre os instantes de tempo t_1 e t_2.

- Se $[C](t)$ for a concentração do produto de uma reação química no instante t, então a taxa de reação é a derivada $d[C]/dt$. Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[C]}{dt}\,dt = [C](t_2) - [C](t_1)$$

é a variação na concentração de C entre os instantes t_1 e t_2.

- Se a massa de uma barra medida a partir da extremidade esquerda até um ponto x for $m(x)$, então a densidade linear $\rho(x) = m'(x)$. Logo

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

é a massa do segmento da barra que está entre $x = a$ e $x = b$.

- Se a taxa de crescimento populacional for dn/dt, então

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

é o crescimento na população durante o período de tempo de t_1 até t_2. (A população cresce quando ocorrem nascimentos e decresce quando ocorrem mortes. A variação total leva em conta tanto nascimentos quanto mortes.)

- Se $C(x)$ for o custo de produzir x unidades de uma mercadoria, então o custo marginal é a derivada $C'(x)$. Logo,

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

é o crescimento do custo quando a produção está crescendo de x_1 até x_2 unidades.

- Se um objeto move-se ao longo de uma reta com função posição $s(t)$, então sua velocidade é $v(t) = s'(t)$. Logo,

2 $$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

é a mudança de posição, ou *deslocamento*, da partícula durante o período de tempo t_1 a t_2. Na Seção 5.1 conjecturamos que isso era verdadeiro para o caso onde o objeto move-se no sentido positivo, mas agora demonstramos que é sempre verdade.

- Se quisermos calcular a distância percorrida durante o intervalo de tempo, teremos de considerar os intervalos quando $v(t) \geqslant 0$ (a partícula move-se para a direita) e também os intervalos quando $v(t) \leqslant 0$ (a partícula move-se para a esquerda). Em ambos os casos a distância é calculada integrando-se $|v(t)|$, a velocidade escalar. Portanto

3 $$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = \text{distância total percorrida}$$

A Figura 3 mostra como o deslocamento e a distância percorrida podem ser interpretados em termos de áreas sob uma curva velocidade.

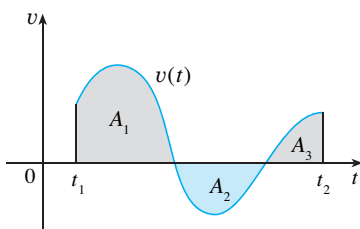



FIGURA 3

- A aceleração do objeto é $a(t) = v'(t)$, logo

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

é a mudança na velocidade do instante t_1 até t_2.

EXEMPLO 6 Uma partícula move-se ao longo de uma reta de tal forma que sua velocidade no instante t é $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida em metros por segundo).
(a) Ache o deslocamento da partícula durante o período de tempo $1 \leqslant t \leqslant 4$.
(b) Ache a distância percorrida durante esse período de tempo.

SOLUÇÃO
(a) Pela Equação 2, o deslocamento é

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Isso significa que a partícula moveu-se 4,5 m para a esquerda.

(b) Observe que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$, logo $v(t) \leqslant 0$ no intervalo $[1, 3]$ e $v(t) \geqslant 0$ em $[3, 4]$. Assim, da Equação 3, a distância percorrida é

- Para integrar o valor absoluto de $v(t)$, usamos a Propriedade 5 das integrais da Seção 5.2 para dividir a integral em duas partes, uma onde $v(t) \leqslant 0$ e outra onde $v(t) \geqslant 0$.

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt = \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt$$

$$= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4$$

$$= \frac{61}{6} \approx 10{,}17 \text{ m}$$ □

EXEMPLO 7 A Figura 4 mostra a potência consumida na cidade de Ontário, Canadá, em 9 de dezembro de 2004 (P é medida em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite). Estime a energia consumida naquele dia.

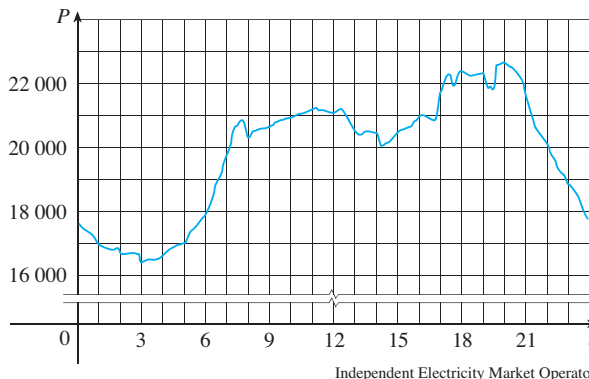



FIGURA 4

SOLUÇÃO A potência é a taxa de variação da energia $P(t) = E'(t)$. Logo, pelo Teorema da Variação Total,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

é a quantidade total de energia consumida naquele dia. Aproximamos o valor da integral utilizando a Regra do Ponto Médio com 12 subintervalos e $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\Delta t\\ &\approx (16\,900 + 16\,400 + 17\,000 + 19\,800 + 20\,700 + 21\,200 + 20\,500\\ &\quad + 20\,500 + 21\,700 + 22\,300 + 21\,700 + 18\,900)(2)\\ &= 475\,200\end{aligned}$$

A energia usada foi aproximadamente $4{,}75 \times 10^5$ megawatts-hora. □

■ Uma observação sobre unidades

Como saber que unidades usar para a energia no Exemplo 7? A integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ é definida como o limite das somas dos termos da forma $P(t_i^*)\Delta t$. Como $P(t_i^*)$ é medida em megawatts e t, em horas, seu produto é medido em megawatts-hora. O mesmo é verdadeiro para o limite. Em geral, a unidade de medida $\int_a^b f(x)\,dx$ é o produto da unidade para $f(x)$ com a unidade para x.

5.4 EXERCÍCIOS

1–4 Verifique, por derivação, que a fórmula está correta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int x \cos x\,dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx - 2a)\sqrt{a+bx} + C$

5–18 Ache a integral indefinida geral.

5. $\displaystyle\int (x^2 + x^{-2})dx$

6. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$

7. $\displaystyle\int (x^3 + 6x + 1)\,dx$

8. $\displaystyle\int x(1 + 2x^4)\,dx$

9. $\displaystyle\int (1 - t)(2 + t^2)\,dt$

10. $\displaystyle\int v(v^2 + 2)^2\,dv$

11. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$

13. $\int (\text{sen}\, x + \text{senh}\, x)dx$

14. $\int (\text{cossec}^2 t - 2e^t)\, dt$

15. $\int (\theta - \text{cossec}\, \theta\, \text{cotg}\, \theta)d\theta$

16. $\int \sec t(\sec t - \text{tg}\, t)\, dt$

17. $\int (1 + \text{tg}^2\alpha)d\alpha$

18. $\int \dfrac{\text{sen}\, 2x}{\text{sen}\, x}\, dx$

19–20 Ache a integral indefinida geral. Ilustre fazendo o gráfico de vários membros da família na mesma tela.

19. $\int (\cos x + \frac{1}{2}x)dx$

20. $\int (e^x - 2x^2)dx$

21–44 Calcule a integral.

21. $\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\, dx$

22. $\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\, dx$

23. $\int_{-1}^0 (2x - e^x)\, dx$

24. $\int_{-2}^0 (u^5 - u^3 + u^2)\, du$

25. $\int_{-2}^2 (3u + 1)^2\, du$

26. $\int_0^4 (2v + 5)(3v - 1)\, dv$

27. $\int_1^4 \sqrt{t}\,(1 + t)\, dt$

28. $\int_0^9 \sqrt{2t}\, dt$

29. $\int_{-2}^{-1} \left(4y^3 + \dfrac{2}{y^3}\right)dy$

30. $\int_1^2 \dfrac{y + 5y^7}{y^3}\, dy$

31. $\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right) dx$

32. $\int_0^5 (2e^x + 4\cos x)\, dx$

33. $\int_1^4 \sqrt{\dfrac{5}{x}}\, dx$

34. $\int_1^9 \dfrac{3x - 2}{\sqrt{x}}\, dx$

35. $\int_0^\pi (4\,\text{sen}\, \theta - 3\cos\theta)\, d\theta$

36. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec\theta - \text{tg}\, \theta\, d\theta$

37. $\int_0^{\pi/4} \dfrac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

38. $\int_0^{\pi/3} \dfrac{\text{sen}\, \theta + \text{sen}\, \theta\, \text{tg}^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta$

39. $\int_1^{64} \dfrac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dt$

40. $\int_{-10}^{10} \dfrac{2e^x}{\text{senh}\, x + \cosh x} dx$

41. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \dfrac{t^2 - 1}{t^4 - 1} dt$

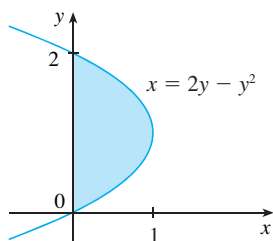
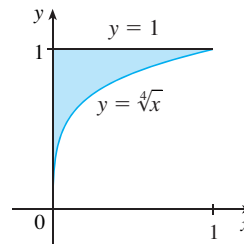
42. $\int_1^2 \dfrac{(x - 1)^3}{x^2} dx$

43. $\int_{-1}^2 (x - 2|x|)\, dx$

44. $\int_0^{3\pi/2} |\text{sen}\, x|\, dx$

45. Use um gráfico para estimar a intersecção com o eixo x da curva $y = x + x^2 - x^4$. A seguir, use essa informação para estimar a área da região que se situa sob a curva e acima do eixo x.

46. Repita o Exercício 45, para a curva $y = 2x + 3x^4 - 2x^6$.

47. A área da região que está à direita do eixo y e à esquerda da parábola $x = 2y - y^2$ (a região sombreada na figura) é dada pela integral $\int_0^2 (2y - y^2)\, dy$. (Gire sua cabeça no sentido horário e imagine a região como estando abaixo da curva $x = 2y - y^2$ de $y = 0$ até $y = 2$.) Ache a área da região.

48. As fronteiras da região sombreada são o eixo y, a reta $y = 1$ e a curva $y = \sqrt[4]{x}$. Ache a área dessa região escrevendo x como uma função de y e integrando em relação a y (como no Exercício 47).

49. Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em quilogramas por ano, o que $\int_0^{10} w'(t)\, dt$ representa?

50. A corrente em um fio elétrico é definida como a derivada da carga: $I(t) = Q'(t)$ (veja o Exemplo 3 da Seção 3.7). O que $\int_a^b I(t)\, dt$ representa?

51. Se vazar óleo de um tanque a uma taxa de $r(t)$ galões por minuto em um instante t, o que $\int_0^{120} r(t)\, dt$ representa?

52. Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n'(t)$ abelhas por semana. O que $100 + \int_0^{15} n'(t)\, dt$ representa?

53. Na Seção 4.7 definimos a função rendimento marginal $R'(x)$ como a derivada da função rendimento $R(x)$, onde x é o número de unidades vendidas. O que $\int_{1000}^{5000} R'(x)\, dx$ representa?

54. Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x milhas do começo dela, o que $\int_3^5 f(x)\, dx$ representa?

55. Se x é medido em metros e $f(x)$, em newtons, quais são as unidades de $\int_0^{100} f(x)\, dx$?

56. Se as unidades para x são metros e as unidades para $a(x)$ são quilogramas por metro, quais são as unidades para da/dx? Quais são as unidades para $\int_2^8 a(x)\, dx$?

57–58 A função velocidade (em metros por segundo) é dada para uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Ache (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo dado.

57. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

58. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

59–60 A função aceleração (em m/s) e a velocidade inicial são dadas para uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Encontre (a) a velocidade no instante t e (b) a distância percorrida durante o intervalo de tempo dado.

59. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

60. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

61. A densidade linear de uma barra de comprimento 4 m é dada por $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida em quilogramas por metro, em que x é medido em metros a partir de uma extremidade da barra. Ache a massa total da barra.

62. A água escoa pelo fundo de um tanque de armazenamento a uma taxa de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minutos, onde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encontre a quantidade de água que escoa do tanque durante os primeiros dez minutos.

63. A velocidade de um carro foi lida de seu velocímetro em intervalos de 10 segundos e registrada na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo carro.

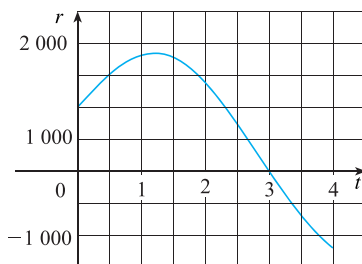
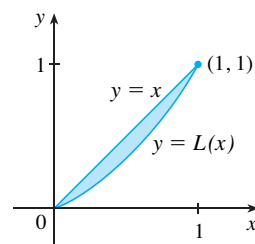
t(s)	v(km/h)	t(s)	v(km/h)
0	0	60	90
10	61	70	85
20	83	80	80
30	93	90	75
40	88	100	72
50	82		

64. Suponha que um vulcão esteja em erupção e que as leituras da taxa $r(t)$ com que materiais sólidos são lançados na atmosfera sejam as dadas na tabela. O tempo t é medido em segundos e a unidade para $r(t)$ é toneladas por segundo.

t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Dê estimativas superior e inferior para a quantidade $Q(6)$ do material proveniente da erupção após 6 segundos.
(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar $Q(6)$.

65. O custo marginal de fabricação de x metros de um certo tecido é $C'(x) = 3 - 0{,}01x + 0{,}000006x^2$ (em dólares por metro). Ache o aumento do custo se o nível de produção for elevado de 2 000 para 4 000 metros.

66. Há um fluxo de água para dentro e para fora de um tanque de armazenamento. A seguir, temos um gráfico que mostra a taxa de troca $r(t)$ do volume de água no tanque, em litros por dia. Se a quantidade de água no tanque no instante de tempo $t = 0$ é 25 000 litros, use a Regra do Ponto Médio para estimar a quantidade de água depois de quatro dias.

67. Os economistas usam uma distribuição acumulada chamada *curva de Lorenz* para descrever a distribuição de renda entre as famílias em um dado país. Tipicamente, uma curva de Lorenz é definida no intervalo [0, 1], tem extremidades (0, 0) e (1, 1) e é contínua, crescente e côncava para cima. Os pontos sobre essa curva são determinados classificando-se todas as famílias pela renda e então calculando a porcentagem de famílias cuja renda é menor ou igual a uma porcentagem dada da renda total do país. Por exemplo, o ponto $(a/100, b/100)$ está sobre a curva de Lorenz se a% de famílias recebe menos do que ou igual a b% da renda total. A *igualdade absoluta* da distribuição de renda ocorreria se a parte mais baixa a% das famílias recebesse a% da renda e, nesse caso, a curva de Lorenz seria a reta $y = x$. A área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$ mede quanto a distribuição de renda difere da igualdade absoluta. O *coeficiente de desigualdade* é a razão da área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$ para a área sob $y = x$.

(a) Mostre que o coeficiente de desigualdade é o dobro da área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$, isto é, mostre que o

$$\text{coeficiente de desigualdade} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

(b) A distribuição de renda para um certo país está representada pela curva de Lorenz definida pela equação

$$L(x) = \tfrac{5}{12}x^2 + \tfrac{7}{12}x$$

Qual é a porcentagem da renda total recebida pelas 50% das famílias que recebem menos? Encontre o coeficiente de desigualdade.

68. Em 7 de maio de 1992 o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo propósito era instalar uma peça nova em um satélite de comunicação do INTELSAT. A tabela dá os dados da velocidade para o ônibus entre o lançamento e a entrada em ação dos foguetes auxiliares.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56,4
Fim da manobra de inclinação	15	97,2
Regulador de pressão a 89%	20	136,2
Regulador de pressão a 67%	32	226,2
Regulador de pressão a 104%	59	403,9
Pressão dinâmica máxima	62	440,4
Separação dos foguetes auxiliares	125	1 265,2

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar esses dados por um polinômio de terceiro grau.
(b) Use o modelo da parte (a) para estimar a altura atingida pela *Endeavour* 125 segundos depois do lançamento.

PROJETO ESCRITO

NEWTON, LEIBNIZ E A INVENÇÃO DO CÁLCULO

Algumas vezes lemos que os inventores do cálculo foram *sir* Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Mas sabemos que as ideias básicas por trás da integração foram investigadas há 2 500 anos pelos antigos gregos, tais como Eudóxio e Arquimedes, e que os métodos para encontrar as tangentes foram inventados por Pierre Fermat (1601-1665) e Isaac Barrow (1630-1677), entre outros. Barrow, professor em Cambridge que teve grande influência sobre Newton, foi o primeiro a entender a relação inversa existente entre a derivação e a integração. O que Newton e Leibniz fizeram foi usar essa relação, na forma do Teorema Fundamental do Cálculo, para desenvolver o cálculo em uma disciplina matemática sistemática. É nesse sentido que é atribuída a Newton e a Leibniz a invenção do cálculo.

Leia sobre as contribuições desses homens em uma ou mais das referências sugeridas e escreva sobre um dentre os três tópicos listados a seguir. Você pode incluir detalhes biográficos, mas o propósito principal de seu relatório deve ser a descrição, em detalhes, de seus métodos e notações. Em particular, você deve consultar os livros que trazem trechos das publicações originais de Newton e Leibniz, traduzidas do latim para o inglês.

- O Papel de Newton no Desenvolvimento do Cálculo
- O Papel de Leibniz no Desenvolvimento do Cálculo
- A Controvérsia entre os Seguidores de Newton e de Leibniz sobre a Primazia na Invenção do Cálculo

Referências

1. BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. *A History of Mathematics*. Nova York: John Wiley, 1987, Capítulo 19.
2. BOYER, Carl. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Nova York: Dover, 1959, Capítulo V.
3. EDWARDS, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, Capítulos 8 e 9.
4. EVES, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics,* 6. ed. Nova York: Saunders, 1990, Capítulo 11.
5. GILLISPIE, C. C. (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's, 1974. Veja o artigo sobre Leibniz de Joseph Hofmann no Volume VIII e o artigo sobre Newton de I. B. Cohen no Volume X.
6. KATZ, Victor. *A History of Mathematics: An Introduction*. Nova York: HarperCollins, 1993, Capítulo 12.
7. KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York: Oxford University Press, 1972, Capítulo 17.

Livros fontes

1. FAUVEL, John; GRAY Jeremy. (eds.) *The History of Mathematics: A Reader.* Londres: MacMillan Press, 1987, Capítulo 12 e 13.
2. SMITH, D. E. (ed.) *A Sourcebook in Mathematics*. Nova York: Dover, 1959, Capítulo V.
3. STRUIK, D. J. (ed.) *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*. Princeton: N.J., Princeton University Press, 1969, Capítulo V.

5.5 REGRA DE SUBSTITUIÇÃO

Por causa do Teorema Fundamental, é importante sermos capazes de encontrar primitivas. Porém, nossas fórmulas de primitivação não mostram como calcular as integrais do tipo

1 $$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

■ Diferenciais foram definidas na Seção 3.10. Se $u = f(x)$, então
$$du = f'(x)\,dx$$

Para encontrar essa integral usamos a estratégia de resolução de problemas de *introduzir alguma coisa extra*. Aqui o "alguma coisa extra" é uma nova variável; mudamos da variável x para uma nova variável u. Suponha que façamos u igual à quantidade sob o sinal de raiz em (1), $u = 1 + x^2$. Então a diferencial de u é $du = 2x\,dx$. Observe que se dx na notação de integral for interpretada como uma diferencial, então a diferencial $2x\,dx$ ocorrerá em (1); portanto, formalmente, sem justificar nossos cálculos, podemos escrever

2 $$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$
$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

Mas agora podemos verificar que temos a resposta correta usando a Regra da Cadeia para derivar a função final da Equação 2:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x = 2x\sqrt{x^2+1}$$

Em geral, esse método funciona sempre que temos uma integral que possa ser escrita na forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Observe que se $F' = f$, então

3 $$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

pois, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = F'(g(x))g'(x)$$

Se fizermos a "mudança de variável" ou "substituição" $u = g(x)$, então da Equação 3 temos

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

ou, escrevendo $F' = f$, obtemos

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Assim, demonstramos a regra a seguir.

4 **REGRA DA SUBSTITUIÇÃO** Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Observe que a Regra da Substituição para a integração foi demonstrada usando a Regra da Cadeia para a derivação. Note também que se $u = g(x)$, então $du = g'(x)\,dx$, portanto uma forma de se recordar a Regra da Substituição é imaginar dx e du em (4) como diferenciais.

Assim, a Regra da Substituição diz que: **é permitido operar com *dx* e *du* após sinais de integração como se fossem diferenciais**.

EXEMPLO 1 Encontre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$.

SOLUÇÃO Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$ porque sua diferencial é $du = 4x^3\, dx$, que, à parte do fator constante 4, ocorre na integral. Assim, usando $x^3\, dx = du/4$ e a Regra da Substituição, temos

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx = \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\, du = \tfrac{1}{4} \int \cos u\, du$$

$$= \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} u + C$$

$$= \tfrac{1}{4} \operatorname{sen}(x^4 + 2) + C$$

■ Verifique a resposta por derivação.

Observe que no estágio final retornamos para a variável original x. □

A ideia por trás da Regra da Substituição é substituir uma integral relativamente complicada por uma mais simples. Isso é obtido mudando-se da variável original x para uma nova variável u, que é uma função de x. Dessa forma, no Exemplo 1 substituímos a integral $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$ pela mais simples $\frac{1}{4} \int \cos u\, du$.

O desafio principal no uso da Regra da Substituição é descobrir uma substituição apropriada. Você deve tentar escolher u como uma função no integrando cuja diferencial também ocorra (exceto por um fator constante). Foi isso que aconteceu no Exemplo 1. Se isso não for possível, tente escolher u como alguma parte complicada do integrando. Achar a substituição correta tem algo de artístico. É normal errar na escolha da substituição; se sua primeira tentativa não funcionar, tente outra substituição.

EXEMPLO 2 Calcule $\int \sqrt{2x + 1}\, dx$.

SOLUÇÃO 1 Seja $u = 2x + 1$. Então $du = 2\, dx$, logo $dx = du/2$. Nesse caso, a Regra da Substituição dá

$$\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \int \sqrt{u}\, \frac{du}{2} = \tfrac{1}{2} \int u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \tfrac{1}{3} (2x + 1)^{3/2} + C$$

SOLUÇÃO 2 Outra substituição possível é $u = \sqrt{2x + 1}$. Então

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x + 1}}, \qquad \text{portanto} \qquad dx = \sqrt{2x + 1}\, du = u\, du$$

(Ou observe que $u^2 = 2x + 1$, logo $2u\, du = 2\, dx$.) Assim

$$\int \sqrt{2x + 1}\, dx = \int u \cdot u\, du = \int u^2\, du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3} (2x + 1)^{3/2} + C$$ □

EXEMPLO 3 Encontre $\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx$.

SOLUÇÃO Seja $u = 1 - 4x^2$. Então $du = -8x\, dx$, portanto $x\, dx = -\frac{1}{8}\, du$ e

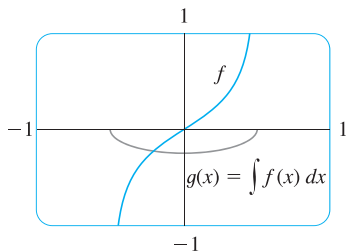



FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}}\,dx = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(2\sqrt{u}\right) + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + C$$

A resposta do Exemplo 3 pode ser verificada por derivação, mas em vez disso vamos verificá-la graficamente. Na Figura 1 usamos um computador para fazer o gráfico do integrando $f(x) = x/\sqrt{1 - 4x^2}$ e de sua integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2}$ (escolhemos o caso $C = 0$). Observe que $g(x)$ decresce quando $f(x)$ é negativa, cresce quando $f(x)$ é positiva e tem seu valor mínimo quando $f(x) = 0$. Portanto, parece razoável, da evidência gráfica, que g seja uma primitiva de f.

EXEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\,dx$.

SOLUÇÃO Se fizermos $u = 5x$, então $du = 5\,dx$, portanto $dx = \frac{1}{5}\,du$. Dessa forma,

$$\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int e^{u}\,du = \frac{1}{5}e^{u} + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C$$ □

EXEMPLO 5 Encontre $\int \sqrt{1 + x^2}\,x^5\,dx$.

SOLUÇÃO Uma substituição apropriada fica mais evidente se fatorarmos x^5 como $x^4 \cdot x$. Seja $u = 1 + x^2$. Então $du = 2x\,dx$, consequentemente $x\,dx = du/2$. Também temos $x^2 = u - 1$, portanto $x^4 = (u - 1)^2$:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\,x^5\,dx = \int \sqrt{1 + x^2}\,x^4 \cdot x\,dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,(u - 1)^2\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,(u^2 - 2u + 1)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}u^{7/2} - 2 \cdot \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \frac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \frac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$$ □

EXEMPLO 6 Calcule $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

SOLUÇÃO Vamos escrever primeiro a tangente em termos de seno e cosseno:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$$

Isso sugere que devemos substituir $u = \cos x$, visto que $du = -\operatorname{sen} x\,dx$ e, portanto, $\operatorname{sen} x\,dx = -\,du$:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$ □

Uma vez que $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, o resultado do Exemplo 6 também pode ser escrito como

5 $$\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

INTEGRAIS DEFINIDAS

Existem dois métodos para se calcular uma integral *definida* por substituição. Um deles consiste em se calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Teorema Fundamental. Por exemplo, usando o resultado do Exemplo 2, temos

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{2x+1}\,dx\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4$$
$$= \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} = \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}$$

Outro método, geralmente preferível, consiste em se alterar os limites de integração ao se mudar a variável.

■ Essa regra diz que quando usamos uma substituição em uma integral definida, devemos colocar tudo em termos da nova variável u, não somente x e dx, mas também os limites de integração. Os novos limites de integração são os valores de u que correspondem a $x = a$ e $x = b$.

6 REGRA DA SUBSTITUIÇÃO PARA AS INTEGRAIS DEFINIDAS Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

DEMONSTRAÇÃO Seja F uma primitiva de f. Então, por (3), $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$; logo, pela Parte 2 do Teorema Fundamental, temos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Mas, aplicando uma segunda vez o TFC2, também temos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = f(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

EXEMPLO 7 Calcule $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ usando (6).

SOLUÇÃO Usando a substituição da Solução 1 do Exemplo 2, temos $u = 2x + 1$ e $dx = du/2$. Para encontrar os novos limites de integração observamos que

$$\text{quando } x = 0,\ u = 2(0) + 1 = 1 \qquad \text{e} \qquad \text{quando } x = 4,\ u = 2(4) + 1 = 9$$

■ A interpretação geométrica do Exemplo 7 está na Figura 2. A substituição $u = 2x + 2$ expande o intervalo $[0, 4]$ por um fator de 2 e translada-o para a direita em uma unidade. A Regra da Substituição mostra que as duas áreas são iguais.

Portanto,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$
$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

Observe que quando usamos (6) não retornamos à variável x após a integração. Simplesmente calculamos a expressão em u entre os valores apropriados de u. □

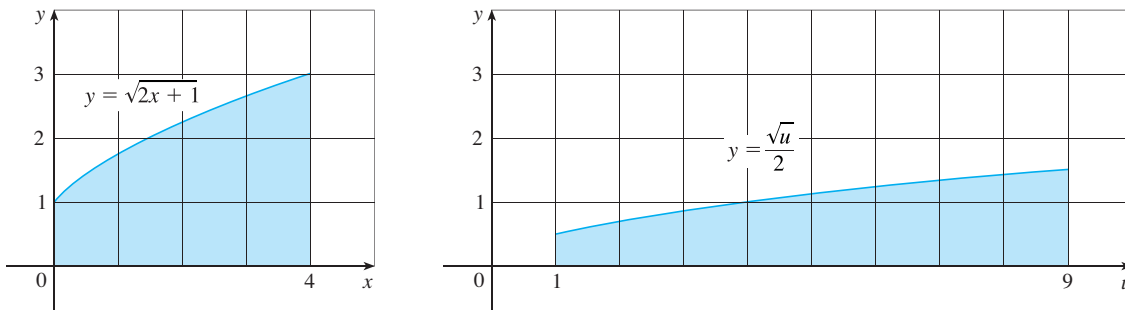



FIGURA 2

■ A integral no Exemplo 8 é uma abreviação para

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\,dx$$

EXEMPLO 8 Calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$.

SOLUÇÃO Seja $u = 3 - 5x$. Então, $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -du/5$. Quando $x = 1$, $u = -2$, e quando $x = 2$, $u = -7$. Assim

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\Bigg]_{-2}^{-7}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$

□

EXEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUÇÃO Vamos fazer $u = \ln x$, pois sua diferencial $du = dx/x$ ocorre na integral. Quando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; quando $x = e$, $u = \ln e = 1$. Assim

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$

□

■ Uma vez que a função $f(x) = (\ln x)/x$ no Exemplo 9 é positiva para $x > 1$, a integral representa a área da região sombreada na Figura 3.

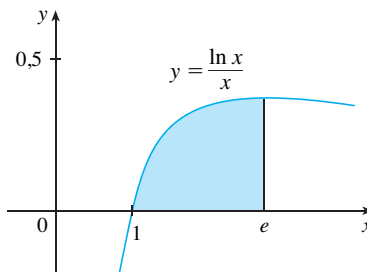



FIGURA 3

SIMETRIA

O próximo teorema usa a Regra da Substituição para Integrais Definidas (6) para simplificar o cálculo de integrais de funções que possuam propriedades de simetria.

> **7** **INTEGRAIS DE FUNÇÕES SIMÉTRICAS** Suponha que f é contínua em $[-a, a]$.
>
> (a) Se f for par $[f(-x) = f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
>
> (b) Se f for ímpar $[f(-x) = -f(x)]$, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Dividimos a integral em duas:

8 $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

Na primeira integral da última igualdade fazemos a substituição $u = -x$. Então, $du = -dx$, e quando $x = -a$, $u = a$. Portanto,

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

e assim sendo a Equação 8 fica

$$\boxed{9} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-u)du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(a) Se f for par, então $f(-u) = f(u)$; logo, da Equação 9 segue que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(b) Se f for ímpar, então $f(-u) = -f(u)$, e a Equação 9 nos dá que

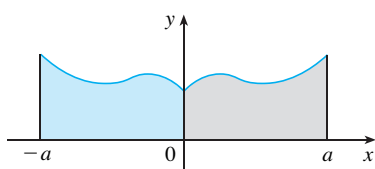
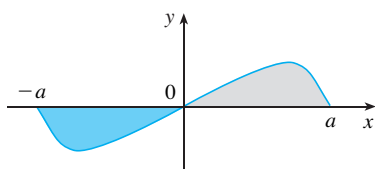
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

(b) f ímpar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 4

O Teorema 7 está ilustrado na Figura 4. Quando f é positiva e par, a parte (a) diz que a área sob $y = f(x)$ de $-a$ até a é o dobro da área de 0 até a em virtude da simetria. Lembre-se de que uma integral $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ pode ser expressa como a área acima do eixo x e abaixo de $y = f(x)$ menos a área abaixo do eixo x e acima da curva. Assim, a parte (b) diz que a integral é 0, pois as áreas se cancelam.

EXEMPLO 10 Uma vez que $f(x) = x^6 + 1$ satisfaz $f(-x) = f(x)$, ela é par, e portanto

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\Big[\tfrac{1}{7}x^7 + x\Big]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7} \qquad \square$$

EXEMPLO 11 Já que $f(x) = (\text{tg}\,x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfaz $f(-x) = -f(x)$, ela é ímpar, e por conseguinte

$$\int_{-1}^{1} \frac{\text{tg}\,x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0 \qquad \square$$

5.5 EXERCÍCIOS

1–6 Calcule a integral fazendo a substituição dada.

1. $\int \cos 3x\,dx, \quad u = 3x$

2. $\int x(4 + x^2)^{10}\,dx, \quad u = 4 + x^2$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \dfrac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \dfrac{4}{(1 + 2x)^3}\,dx, \quad u = 1 + 2x$

6. $\int e^{\text{sen}\,\theta} \cos\theta\,d\theta, \quad u = \text{sen}\,\theta$

7–46 Calcule a integral indefinida.

7. $\int x\,\text{sen}(x^2)\,dx$

8. $\int x^2(x^3 + 5)^9\,dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$

10. $\int (3t + 2)^{2,4}\,dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$

12. $\int \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

13. $\int \dfrac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int e^x\,\text{sen}(e^x)\,dx$

15. $\int \text{sen}\,\pi t\,dt$

16. $\int \dfrac{x}{x^2 + 1}\,dx$

17. $\int \dfrac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$

18. $\int \sec 2\theta\,\text{tg}\,2\theta\,d\theta$

19. $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

20. $\int \dfrac{dx}{ax + b} \quad (a \neq 0)$

21. $\int \dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\int \sqrt{x}\,\text{sen}(1 + x^{3/2})\,dx$

23. $\int \cos\theta\,\text{sen}^6\theta\,d\theta$

24. $\int (1 + \text{tg}\,\theta)^5\sec^2\theta x\,d\theta$

25. $\int e^x\sqrt{1 + e^x}\,dx$

26. $\int e^{\cos t}\,\text{sen}\,t\,dt$

27. $\int \frac{z^2}{\sqrt[3]{1+z^3}}dz$

28. $\int \frac{\text{tg}^{-1}x}{1+x^2}dx$

29. $\int e^{\text{tg}\,x}\sec^2 x\,dx$

30. $\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\,dx$

32. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

33. $\int \sqrt{\text{cotg}\,x}\,\text{cossec}^2 x\,dx$

34. $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\int \frac{\text{sen}\,2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

36. $\int \frac{\text{sen}\,x}{1+\cos^2 x}\,dx$

37. $\int \text{cotg}\,x\,dx$

38. $\int \frac{dt}{\cos^2 t\,\sqrt{1+\text{tg}\,t}}$

39. $\int \sec^3 x\,\text{tg}\,x\,dx$

40. $\int \text{sen}\,t\,\sec^2(\cos t)\,dt$

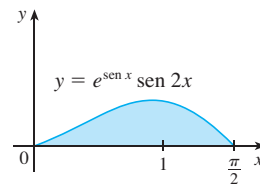
41. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\text{sen}^{-1}x}$

42. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

43. $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$

45. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

46. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

47–50 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável fazendo um gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

47. $\int x(x^2-1)^3 dx$

48. $\int \frac{\text{sen}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

49. $\int \text{sen}^3 x\cos x\,dx$

50. $\int \text{tg}^2\theta\sec^2\theta\,d\theta$

51–70 Calcule a integral definida.

51. $\int_0^2 (x-1)^{25}\,dx$

52. $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx$

53. $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$

54. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

55. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)dt$

56. $\int_{1/6}^{1/2} \text{cossec}\,\pi t\,\text{cotg}\,\pi t\,dt$

57. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \text{tg}^3\theta\,d\theta$

58. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

59. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

60. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\,\text{sen}\,x}{1+x^6}dx$

61. $\int_0^{\pi/3} \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,\text{sen}(\text{sen}\,x)\,dx$

63. $\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\,dx \quad (a > 0)$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

65. $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

66. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

67. $\int_e^{e^4} \frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$

68. $\int_0^{1/2} \frac{\text{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

69. $\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$

70. $\int_0^{T/2} \text{sen}(2\pi t/T-\alpha)\,dt$

71–72 Use um gráfico para dar uma estimativa da área da região que está sob a curva dada. A seguir, encontre a área exata.

71. $y = \sqrt{2x+1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

72. $y = 2\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

73. Calcule $\int_{-2}^2 (x+3)\sqrt{4-x^2}\,dx$ escrevendo-a como uma soma de duas integrais e interpretando uma dessas integrais em termos de uma área.

74. Calcule $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\,dx$ fazendo uma substituição e interpretando a integral resultante em termos de uma área.

75. Quais das seguintes áreas são iguais? Por quê?

76. Um modelo para a taxa de metabolismo basal, em kcal/h, de um homem jovem é $R(t) = 85 - 0{,}18\cos(\pi t/12)$, em que t é o tempo em horas medido a partir de 5 horas da manhã. Qual é o metabolismo basal total deste homem, $\int_0^{24} R(t)dt$, em um período de 24 horas?

77. Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em $t = 0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $r(t) = 100e^{-0{,}01t}$ litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?

78. Uma população de bactérias tem inicialmente 400 bactérias e cresce a uma taxa de $r(t) = (450\,268)e^{1{,}12567t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias existirão após 3 horas?

79. A respiração é cíclica, um ciclo completo que começa pela inalação e acaba pela exalação, durando cerca de 5 s. A taxa máxima do fluxo de ar para dentro dos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em parte, por que a função $f(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}(2\pi t/5)$ tem sido frequentemente usada para modelar a taxa de fluxo de

ar para dentro dos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t.

80. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é

$$\frac{dx}{dt} = 5\,000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Observe que a produção tende a 5 000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inicial é baixa, pois os trabalhadores não estão familiarizados com as novas técnicas.) Ache o número de calculadoras produzidas do começo da terceira semana até o fim da quarta semana.

81. Se f for contínua e $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, encontre $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

82. Se f for contínua e $\int_0^9 f(x)\,dx = 4$, encontre $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$.

83. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $0 < a < b$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

84. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

85. Se a e b forem números positivos, mostre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

86. Se f é contínua em $[0, \pi]$, use a substituição $u = \pi - x$ para demonstrar que

$$\int_0^\pi xf(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,dx$$

87. Use o Exercício 86 para calcular a integral

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

88. (a) Se f é contínua, mostre que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\,dx$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

5 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) Escreva uma expressão para uma soma de Riemann de uma função f. Explique o significado da notação que você usar.
(b) Se $f(x) \geqslant 0$, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.
(c) Se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

2. (a) Escreva a definição de integral definida de uma função contínua de a até b.
(b) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x) \geqslant 0$?
(c) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos? Ilustre com um diagrama.

3. Enuncie ambas as partes do Teorema Fundamental do Cálculo.

4. (a) Enuncie o Teorema da Variação Total.
(b) Se $r(t)$ for a taxa segundo a qual a água escoa para dentro de um reservatório, o que representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

5. Suponha que uma partícula mova-se para a frente e para trás ao longo de uma linha reta com velocidade $v(t)$, medida em metros por segundo, com aceleração $a(t)$.
(a) Qual o significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
(b) Qual o significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
(c) Qual o significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

6. (a) Explique o significado da integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
(b) Qual a conexão entre a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ e a integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

7. Explique exatamente o significado da afirmação “derivação e integração são processos inversos”.

8. Enuncie a Regra da Substituição. Na prática, como fazer uso dela?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

2. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então

$$\int_a^b [f(x)g(x)]\, dx = \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g(x)\, dx\right)$$

3. Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b 5f(x)\, dx = 5\int_a^b f(x)\, dx$$

4. Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b x f(x)\, dx = x\int_a^b f(x)\, dx$$

5. Se f' for contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$, então

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\, dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\, dx}$$

6. Se f for contínua em $[1, 3]$, então $\int_1^3 f'(v)\, dv = f(3) - f(1)$.

7. Se f e g forem contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

8. Se f e g forem diferenciáveis e $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, então $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\text{sen}\, x}{(1 + x^4)^2}\right) dx = 0$

10. $\displaystyle\int_{-5}^{5} (ax^2 + bx + c)\, dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\, dx$

11. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^4}\, dx = -\frac{3}{8}$

12. $\int_0^2 (x - x^3)\, dx$ representa a área sob a curva $y = x - x^3$ de 0 até 2.

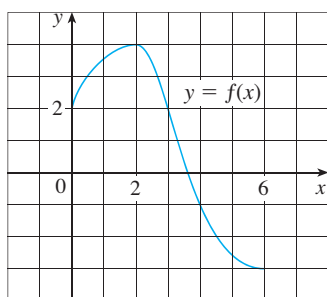
13. Todas as funções contínuas têm derivadas.

14. Todas as funções contínuas têm primitivas.

15. Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\, dx\right) = f(x)$$

EXERCÍCIOS

1. Use o gráfico dado de f para encontrar a soma de Riemann com seis subintervalos. Tome como pontos amostrais (a) as extremidades esquerdas e (b) os pontos médios. Em cada caso faça um diagrama e explique o que representa a soma de Riemann.

2. (a) Calcule a soma de Riemann para

$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

com quatro subintervalos, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.

(b) Use a definição de integral definida (com as extremidades direitas) para calcular o valor da integral

$$\int_0^2 (x^2 - x)\, dx$$

(c) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (b).

(d) Faça um diagrama para explicar o significado geométrico da integral na parte (b).

3. Calcule

$$\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})dx$$

interpretando-a em termos de áreas.

4. Expresse

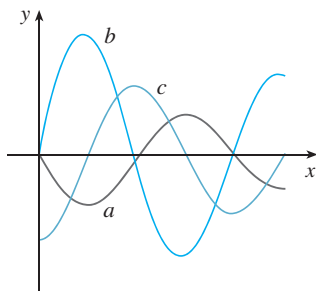
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \text{sen}\, x_i\, \Delta x$$

como uma integral definida no intervalo $[0, \pi]$ e então calcule a integral.

5. Se $\int_0^6 f(x)\, dx = 10$ e $\int_0^4 f(x)\, dx = 7$, ache $\int_4^6 f(x)\, dx$.

SCA **6.** (a) Escreva $\int_1^5 (x + 2x^5)\, dx$ como o limite das somas de Riemann tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. Use um SCA para calcular a soma e o limite.

(b) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (a).

7. A figura a seguir mostra os gráficos de f, f' e $\int_0^x f(t)\, dt$. Identifique cada gráfico e explique suas escolhas.

8. Calcule:

(a) $\int_0^1 \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{arctg} x})dx$ (b) $\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$

(c) $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\operatorname{arctg} t}\,dt$

9–38 Calcule, se existir, a integral.

9. $\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$

10. $\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

11. $\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$

12. $\int_0^1 (1 - x)^9 dx$

13. $\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$

14. $\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\,du$

15. $\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$

16. $\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$

18. $\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\int_0^1 v^2\cos(v^3)\,dv$

20. $\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \operatorname{tg} t}{2 + \cos t}\,dt$

22. $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$

24. $\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$

26. $\int \frac{\operatorname{cossec}^2 x}{1 + \operatorname{cotg} x}\,dx$

27. $\int \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t\,dt$

28. $\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\,dx$

29. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \operatorname{tg} x \ln(\cos x)\,dx$

32. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$

34. $\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\int \frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi/4} (1 + \operatorname{tg} t)^3 \sec^2 t\,dt$

37. $\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$

38. $\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39–40 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique que sua resposta é razoável fazendo o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

39. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$

40. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use um gráfico para dar uma estimativa da área da região que está sob a curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Encontre a seguir a área exata.

42. Faça o gráfico da função $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$ e use-o para conjecturar o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Calcule então a integral para confirmar sua conjectura.

43–48 Encontre a derivada da função.

43. $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1 + t^3}\,dt$

44. $F(x) = \int_x^1 \sqrt{t + \operatorname{sen} t}\,dt$

45. $g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)dt$

46. $g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{1 - t^2}{1 + t^4}\,dt$

47. $y = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^t}{t}\,dt$

48. $y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$

49–50 Use a Propriedade 8 das integrais para estimar o valor da integral.

49. $\int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx$

50. $\int_3^5 \frac{1}{x + 1}\,dx$

51–54 Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade.

51. $\int_0^1 x^2 \cos x\,dx \leqslant \frac{1}{3}$

52. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\int_0^1 e^x \cos x\, dx \leq e - 1$ **54.** $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx \leq \pi/4$

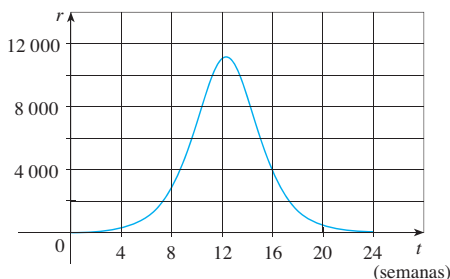
55. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 6$ para aproximar $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)dx$.

56. Uma partícula move-se ao longo de uma reta com uma função velocidade $v(t) = t^2 - t$, onde v é medida em metros por segundo. Ache (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $[0, 5]$.

57. Seja $r(t)$ a taxa do consumo mundial de petróleo em que t é medido em anos começando em $t = 0$ em 1º de janeiro de 2000 e $r(t)$ é medida em barris por ano. O que representa $\int_0^8 r(t)\, dt$?

58. Um radar foi usado para registrar a velocidade de um corredor nos instantes dados na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo corredor durante aqueles 5 segundos.

t (s)	v (ms)	t (s)	v (ms)
0	0	3,0	10,51
0,5	4,67	3,5	10,67
1,0	7,34	4,0	10,76
1,5	8,86	4,5	10,81
2,0	9,73	5,0	10,81
2,5	10,22		

59. Uma população de abelhas cresce a uma taxa de $r(t)$ abelhas por semana e o gráfico de r é mostrado a seguir. Use a Regra do Ponto Médio com seis subintervalos para estimar o crescimento na população de abelhas durante as primeiras 24 semanas.

60. Seja

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } -3 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Calcule $\int_{-3}^1 f(x)\, dx$ interpretando a integral como uma diferença de áreas.

61. Se f for contínua e $\int_0^2 f(x)\, dx = 6$, calcule $\int_0^{\pi/2} f(2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta\, d\theta$.

62. A função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt$ foi introduzida na Seção 5.3. Fresnel também usou a função

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt$$

em sua teoria da difração das ondas de luz.

(a) Em quais intervalos C é crescente?

(b) Em quais intervalos C é côncava para cima?

SCA (c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, com precisão de duas casas decimais:

$$\int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi t^2\right) dt = 0{,}7$$

SCA (d) Desenhe os gráficos de C e S na mesma tela. Como estão relacionados esses gráficos?

63. Estime o valor do número c tal que a área sob a curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ e $x = 1$ seja igual a 1.

64. Suponha que a temperatura em uma barra longa e fina colocada sobre o eixo x seja inicialmente $C/(2a)$ se $|x| \leq a$ e 0 se $|x| > a$. Pode ser mostrado que se a difusividade do calor da barra for k, então sua temperatura em um ponto x no instante t é

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\, du$$

Para achar a distribuição de temperatura que resulta de uma área quente concentrada inicialmente na origem, precisamos calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t)$$

Use a Regra de L'Hôspital para encontrar esse limite.

65. Se f for uma função contínua tal que

$$\int_0^x f(t)\, dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$$

para todo x, ache uma fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponha que h seja uma função tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$, e h'' seja contínua em toda a parte. Calcule $\int_1^2 h''(u)\, du$.

67. Se f for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$2\int_a^b f(x) f'(x)\, dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Encontre $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\, dt$.

69. Se f for contínua em $[0, 1]$, demonstre que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx$$

70. Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9\right]$$

71. Suponha que f seja contínua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ e $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3}$. Encontre o valor da integral $\int_0^1 f^{-1}(y)\, dy$.

Antes de olhar a solução do próximo exemplo, cubra-o e tente resolvê-lo você mesmo.

EXEMPLO 1 Calcule $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \right)$.

SOLUÇÃO Vamos começar por uma análise preliminar dos ingredientes da função. O que acontece com o primeiro fator, $x/(x-3)$, quando x tende a 3? O numerador tende a 3 e o denominador a 0, portanto temos

$$\frac{x}{x-3} \to \infty \quad \text{quando} \quad x \to 3^+ \quad \text{e} \quad \frac{x}{x-3} \to -\infty \quad \text{quando} \quad x \to 3^-$$

O segundo fator tende a $\int_3^3 (\operatorname{sen} t)/t\, dt$, que é 0. Não está claro o que acontece com a função como um todo. (Um fator torna-se grande enquanto o outro torna-se pequeno.) Como devemos proceder?

■ Os princípios para resolução de problemas foram discutidos na página 65.

Um dos princípios da resolução de problemas *é reconhecer alguma coisa familiar*. Haverá uma parte da função que nos lembre de alguma coisa vista antes? Bem, a integral

$$\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

tem x como seu limite superior de integração, e esse tipo de integral ocorre na Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) = f(x)$$

Isso sugere que uma derivação pode estar envolvida.

Uma vez que começamos a pensar sobre a derivação, o denominador $(x - 3)$ lembra-nos de alguma coisa que pode ser familiar: uma das formas de definição de derivada no Capítulo 2 é

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

e com $a = 3$ isso fica

$$F'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3}$$

Logo, qual é a função F em nossa situação? Observe que se definirmos

$$F(x) = \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

então $F(3) = 0$. E o que acontece com o fator x no numerador? Ele é somente uma pista falsa, portanto vamos fatorá-lo e fazer o cálculo:

■ Outra estratégia é usar a Regra de L'Hôspital.

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \right) = \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} \frac{\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt}{x - 3}$$

$$= 3 \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3}$$

$$= 3\,F'(3) = 3\,\frac{\text{sen }3}{3} \qquad \text{(TFC1)}$$

$$= \text{sen }3$$

□

PROBLEMAS

1. Se $x \text{ sen } \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$, onde f é uma função contínua, ache $f(4)$.

2. Encontre o valor mínimo da área da região sob a curva $y = x + 1/x$ de $x = a$ a $x = a + 1{,}5$, para todo $a > 0$.

3. Se f for uma função derivável tal que $f(x)$ nunca seja 0 e $\int_0^x f(t)\, dt = [f(x)]^2$ para todo x, encontre f.

4. (a) Faça os gráficos de vários membros da família de funções $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ e analise as regiões entre essas curvas e o eixo x. Como estão relacionadas as áreas dessas regiões?
(b) Demonstre sua conjectura em (a).
(c) Examine novamente os gráficos da parte (a) e use-os para esboçar a curva traçada pelos vértices (pontos mais altos) da família de funções. Você pode imaginar que tipo de curva ela é?
(d) Ache a equação da curva que você esboçou na parte (c).

5. Se $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + t^3}}\, dt$, em que $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \text{sen}(t^2)]\, dt$, encontre $f'(\pi/2)$.

FIGURA PARA O PROBLEMA 8

6. Se $f(x) = \int_0^x x^2 \text{ sen }(t^2)\, dt$, encontre $f'(x)$.

7. Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 - \tan 2t)^{1/t}\, dt$.

8. A figura mostra duas regiões no primeiro quadrante: $A(t)$ é a área sob a curva $y = \text{sen}(x^2)$ de 0 até t e $B(t)$ é a área do triângulo com vértices O, P e $(t, 0)$. Ache $\lim_{t \to 0^+} A(t)/B(t)$.

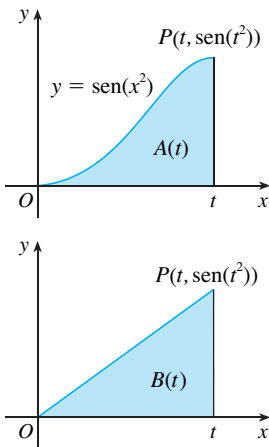
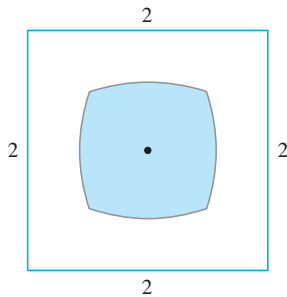
9. Encontre o intervalo $[a, b]$ para o qual o valor da integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\, dx$ é um máximo.

10. Use uma integral para estimar a soma $\sum_{i=1}^{10\,000} \sqrt{i}$.

11. (a) Calcule $\int_0^n [\![x]\!]\, dx$, onde n é um inteiro positivo.
(b) Calcule $\int_a^b [\![x]\!]\, dx$, onde a e b são números reais com $0 \leqslant a < b$.

12. Encontre $\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \left(\int_1^{\text{sen }t} \sqrt{1 + u^4}\, du \right) dt$.

13. Suponha que os coeficientes do polinômio cúbico $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ satisfaçam a equação

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$$

Mostre que a equação $P(x) = 0$ tem uma raiz entre 0 e 1. Você consegue generalizar este resultado para um polinômio de grau n?

14. Um disco circular de raio r é usado em um evaporador e deve girar em um plano vertical. Ele deve ficar parcialmente submerso no líquido de tal forma a maximizar a área molhada exposta do disco. Mostre que o centro do disco deve estar posicionado a uma altura $r/\sqrt{1 + \pi^2}$ acima da superfície do líquido.

15. Demonstre que se f for contínua, então $\int_0^x f(u)(x - u)\, du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du$.

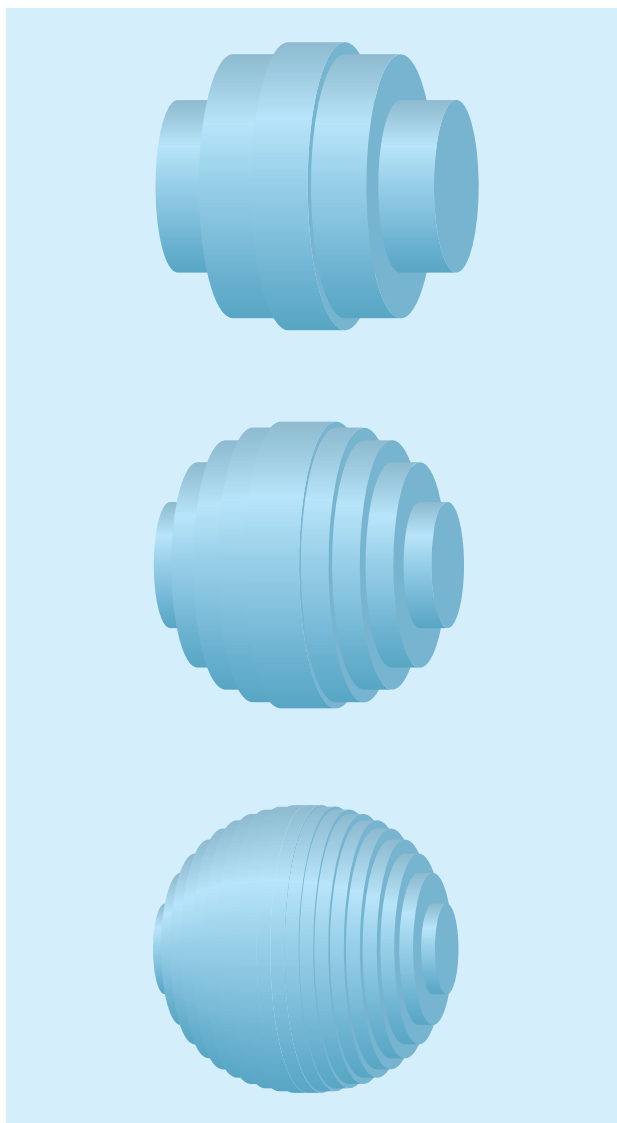
FIGURA PARA O PROBLEMA 16

16. A figura mostra uma região formada por todos os pontos dentro de um quadrado que estão mais próximos de seu centro que de seus lados. Ache a área dessa região.

17. Calcule $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$.

18. Para um número c qualquer, seja $f_c(x)$ o menor dentre os dois números $(x - c)^2$ e $(x - c - 2)^2$. Definimos então $g(c) = \int_0^1 f_c(x)\, dx$. Ache os valores máximo e mínimo de $g(c)$ se $-2 \leqslant c \leqslant 2$.

6

APLICAÇÕES DE INTEGRAÇÃO

"O volume de uma esfera é o limite das somas dos volumes dos cilindros aproximantes."

Neste capítulo exploraremos algumas das aplicações da integral definida, utilizando-a para calcular áreas entre curvas, volumes de sólidos e o trabalho realizado por uma força variável. O tema comum é o seguinte método geral, similar àquele que usamos para encontrar áreas sob as curvas: dividimos uma quantidade Q em um grande número de pequenas partes. Então, aproximamos cada pequena parte por uma quantidade do tipo $f(x_i^*)\ \Delta x$ e, portanto, aproximamos Q por uma soma de Riemann. Daí, tomamos o limite e expressamos Q como uma integral. Finalmente calculamos a integral utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo ou a Regra do Ponto Médio.

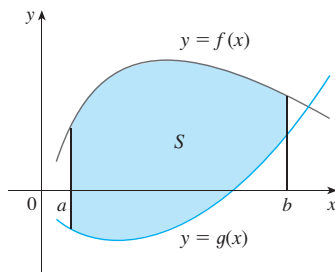



FIGURA 1

$S = \{(x, y) | a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

No Capítulo 5 definimos e calculamos áreas de regiões sob gráficos de funções. Aqui, usaremos as integrais para encontrar áreas de regiões entre gráficos de duas funções.

Considere a região S entre duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, em que f e g são funções contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$. (Veja a Figura 1.)

Assim como fizemos para áreas sob as curvas na Seção 5.1, dividimos S em n faixas de larguras iguais e então aproximamos a i-ésima faixa por um retângulo com base Δx e altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Veja a Figura 2. Se quiséssemos, poderíamos tomar todos os pontos amostrais como as extremidades direitas, de modo que $x_i^* = x_i$.) A soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$$

é, portanto, uma aproximação do que intuitivamente consideramos como a área de S.

(a) Retângulo típico (b) Retângulos aproximantes

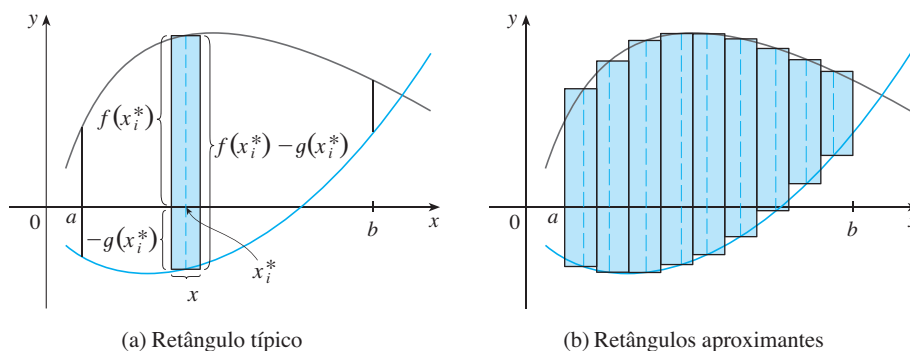



FIGURA 2

Essa aproximação parece se tornar cada vez melhor quando $n \to \infty$. Portanto, definimos a **área** A da região S como o valor-limite da soma das áreas desses retângulos aproximantes.

1 $$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$$

Reconhecemos o limite em (1) como a integral definida de $f - g$. Portanto, temos a seguinte fórmula para a área.

2 A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para todo x em $[a, b]$, é

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Observe que, no caso especial onde $g(x) = 0$, S é a região sob o gráfico de f, e a nossa definição geral de área (1) se reduz à definição anterior (Definição 2 na Seção 5.1).

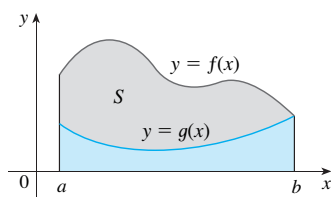
No caso em que f e g forem ambas positivas, você pode ver na Figura 3 por que (2) é verdadeira:

$$A = [\text{área sob } y = f(x)] - [\text{área sob } y = g(x)]$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

FIGURA 3

$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

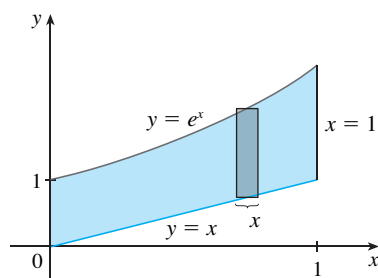
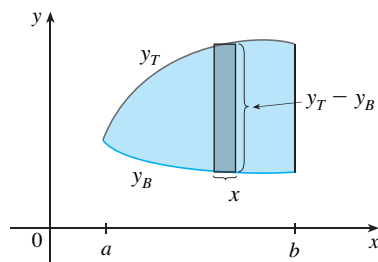
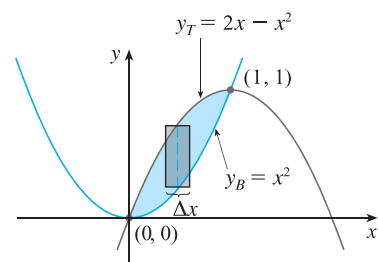



FIGURA 4

FIGURA 5

FIGURA 6

EXEMPLO 1 Encontre a área da região limitada acima por $y = e^x$, e abaixo por $y = x$, e limitada nos lados por $x = 0$ e $x = 1$.

SOLUÇÃO A região é mostrada na Figura 4. A curva limitante superior é $y = e^x$ e a curva limitante inferior, $y = x$. Então, usamos a fórmula (2) da área com $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ e $b = 1$:

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$
$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1{,}5$$

□

Na Figura 4 desenhamos um retângulo aproximante típico com largura Δx como um lembrete do procedimento pelo qual a área é definida em (1). Em geral, quando determinamos uma integral para uma área, é útil esboçar a região para identificar a curva superior y_S, a curva inferior y_I e um retângulo aproximante típico, como na Figura 5. Então, a área de um retângulo típico é $(y_S - y_I)\,\Delta x$ e a equação

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (y_S - y_I)\,\Delta x = \int_a^b (y_S - y_I)\,dx$$

resume o procedimento de adição (no sentido de limite) das áreas de todos os retângulos típicos.

Observe que na Figura 5 a fronteira esquerda se reduz a um ponto, enquanto na Figura 3 a fronteira direita é que se reduz a um ponto. No próximo exemplo ambas as fronteiras se reduzem a um ponto, de modo que a primeira etapa será encontrar a e b.

EXEMPLO 2 Encontre a área da região entre as parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

SOLUÇÃO Primeiro encontramos os pontos de intersecção das parábolas, resolvendo suas equações simultaneamente. Isto resulta em $x^2 = 2x - x^2$ ou $2x^2 - 2x = 0$. Portanto, $2x(x - 1) = 0$; assim, $x = 0$ ou 1. Os pontos de intersecção são (0, 0) e (1, 1).

Vemos na Figura 6 que as fronteiras superior e inferior são

$$y_S = 2x - x^2 \qquad \text{e} \qquad y_I = x^2$$

A área de um retângulo típico é

$$(y_S - y_I)\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\,\Delta x$$

e a região está entre $x = 0$ e $x = 1$. Então, a área total é

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

□

Às vezes é difícil, ou mesmo impossível, encontrar os pontos exatos de intersecção de duas curvas. Como mostramos no exemplo a seguir, podemos usar uma calculadora gráfica ou um computador para encontrar valores aproximados para os pontos de intersecção e então prosseguir como anteriormente.

EXEMPLO 3 Encontre a área aproximada da região limitada pelas curvas e $y = x/\sqrt{x^2 + 1}$ e $y = x^4 - x$.

SOLUÇÃO Se tentássemos encontrar os pontos exatos de intersecção, teríamos de resolver a equação

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = x^4 - x$$

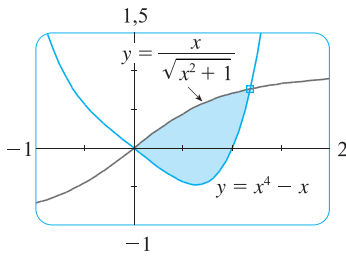



FIGURA 7

Essa parece ser uma equação muito difícil de resolver exatamente (de fato, é impossível), então usamos uma calculadora gráfica para desenhar os gráficos das duas curvas na Figura 7. Um ponto de intersecção é a origem. Dando um *zoom* em direção do outro ponto de intersecção, descobrimos que $x \approx 1{,}18$. (Se mais precisão fosse requerida, poderíamos usar o método de Newton ou outro método de determinar raízes, se disponível em nossa calculadora gráfica.) Assim, uma aproximação para a área entre as curvas é

$$A \approx \int_0^{1{,}18} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x^4 - x) \right] dx$$

Para integrar o primeiro termo, utilizamos a substituição $u = x^2 + 1$. Então, $du = 2x\,dx$, e quando $x = 1{,}18$, temos $u \approx 2{,}39$. Logo,

$$A \approx \tfrac{1}{2} \int_1^{2{,}39} \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1{,}18} (x^4 - x)\,dx$$

$$= \sqrt{u}\,\Big]_1^{2{,}39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1{,}18}$$

$$= \sqrt{2{,}39} - 1 - \frac{(1{,}18)^5}{5} - \frac{(1{,}18)^2}{2}$$

$$\approx 0{,}785$$

□

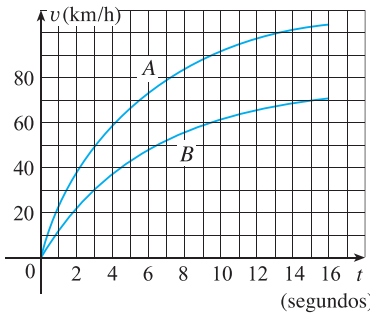



FIGURA 8

EXEMPLO 4 A Figura 8 mostra as curvas de velocidade de dois carros A e B, que partem lado a lado e se movem ao longo da mesma estrada. O que a área entre as curvas representa? Use a Regra do Ponto Médio para estimá-la.

SOLUÇÃO Sabemos da Seção 5.4 que a área sob a curva de velocidade A representa a distância percorrida pelo carro A durante os primeiros 16 segundos. Do mesmo modo, a área sob a curva B é a distância percorrida pelo carro B durante o mesmo período de tempo. Assim, a área entre essas curvas, que é a diferença entre as áreas sob as curvas, é a distância entre os carros após 16 segundos. Obtemos as velocidades a partir do gráfico e as convertemos para metros por segundo ($1 \text{ km/h} = \frac{1\,000}{3\,600}$ m/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	10,4	16,5	20,4	23,2	25,6	27,1	28,0	29,0
v_B	0	6,4	10,4	13,4	15,5	17,1	18,3	19,2	19,8
$v_A - v_B$	0	4,0	6,1	7,0	7,7	8,5	8,8	8,8	9,2

Usamos a Regra do Ponto Médio com $n = 4$ intervalos, de forma que $\Delta t = 4$. Os pontos médios dos intervalos são $\bar{t}_1 = 2$, $\bar{t}_2 = 6$, $\bar{t}_3 = 10$ e $\bar{t}_4 = 14$. Estimamos a distância entre os carros após 16 segundos da seguinte forma:

$$\int_0^{16} (v_A - v_B)\,dt \approx \Delta t\,[4{,}0 + 7{,}0 + 8{,}5 + 8{,}8]$$
$$= 4(28{,}3) = 113{,}2 \text{ m}$$

□

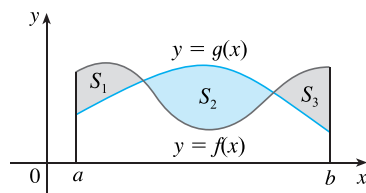



FIGURA 9

Para encontrar a área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geqslant g(x)$ para alguns valores de x, mas $g(x) \geqslant f(x)$ para outros valores de x, dividimos a região S dada em várias regiões $S_1, S_2, \ldots$ com áreas $A_1, A_2, \ldots$ como mostrado na Figura 9. Então, definimos a área da região S como a soma das áreas das regiões menores $S_1, S_2, \ldots$, ou seja, $A = A_1 + A_2 + \cdots$. Como

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{quando} \quad f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{quando} \quad g(x) \geqslant f(x) \end{cases}$$

temos a seguinte expressão para A.

> **3** A área entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre $x = a$ e $x = b$ é
>
> $$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

Quando calculamos a integral em (3), contudo, ainda devemos dividi-la em integrais correspondentes a $A_1, A_2, \ldots$.

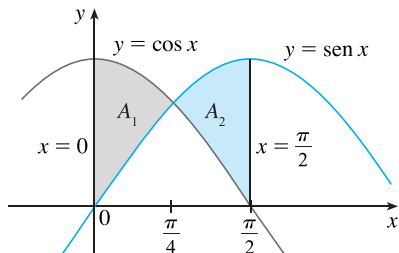



FIGURA 10

EXEMPLO 5 Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.

SOLUÇÃO Os pontos de intersecção ocorrem quando $\operatorname{sen} x = \cos x$, isto é, quando $x = \pi/4$ (porque $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$). A região está esboçada na Figura 10. Observe $\cos x \geqslant \operatorname{sen} x$ quando $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$, mas $\operatorname{sen} x \geqslant \cos x$ quando $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Portanto, a área pedida é

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \operatorname{sen} x|\,dx = A_1 + A_2 \\
&= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx \\
&= \Big[\operatorname{sen} x - \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2\sqrt{2} - 2
\end{aligned}$$

Neste exemplo particular, poderíamos ter economizado trabalho observando que a região é simétrica em relação a $x = \pi/4$ e então

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$$ □

Algumas regiões são mais bem tratadas considerando x como uma função de y. Se uma região é limitada por curvas com equações $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ e $y = d$, em que f e g são contínuas e $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$ (veja a Figura 11), então sua área é

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

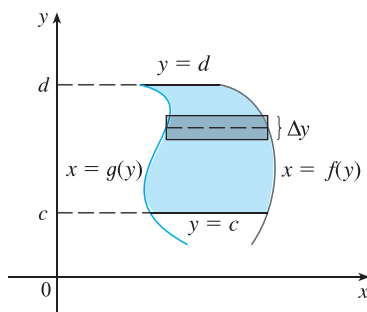
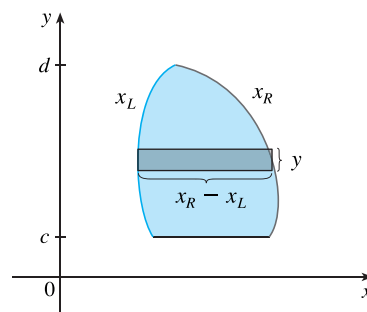



FIGURA 11 **FIGURA 12**

Se escrevermos x_D para a fronteira direita e x_E para a fronteira esquerda, então, como a Figura 12 ilustra, teremos

$$A = \int_c^d (x_D - x_E)\,dy$$

Aqui um retângulo aproximante típico tem dimensões $x_D - x_E$ e Δy.

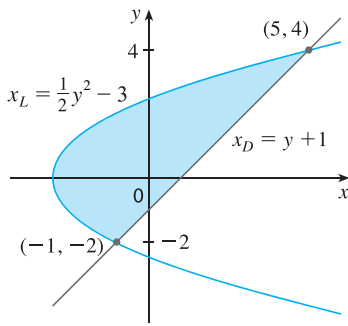
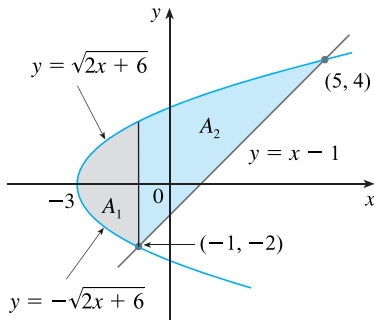



FIGURA 13

EXEMPLO 6 Encontre a área limitada pela reta $y = x - 1$ e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUÇÃO Resolvendo as duas equações, descobrimos que os pontos de intersecção são $(-1, -2)$ e $(5, 4)$. Isolamos x na equação da parábola e observamos pela Figura 13 que as curvas de fronteira esquerda e direita são

$$x_E = \frac{1}{2}y^2 - 3 \qquad x_D = y + 1$$

Devemos integrar entre os valores apropriados de y, $y = -2$ e $y = 4$. Assim,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{4} (x_D - x_E)\, dy \\
&= \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\
&= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\Bigg]_{-2}^{4} \\
&= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18
\end{aligned}$$

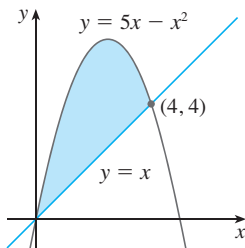
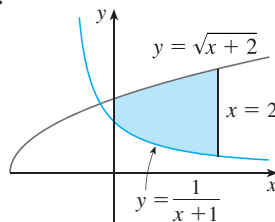
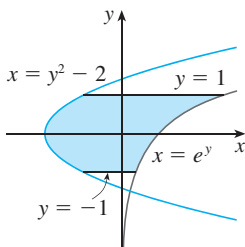
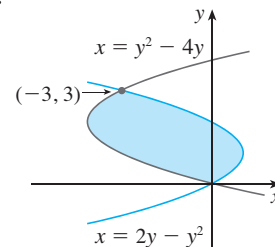
□

FIGURA 14

Poderíamos ter encontrado a área no Exemplo 6 integrando em relação a x em vez de y, mas o cálculo é muito mais complicado. Isso significaria dividir a região em duas e calcular as áreas A_1 e A_2 na Figura 14. O método que usamos no Exemplo 6 é *muito* mais fácil.

6.1 EXERCÍCIOS

1–4 Encontre as áreas da região sombreada.

1.

2.

3.

4.

5–28 Esboce a região delimitada pelas curvas dadas. Decida quando integrar em relação a x ou a y. Desenhe um retângulo aproximante típico e coloque sua altura e largura. Então, calcule a área da região.

5. $y = x + 1,\quad y = 9 - x^2,\quad x = -1,\quad x = 2$

6. $y = \operatorname{sen} x,\quad y = e^x,\quad x = 0,\quad x = \pi/2$

7. $y = x,\quad y = x^2$

8. $y = x^2,\quad y = x^4$

9. $y = 1/x,\quad y = 1/x^2,\quad x = 2$

10. $y = 1 + \sqrt{x},\quad y = (3 + x)/3$

11. $y = x^2,\quad y^2 = x$

12. $y = x^2,\quad y = 4x - x^2$

13. $y = 12 - x^2,\quad y = x^2 - 6$

14. $y = \cos x,\quad y = 2 - \cos x,\quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $y = \operatorname{tg} x,\quad y = 2 \operatorname{sen} x,\quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

16. $y = x^3 - x,\quad y = 3x$

17. $y = \sqrt{x},\quad y = \frac{1}{2}x,\quad x = 9$

18. $y = x^2 + 1,\quad y = 3 - x^2,\quad x = -2,\quad x = 2$

19. $y = 2y^2,\quad x = 4 + y^2$

20. $4x + y^2 = 12,\quad x = y$

21. $x = 1 - y^2,\quad x = y^2 - 1$

22. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2),\quad x = y$

23. $y = \cos x,\quad x = \operatorname{sen} 2x,\quad x = 0,\quad x = \pi/2$

24. $y = \cos x$, $y = 1 - \cos x$ $0 \leqslant x \leqslant \pi$

25. $y = x^2$, $y = 2/(x^2 + 1)$

26. $y = |x|$, $y = x^2 - 2$

27. $y = 1/x$, $y = x$, $y = \frac{1}{4}x$, $x > 0$

28. $y = 3x^2$, $y = 8x^2$, $4x + y = 4$, $x \geqslant 0$

29–30 Use o cálculo para encontrar a área do triângulo com os vértices dados.

29. $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(-1, 6)$

30. $(0, 5)$, $(2, -2)$, $(5, 1)$

31–32 Calcule a integral e interprete-a como a área de uma região. Esboce a região.

31. $\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos 2x|\, dx$

32. $\int_0^4 |\sqrt{x + 2} - x|\, dx$

33–34 Use a Regra do Ponto Médio com $n = 4$ para aproximar a área de uma região limitada pelas curvas dadas.

33. $y = \operatorname{sen}^2(\pi x/4)$, $y = \cos^2(\pi x/4)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

34. $y = \sqrt[3]{16 - x^3}$, $y = x$, $x = 0$

35–38 Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas x dos pontos de intersecção das curvas dadas. A seguir, encontre a área aproximada da região limitada pelas curvas.

35. $y = x \operatorname{sen}(x^2)$, $y = x^4$

36. $y = e^x$, $y = 2 - x^2$

37. $y = 3x^2 - 2x$, $y = x^3 - 3x + 4$

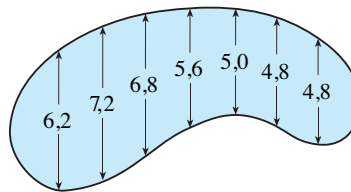
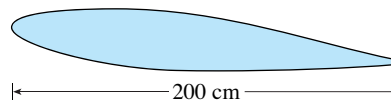
38. $y = x \cos x$, $y = x^{10}$

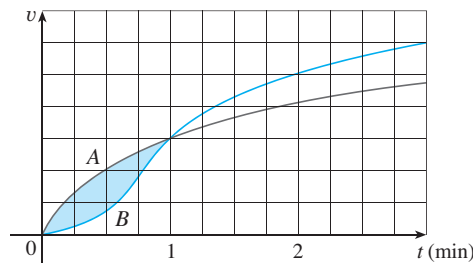
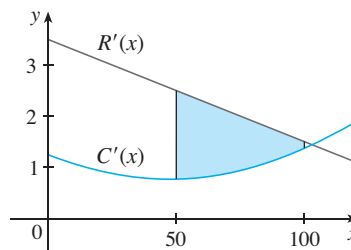
SCA **39.** Use um sistema de computação algébrica para encontrar a área exata da região delimitada pelas curvas $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ e $y = x$.

40. Faça um esboço da região no plano xy definida pelas inequações $x - 2y^2 \geqslant 0$, $1 - x - |y| \geqslant 0$ e encontre sua área.

41. Os carros de corrida dirigidos por Cristina e Laís estão lado a lado na largada de uma corrida. A tabela mostra as velocidades de cada carro (em quilômetros por hora) durante os primeiros 10 segundos da corrida. Use a Regra do Ponto Médio para estimar quão mais longe Laís vai do que Cristina durante os primeiros 10 segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	110	128
1	32	35	7	120	138
2	51	59	8	130	150
3	74	83	9	138	157
4	86	98	10	144	163
5	99	114			

42. As larguras (em metros) de uma piscina com o formato de rim foram medidas a intervalos de 2 metros, como indicado na figura. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a área da piscina.

43. É mostrada a seção transversal da asa de um avião. As medidas da espessura da asa a cada 20 centímetros são 5,8, 20,3, 26,7, 29,0, 27,6, 27,3, 23,8, 20,5, 15,1, 8,7 e 2,8. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a área da seção transversal da asa.

44. Se a taxa de natalidade de uma população for $b(t) = 2\,200e^{0{,}024t}$ pessoas por ano e a taxa de mortalidade for $d(t) = 1\,460e^{0{,}018t}$ pessoas por ano, encontre a área entre estas curvas para $0 \leqslant t \leqslant 10$. O que esta área representa?

45. Dois carros, A e B, largam lado a lado e aceleram a partir do repouso. A figura mostra os gráficos de suas funções velocidade.
(a) Qual carro estará na frente após 1 minuto? Explique.
(b) Qual o significado da área da região sombreada?
(c) Qual carro estará na frente após 2 minutos? Explique.
(d) Estime quando os carros estarão novamente lado a lado.

46. A figura mostra os gráficos da função receita marginal R' e da função custo marginal C' de um fabricante. [Lembre-se de que, da Seção 4.7, $R(x)$ e $C(x)$ representam a receita e o custo quando x unidades são manufaturadas. Suponha que R e C são medidos em milhares de dólares.] Qual o significado da área da região sombreada? Use a Regra do Ponto Médio para estimar o valor dessa quantidade.

47. A curva com a equação $y^2 = x^2(x + 3)$ é chamada **cúbica de Tschirnhausen**. Se você colocar essa curva em um gráfico, verá que parte dela forma um laço. Encontre a área dentro desse laço.

48. Encontre a área da região limitada pela parábola $y = x^2$, pela reta tangente a essa parábola em $(1, 1)$ e pelo eixo x.

49. Encontre o número b tal que a reta $y = b$ divida a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões de áreas iguais.

50. (a) Encontre o número a tal que a reta $x = a$ bissecte a área sob a curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

(b) Encontre o número b tal que a reta $y = b$ bissecte a área da parte (a).

51. Encontre os valores de c tal que a área da região limitada pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja 576.

52. Suponha que $0 < c < \pi/2$. Para qual valor de c a área da região limitada pelas curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$ e $x = 0$ é igual à área da região limitada pelas curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ e $y = 0$?

53. Para quais valores de m a reta $y = mx$ e a curva $y = x/(x^2 + 1)$ delimitam uma região? Encontre a área da região.

6.2 VOLUMES

Na tentativa de encontrar o volume de um sólido, nos deparamos com o mesmo tipo de problema que para calcular áreas. Temos uma ideia intuitiva do significado de volume, mas devemos torná-la precisa usando o cálculo para chegar à definição exata de volume.

Começamos com um sólido simples chamado **cilindro** (ou, mais precisamente, um *cilindro reto*). Como ilustrado na Figura 1(a), um cilindro é limitado por uma região plana B_1, denominada **base**, e uma região congruente B_2 em um plano paralelo. O cilindro consiste em todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base, que unem B_1 a B_2. Se a área da base é A e a altura do cilindro (a distância de B_1 a B_2) é h, então o volume V do cilindro é definido como

$$V = Ah$$

Em particular, se a base é um círculo com raio r, então o cilindro é um cilindro circular com o volume $V = \pi r^2 h$ [veja a Figura 1(b)], e se a base é um retângulo com comprimento l e largura w, então o cilindro é uma caixa retangular (também conhecida como *paralelepípedo retangular*) com o volume $V = lwh$ [veja a Figura 1(c)].

(a) Cilindro
$V = Ah$

(b) Cilindro circular
$V = \pi r^2 h$

(c) Caixa retangular
$V = lwh$

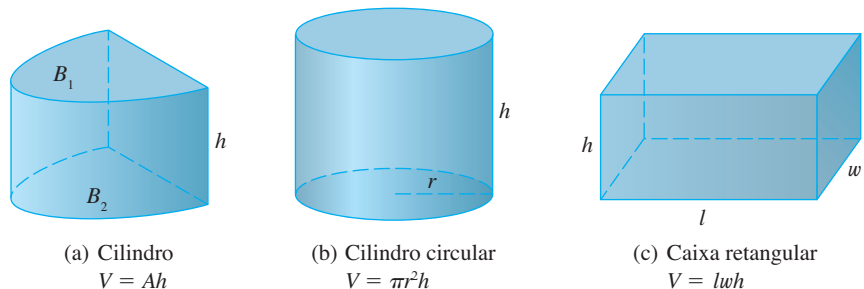



FIGURA 1

Para um sólido S que não é um cilindro, primeiro "cortamos" S em pedaços e aproximamos cada pedaço por um cilindro. Estimamos o volume de S adicionando os volumes dos cilindros. Chegamos ao volume exato de S por um processo de limite no qual o número de partes se torna grande.

Começamos interceptando S com um plano e obtemos uma região plana chamada **seção transversal** de S. Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano P_x perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde $a \leqslant x \leqslant b$. (Veja a Figura 2. Pense em fatiar S por x e calcular a área de uma fatia.) A área da secção transversal $A(x)$ varia quando x aumenta de a até b.

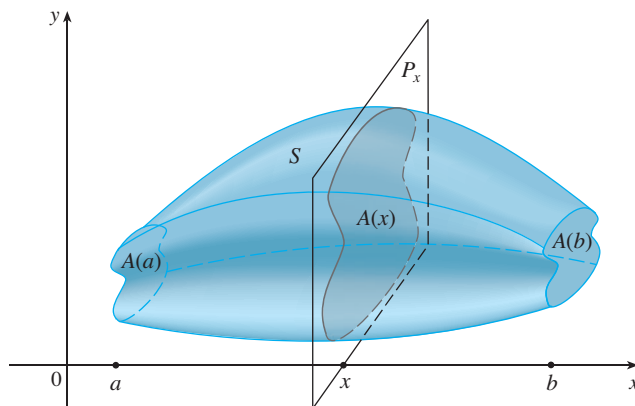



FIGURA 2

Vamos dividir S em n fatias de larguras iguais a Δx usando os planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$ para fatiar o sólido. (Pense em fatiar um filão de pão.) Se escolhermos pontos amostrais x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, poderemos aproximar a i-ésima fatia S_i (a parte de S que está entre os planos $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i}) a um cilindro com área de base $A(x_i^*)$ e "altura" Δx. (Veja a Figura 3.)

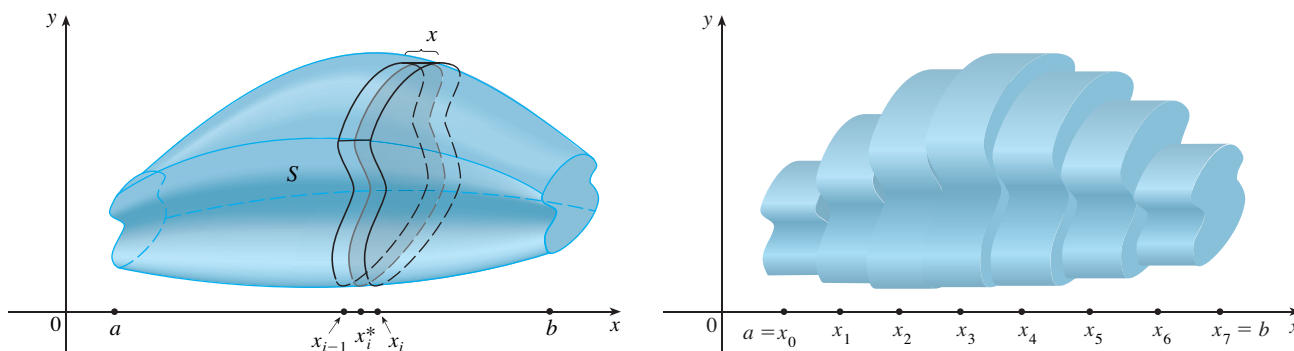



FIGURA 3

O volume desse cilindro é $A(x_i^*)\Delta x$, assim uma aproximação para a nossa concepção intuitiva de volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x$$

Adicionando os volumes dessas fatias, obtemos uma aproximação para o volume total (isto é, o que pensamos intuitivamente como volume):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x$$

Essa aproximação parece melhorar quando $n \to \infty$. (Pense nas fatias tornando-se cada vez mais finas.) Portanto, *definimos* o volume como o limite dessas somas quando $n \to \infty$. Mas reconhecemos o limite da soma de Riemann como uma integral definida, e dessa forma temos a seguinte definição.

■ Pode-se demonstrar que essa definição é independente de como S se situa em relação ao eixo x. Ou seja, não importa como fatiamos S em planos paralelos, sempre teremos o mesmo resultado para V.

DEFINIÇÃO DO VOLUME Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)\, dx$$

Quando usamos a fórmula de volume $V = \int_a^b A(x)\, dx$ é importante lembrar que $A(x)$ é a área de uma secção transversal móvel, obtida fatiando em x, perpendicularmente ao eixo x.

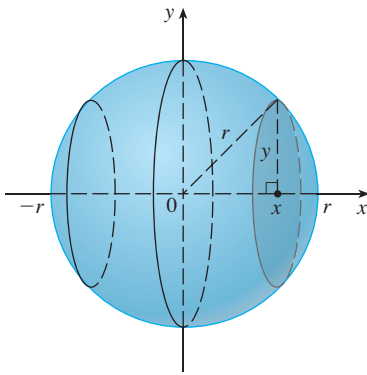



FIGURA 4

Observe que, para um cilindro, a área da secção transversal é constante: $A(x) = A$ para todo x. Assim, da nossa definição de volume, resulta que $V = \int_a^b A\,dx = A(b-a)$; e isso coincide com a fórmula $V = Ah$.

EXEMPLO 1 Mostre que o volume de uma esfera de raio r é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

SOLUÇÃO Se colocarmos a esfera de maneira que o seu centro esteja na origem (veja a Figura 4), então o plano P_x intercepta a esfera em um círculo cujo raio (pelo Teorema de Pitágoras) é $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Assim, a área da secção transversal é

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Usando a definição de volume com $a = -r$ e $b = r$, temos

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(O integrando é par.)}$$

$$= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

□

A Figura 5 ilustra a definição de volume quando o sólido é uma esfera com raio $r = 1$. Pelo resultado do Exemplo 1, sabemos que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi \approx 4{,}18879$. Aqui, as fatias são cilindros circulares (*discos*), e as três partes da Figura 5 mostram as interpretações geométricas das somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \bar{x}_i^2)\Delta x$$

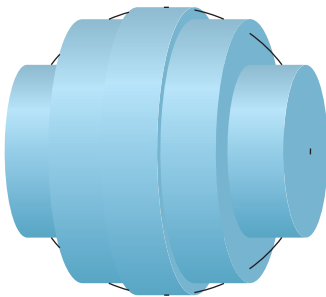
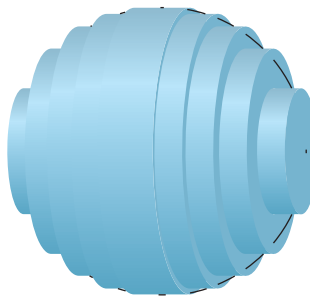
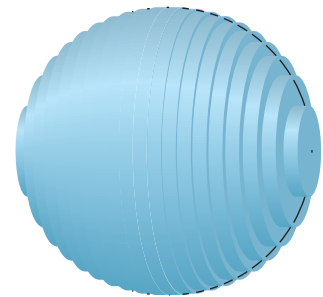
quando $n = 5$, 10, e 20, se escolhermos os pontos amostrais x_i^* como os pontos médios $\bar{x}_i$. Observe que quando aumentamos o número de cilindros aproximantes, a correspondente soma de Riemann torna-se mais próxima do volume verdadeiro.

(a) Usando 5 discos, $V \approx 4{,}2726$

(b) Usando 10 discos, $V \approx 4{,}2097$

(c) Usando 20 discos, $V \approx 4{,}1940$

FIGURA 5 Aproximação do volume de uma esfera de raio 1

EXEMPLO 2 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 até 1. Ilustre a definição de volume esboçando um cilindro aproximante típico.

SOLUÇÃO A região é exposta na Figura 6(a). Se fizermos a rotação em torno do eixo x, obteremos o sólido mostrado na Figura 6(b). Quando fatiamos no ponto x, obtemos um disco com raio $\sqrt{x}$. A área dessa secção transversal é

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

e o volume do cilindro aproximante (um disco com espessura Δx) é

$$A(x)\Delta x = \pi x \Delta x$$

O sólido está entre $x = 0$ e $x = 1$; assim, o seu volume é

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

■ Obtivemos uma resposta razoável no Exemplo 2? Para verificar o nosso trabalho, vamos trocar a região dada por um quadrado de base $[0,1]$ e altura 1. Se fizermos a rotação desse quadrado, obteremos um cilindro com raio 1, altura 1 e volume $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. Calculamos que o sólido dado tem metade desse volume. Isso parece estar certo.

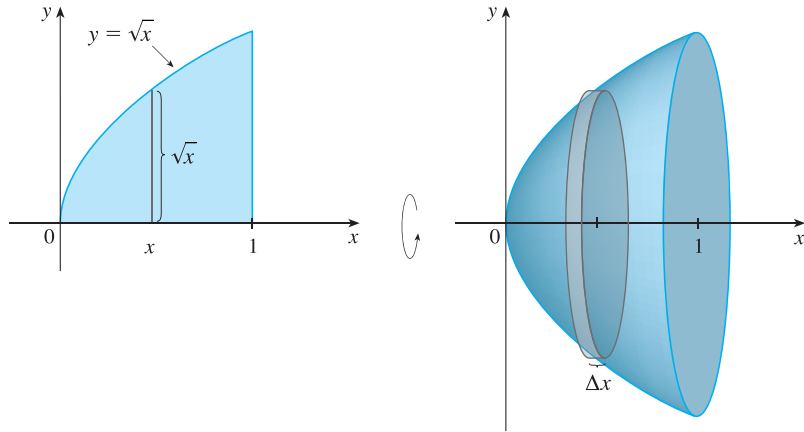



FIGURA 6

EXEMPLO 3 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$ em torno do eixo y.

SOLUÇÃO A região é mostrada na Figura 7(a) e o sólido resultante é mostrado na Figura 7(b). Como a região é girada ao redor do eixo y, faz sentido fatiar o sólido perpendicularmente ao eixo y e, portanto, integrar em relação a y. Se fatiarmos a uma altura y, obteremos um disco circular com raio x, onde $x = \sqrt[3]{y}$. Então, a área da seção transversal em y é

$$A(y) = \pi x^2 = \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \pi y^{2/3}$$

e o volume do cilindro aproximante mostrado na Figura 7(b) é

$$A(y)\Delta y = \pi y^{2/3}\,\Delta y$$

Como o sólido está entre $y = 0$ e $y = 8$, seu volume é

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}\,y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

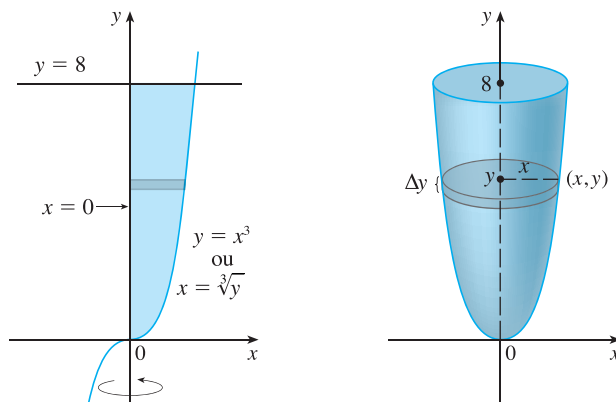



FIGURA 7

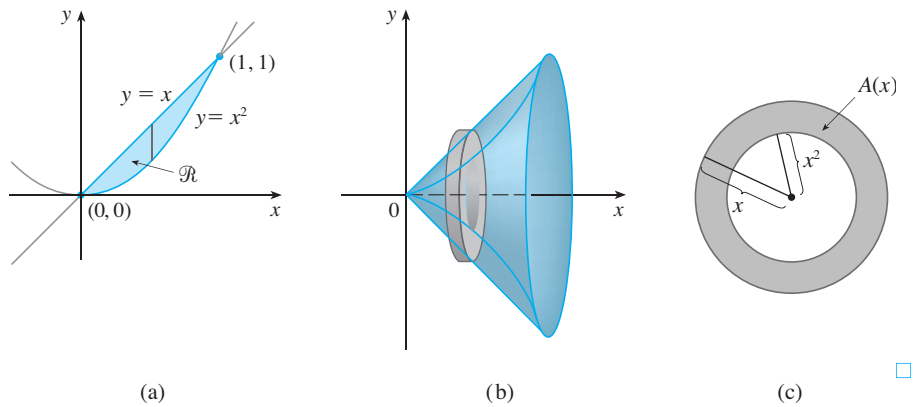
EXEMPLO 4 A região $\mathcal{R}$, limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$, é girada em torno do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

SOLUÇÃO As curvas $y = x$ e $y = x^2$ se interceptam nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. A região entre esses pontos, o sólido de rotação e a secção transversal perpendicular ao eixo x são mostrados na Figura 8. A secção transversal no plano P_x tem o formato de uma *arruela* (um anel) com raio interno x^2 e raio externo x, de modo que calculamos a área da secção transversal subtraindo a área do círculo interno da área do círculo externo:

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Portanto, temos

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

FIGURA 8 (a) (b) (c)

EXEMPLO 5 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do Exemplo 4 em torno da reta $y = 2$.

SOLUÇÃO O sólido e a secção transversal são mostrados na Figura 9. Novamente, a secção transversal é uma arruela, mas dessa vez o raio interno é $2 - x$ e o raio externo é $2 - x^2$.

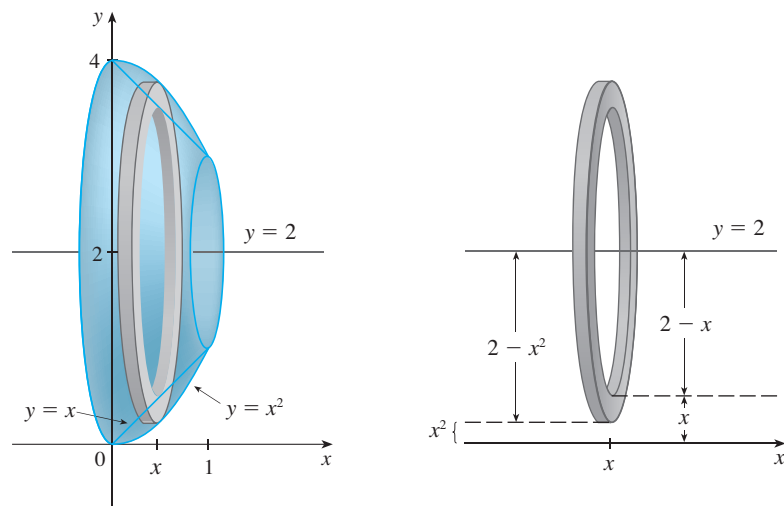



FIGURA 9

A área de secção transversal é

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

e assim o volume de S é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi\int_0^1 \left[(2-x^2)^2-(2-x)^2\right] dx \\ &= \pi\int_0^1 (x^4-5x^2+4x)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5}-5\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

□

Os sólidos nos Exemplos 1–5 são todos chamados **sólidos de revolução**, porque são obtidos pela rotação de uma região em torno de um eixo. Em geral, calculamos o volume de um sólido de revolução usando a fórmula básica da definição

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad \text{ou} \qquad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

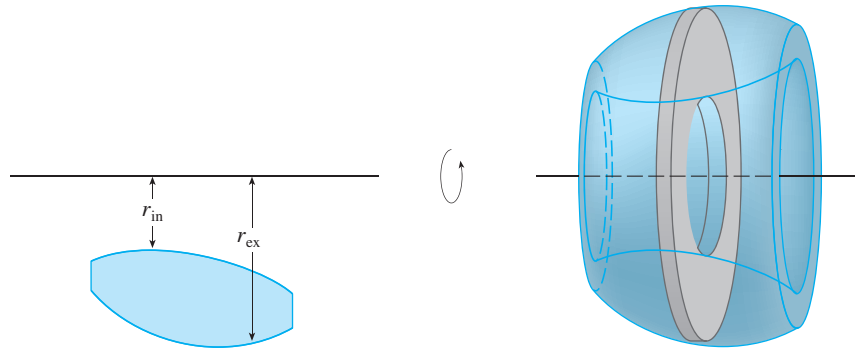
e encontramos a área da secção transversal $A(x)$ ou $A(y)$ por uma das seguintes maneiras:

- Se a secção transversal é um disco (como nos Exemplos 1–3), encontramos o raio do disco (em termos de x ou y) e usamos

$$A = \pi\,(\text{raio})^2$$

- Se a secção transversal é uma arruela (como nos Exemplos 4 e 5), encontramos o raio interno r_{in} e o raio externo r_{ex} a partir de um esboço (como nas Figuras 8, 9 e 10), e calculamos a área da arruela subtraindo a área do disco interno da área do disco externo:

$$A = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2$$

FIGURA 10

O próximo exemplo ilustra melhor o procedimento.

EXEMPLO 6 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região no Exemplo 4 em torno da reta $x = -1$.

SOLUÇÃO A Figura 11 mostra uma secção transversal horizontal. É uma arruela com raio interno $1 + y$ e raio externo $1 + \sqrt{y}$; assim, a área de seção transversal é

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2 \\ &= \pi\left(1+\sqrt{y}\right)^2 - \pi(1+y)^2 \end{aligned}$$

O volume é

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - (1 + y)^2\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) dy = \pi \left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

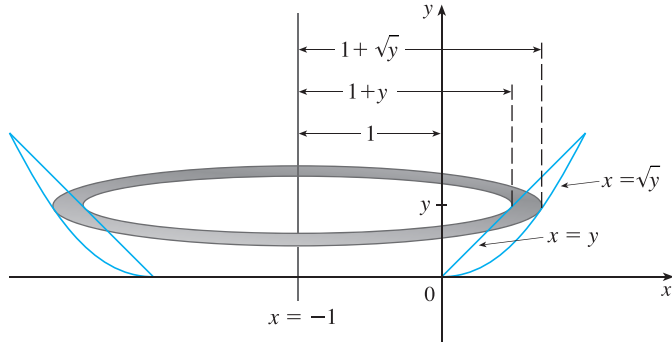



FIGURA 11

□

Agora encontraremos os volumes de três sólidos que *não* são de revolução.

EXEMPLO 7 A Figura 12 mostra um sólido com base circular de raio 1. Secções transversais paralelas perpendiculares à base são triângulos equiláteros. Encontre o volume do sólido.

SOLUÇÃO Consideremos o círculo como $x^2 + y^2 = 1$. O sólido, sua base e uma secção trans-

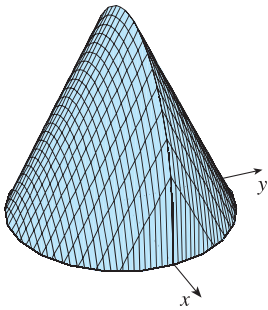



FIGURA 12
Gráfico gerado por computador do sólido descrito no Exemplo 7

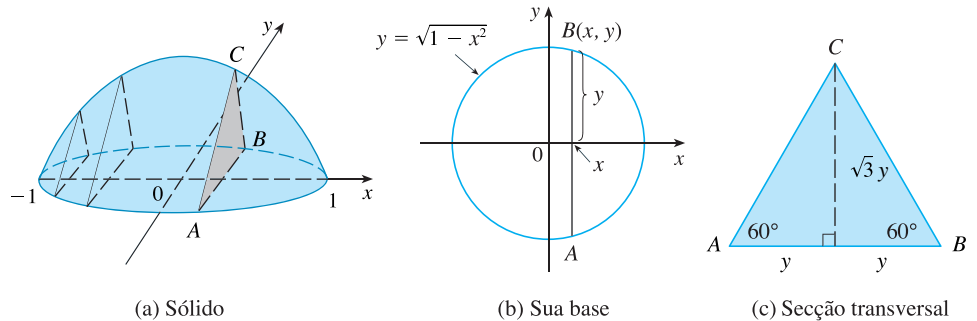



FIGURA 13

versal típica a uma distância x da origem são mostrados na Figura 13.

Como B está no círculo, temos $y = \sqrt{1 - x^2}$, e assim a base do triângulo ABC é $|AB| = 2\sqrt{1 - x^2}$. Como o triângulo é equilátero, vemos pela Figura 13(c) que a altura é $\sqrt{3}\,y = \sqrt{3}\,\sqrt{1 - x^2}$. A área da secção transversal é, portanto,

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{3}\,\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}\,(1 - x^2)$$

e o volume do sólido é

$$V = \int_{-1}^1 A(x)\,dx = \int_{-1}^1 \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

□

EXEMPLO 8 Encontre o volume de uma pirâmide de base quadrada com lado L e cuja altura é h.

SOLUÇÃO Colocamos a origem O no vértice da pirâmide e o eixo x ao longo do seu eixo central, como na Figura 14. Qualquer plano P_x que passa por x e é perpendicular ao eixo x intercepta a pirâmide em um quadrado com lado de comprimento s. Podemos expressar s em termos de x observando que, para os triângulos semelhantes na Figura 15,

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}$$

de forma que $s = Lx/h$. [Outro método é observar que a reta OP tem uma inclinação $L/(2h)$, e desse modo a sua equação é $y = Lx/(2h)$.] Portanto, a área da secção transversal é

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

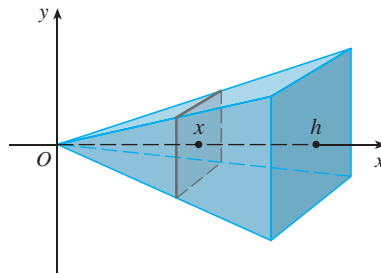



FIGURA 14

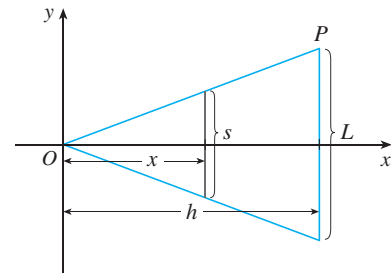



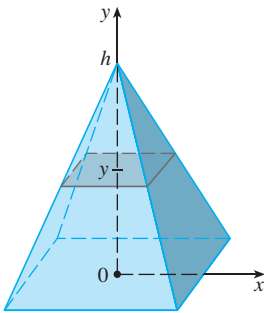
FIGURA 15

A pirâmide está entre $x = 0$ e $x = h$; assim o seu volume é

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg]_0^h = \frac{L^2h}{3}$$ □

FIGURA 16

OBS. Não precisamos colocar o vértice da pirâmide na origem no Exemplo 8. Nós o fizemos meramente para tornar as equações mais simples. Se, em vez disso, tivéssemos colocado o centro da base na origem e o vértice no eixo y positivo, como na Figura 16, você poderia verificar que teríamos obtido a integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\,dy = \frac{L^2h}{3}$$

EXEMPLO 9 Uma cunha é cortada de um cilindro circular de raio 4 por dois planos. Um plano é perpendicular ao eixo do cilindro. O outro intercepta o primeiro com um ângulo de 30º ao longo de um diâmetro do cilindro. Encontre o volume da cunha.

SOLUÇÃO Se colocarmos o eixo x ao longo do diâmetro onde os planos se encontram, então a base do sólido é um semicírculo com a equação $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$. Uma secção transversal perpendicular ao eixo x a uma distância x da origem é um triângulo ABC, como mostrado na Figura 17, cuja base é $y = \sqrt{16 - x^2}$ e cuja altura é $|BC| = y \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Portanto, a área da secção transversal é

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2} = \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$$

e o volume é

$$V = \int_{-4}^4 A(x)\,dx = \int_{-4}^4 \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx$$

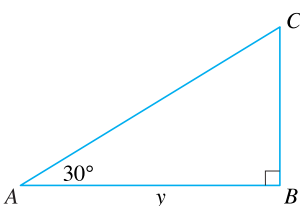
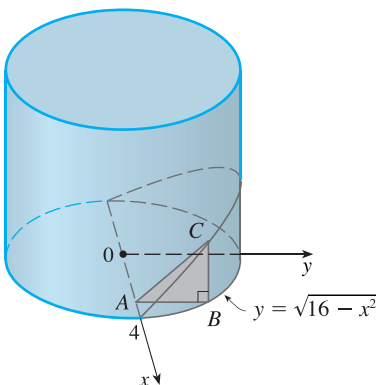



FIGURA 17

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^4 (16 - x^2)\, dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_0^4$$

$$= \frac{128}{3\sqrt{3}}$$

Para outro método, veja o Exercício 64. □

6.2 EXERCÍCIOS

1–18 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno das retas especificadas. Esboce a região, o sólido e um disco ou arruela típicos.

1. $y = 2 - \frac{1}{2}x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$; em torno do eixo x

2. $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$; em torno do eixo x

3. $y = 1/x,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0$; em torno do eixo x

4. $y = \sqrt{25 - x^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$; em torno do eixo x

5. $x = 2\sqrt{y},\ x = 0,\ y = 9$; em torno do eixo y

6. $y = \ln x,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0$; em torno do eixo y

7. $y = x^3,\ y = x,\ x \geqslant 0$; em torno do eixo x

8. $y = \sec x,\ y = 1,\ x = -1,\ x = 1$; em torno do eixo x

9. $y^2 = x,\ x = 2y$; em torno do eixo y

10. $y = x^{2/3},\ x = 1,\ y = 0$; em torno do eixo y

11. $y = x,\ y = \sqrt{x}$; em torno de $y = 1$

12. $y = e^{-x},\ y = 1,\ x = 2$; em torno de $y = 2$

13. $y = 1 + \sec x,\ y = 3$; em torno de $y = 1$

14. $y = 1/x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$; em torno de $y = -1$

15. $x = y^2,\ x = 1$; em torno de $x = 1$

16. $y = x,\ y = \sqrt{x}$; em torno de $x = 2$

17. $y = x^2,\ x = y^2$; em torno de $x = -1$

18. $y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$; em torno de $x = 1$

19–30 Veja a figura e encontre o volume gerado pela rotação da região ao redor da reta dada.

19. $\mathcal{R}_1$ em torno de OA

20. $\mathcal{R}_1$ em torno de OC

21. $\mathcal{R}_1$ em torno de AB

22. $\mathcal{R}_1$ em torno de BC

23. $\mathcal{R}_2$ em torno de OA

24. $\mathcal{R}_2$ em torno de OC

25. $\mathcal{R}_2$ em torno de AB

26. $\mathcal{R}_2$ em torno de BC

27. $\mathcal{R}_3$ em torno de OA

28. $\mathcal{R}_3$ em torno de OC

29. $\mathcal{R}_3$ em torno de AB

30. $\mathcal{R}_3$ em torno de BC

31–36 Escreva, mas não calcule, uma integral para o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno da reta especificada.

31. $y = \text{tg}^3 x,\ y = 1,\ x = 0$; em torno do eixo $y = 1$

32. $y = (x - 2)^4,\ 8x - y = 16$; em torno do eixo $x = 10$

33. $y = 0,\ y = \text{sen}\, x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno de $y = 1$

34. $y = 0,\ y = \text{sen}\, x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno de $y = -2$

35. $x^2 - y^2 = 1,\ x = 3$; em torno de $x = -2$

36. $y = \cos x,\ y = 2 - \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; em torno de $y = 4$

37–38 Use um gráfico para encontrar os valores aproximados das coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas dadas. A seguir, encontre (aproximadamente) o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região limitada por essas curvas.

37. $y = 2 + x^2 \cos x, \quad y = x^4 + x + 1$

38. $y = 3\,\text{sen}\,(x^2), \quad y = e^{x/2} + e^{-2x}$

SCA **39–40** Use um sistema de computação algébrica para calcular o volume exato do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno da reta especificada.

39. $y = \text{sen}^2 x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno de $y = -1$

40. $y = x,\ y = xe^{1 - x/2}$; em torno de $y = 3$

41–44 Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

41. $\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$

42. $\pi \int_2^5 y\, dy$

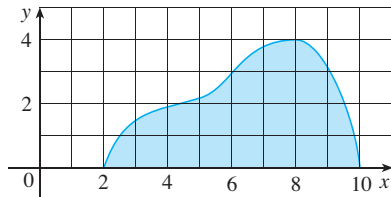
43. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8)\, dy$

44. $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2]\, dx$

45. Uma tomografia computadorizada produz vistas de secções transversais igualmente espaçadas de um órgão humano, as quais fornecem informações sobre esse órgão que de outra maneira só seriam obtidas por cirurgia. Suponha que uma tomografia computadorizada de um fígado humano mostre secções transversais espaçadas por 1,5 cm. O fígado tem 15 cm de comprimento e as áreas das secções transversais, em centímetros quadrados, são 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 e 0. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o volume do fígado.

46. Um tronco de 10 m de comprimento é cortado a intervalos de 1 m e as suas áreas de secção transversal A (a uma distância x da extremidade do tronco) estão listadas na tabela. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para estimar o volume do tronco.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0,68	6	0,53
1	0,65	7	0,55
2	0,64	8	0,52
3	0,61	9	0,50
4	0,58	10	0,48
5	0,59		

47. (a) Se a região mostrada na figura for girada em torno do eixo x para formar um sólido, use a Regra do Ponto Médio, com $n = 4$ para estimar o volume do sólido.

(b) Estime o volume se a região for girada em torno do eixo y. Use novamente a Regra do Ponto Médio com $n = 4$.

48. (a) Um modelo para a forma do ovo de um pássaro é obtido girando, em torno do eixo x, a região sob o gráfico de

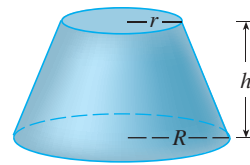
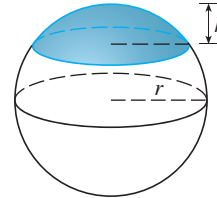
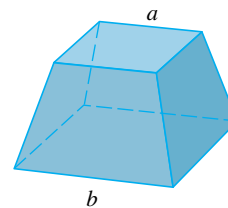
$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{1 - x^2}$$

Use um SCA para encontrar o volume deste ovo.

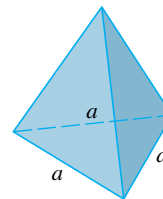
(b) Para uma certa espécie de pássaro, $a = -0{,}06$, $b = 0{,}04$, $c = 0{,}1$ e $d = 0{,}54$. Trace f e encontre o volume de um ovo desta espécie.

49–61 Encontre o volume do sólido S descrito.

49. Um cone circular reto com altura h e raio da base r.

50. Um tronco de cone circular reto de altura h, raio da base inferior R e raio de base superior r.

51. Uma calota de uma esfera de raio r e altura h.

52. Um tronco de pirâmide com base quadrada de lado b, topo quadrado de lado a e altura h.

O que acontece se $a = b$? O que acontece se $a = 0$?

53. Uma pirâmide de altura h e base retangular de lados b e $2b$.

54. Uma pirâmide com altura h e base triangular equilátera com lado a (um tetraedro).

55. Um tetraedro com três faces perpendiculares entre si e as três arestas perpendiculares entre si com comprimentos de 3 cm, 4 cm e 5 cm.

56. A base de S é um disco circular de raio r. Secções transversais paralelas, perpendiculares à base, são quadradas.

57. A base de S é região elíptica limitada pela curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. As secções transversais perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles retos com hipotenusa na base.

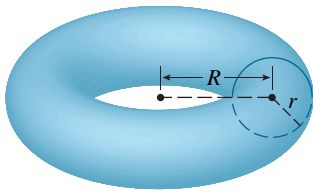
58. A base de S é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. As secções transversais perpendiculares ao eixo y são triângulos equiláteros.

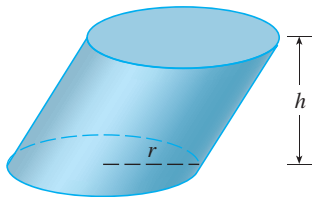
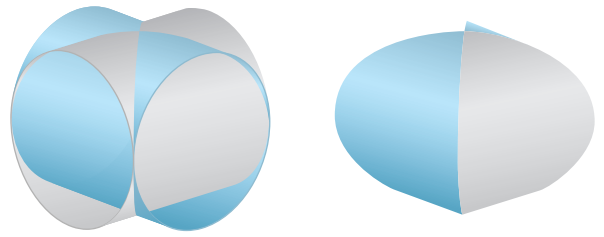
59. S tem a mesma base do Exercício 58, mas as secções transversais perpendiculares ao eixo x são quadradas.

60. A base de S é a região limitada pela parábola $y = 1 - x^2$ e pelo eixo x. As secções transversais perpendiculares ao eixo y são quadrados.

61. S tem a mesma base do Exercício 60, mas as secções transversais perpendiculares ao eixo x são triângulos isósceles com altura igual à base.

62. A base de S é um disco circular com raio r. As secções transversais paralelas, perpendiculares à base, são triângulos isósceles de altura h e lado desigual na base.
(a) Escreva uma integral para o volume de S.
(b) Interpretando a integral como uma área, encontre o volume de S.

63. (a) Escreva uma integral para um *toro* sólido (o sólido com formato de rosquinha da figura) com raios r e R.
(b) Interpretando a integral como uma área, encontre o volume do toro.

64. Resolva o Exemplo 9 tomando secções transversais paralelas à reta de intersecção dos dois planos.

65. (a) O Princípio de Cavalieri afirma que se uma família de planos paralelos produzem áreas de secção transversal iguais para dois sólidos S_1 e S_2, então os volumes de S_1 e S_2 são iguais. Demonstre esse princípio.
(b) Use o Princípio de Cavalieri para encontrar o volume do cilindro oblíquo mostrado na figura.

66. Ache o volume comum aos dois cilindros circulares, cada qual com raio r, se os eixos dos cilindros se interceptam em ângulos retos.

67. Encontre o volume comum a duas esferas, cada qual com raio r, se o centro de cada esfera está na superfície da outra esfera.

68. Uma tigela tem o formato de um hemisfério com diâmetro de 30 cm. Uma bola pesada com diâmetro de 10 cm é colocada dentro da tigela, e depois despeja-se água até uma profundidade de h centímetros. Encontre o volume de água na tigela.

69. Um buraco de raio r é perfurado pelo meio de um cilindro de raio $R > r$ com ângulo reto em relação ao eixo do cilindro. Escreva, mas não calcule, uma integral para o volume cortado.

70. Um buraco de raio r é perfurado pelo centro de uma esfera de raio $R > r$. Encontre o volume da porção remanescente da esfera.

71. Alguns dos pioneiros do Cálculo, como Kepler e Newton, foram inspirados pelo problema de encontrar os volumes de barris de vinho. (De fato, Kepler publicou em 1715 *Stereometria doliorum*, um livro dedicado aos métodos para encontrar os volumes de barris.) Eles frequentemente aproximavam o formato dos lados por parábolas.
(a) Um barril com altura h e raio máximo R é construído pela rotação ao redor do eixo x da parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leqslant x \leqslant h/2$, onde c é uma constante positiva. Mostre que o raio de cada extremidade do barril é $r = R - d$, onde $d = ch^2/4$.
(b) Mostre que o volume delimitado pelo barril é

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right)$$

72. Suponha que a região $\mathcal{R}$ tenha área A e esteja acima do eixo x. Quando $\mathcal{R}$ é girada em torno do eixo x, ela varre um sólido com volume V_1. Quando $\mathcal{R}$ é girada em torno da reta $y = -k$ (em que k é um número positivo), ela varre um sólido com volume V_2. Expresse V_2 em termos de V_1, k e A.

6.3 CÁLCULO DE VOLUMES POR CASCAS CILÍNDRICAS

Alguns problemas de volume são muito difíceis de lidar pelos métodos da seção anterior. Por exemplo, vamos considerar o problema de encontrar o volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$ (veja a Figura 1). Se a fatiarmos perpendicularmente ao eixo y, obteremos uma arruela. Mas para calcularmos os raios interno e externo da arruela, teríamos de resolver a equação cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para x em termos de y; e isto não é fácil.

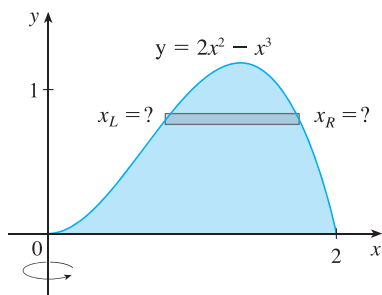



FIGURA 1

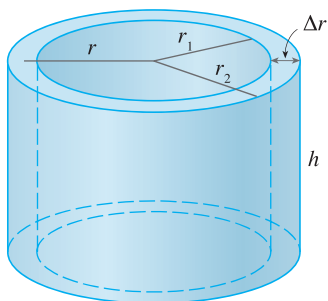



FIGURA 2

Felizmente, existe um método chamado **Método das Cascas Cilíndricas**, que é mais fácil de usar em casos como esse. A Figura 2 mostra uma casca cilíndrica de raio interno r_1, raio externo r_2 e altura h. O seu volume V é calculado pela subtração do volume V_1 do cilindro interno do volume V_2 do cilindro externo:

$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = (r_2^2 - r_1^2)h$$

$$= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h = 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1)$$

Se fizermos $\Delta r = r_2 - r_1$ (a espessura da casca) e $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (o raio médio da casca), então a fórmula para o volume de uma casca cilíndrica se torna

$$V = 2\pi r h \Delta r \tag{1}$$

e pode ser memorizada como

$$V = [\text{circunferência}][\text{altura}][\text{espessura}]$$

Agora, considere S como o sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = f(x)$ [onde $f(x) \geqslant 0$], $y = 0$, $x = a$ e $x = b$, onde $b > a \geqslant 0$. (Veja a Figura 3.)

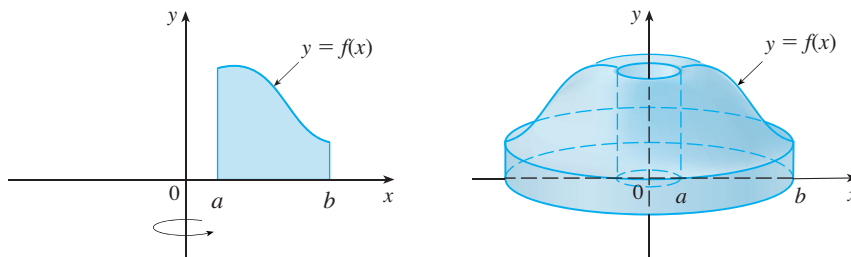



FIGURA 3

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesma largura Δx e consideramos $\bar{x}_i$ o ponto médio do i-ésimo subintervalo. Se o retângulo com base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(\bar{x}_i)$ é girado ao redor do eixo y, então o resultado é uma casca cilíndrica com raio médio $\bar{x}_i$, altura $f(\bar{x}_i)$ e espessura Δx (veja a Figura 4). Assim, pela Fórmula 1 seu volume é

$$V_i = (2\pi \bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\Delta x$$

Portanto, uma aproximação para o volume V de S é dada pela soma dos volumes dessas cascas:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x$$

Essa aproximação parece tornar-se melhor quando $n \to \infty$. Mas, pela definição de integral, sabemos que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Então, a seguinte definição parece plausível:

2 O volume do sólido na Figura 3, obtido pela rotação em torno do eixo y da região sob a curva $y = f(x)$ de a até b é

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx \qquad \text{onde } 0 \leqslant a < b$$

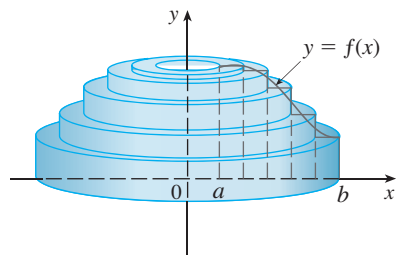
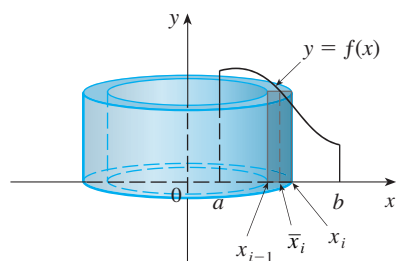



FIGURA 4

Usando o argumento das cascas cilíndricas, a Fórmula 2 parece razoável, porém mais tarde seremos capazes de demonstrá-la (veja o Exercício 67 na Seção 7.1). A melhor maneira para se lembrar da Fórmula 2 é pensar em uma casca típica, cortada e achatada como na Figura 5, com raio x, circunferência $2\pi x$, altura $f(x)$ e espessura Δx ou dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferência}} \quad \underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}} \quad \underbrace{dx}_{\text{espessura}}$$

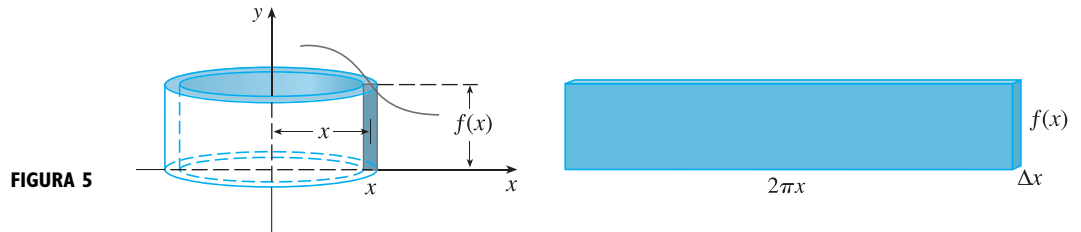



FIGURA 5

Esse tipo de argumento será útil em outras situações, tais como quando giramos em torno de outras retas além do eixo y.

EXEMPLO 1 Ache o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.

FIGURA 6

SOLUÇÃO Do esboço da Figura 6, vemos que uma casca típica tem raio x, circunferência $2\pi x$ e altura $f(x) = 2x^2 - x^3$. Então, pelo método das cascas, o volume é

$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

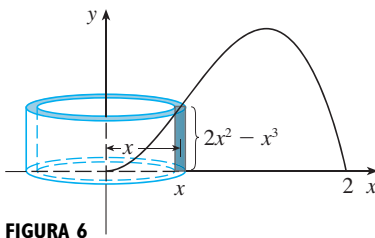
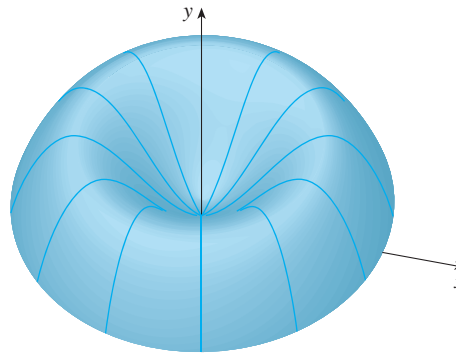
Pode-se verificar que o método das cascas dá a mesma resposta que o método das fatias. □

■ A Figura 7 mostra o gráfico gerado pelo computador do sólido do qual calculamos o volume no Exemplo 1.

FIGURA 7

OBS. Comparando a solução do Exemplo 1 com as observações no começo desta seção, vemos que o método das cascas cilíndricas é muito mais prático que o método das arruelas para esse problema. Não tivemos de encontrar as coordenadas do máximo local e não tivemos de resolver a equação da curva para x em termos de y. Contudo, em outros exemplos, utilizar os métodos da seção anterior podem ser mais fáceis.

EXEMPLO 2 Ache o volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região entre $y = x$ e $y = x^2$.

FIGURA 8

SOLUÇÃO A região e uma casca típica são mostradas na Figura 8. Vemos que a casca tem raio x, circunferência $2\pi x$ e altura $x - x^2$. Então o volume é

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

□

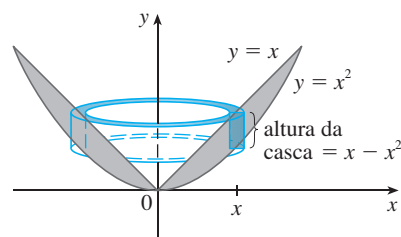
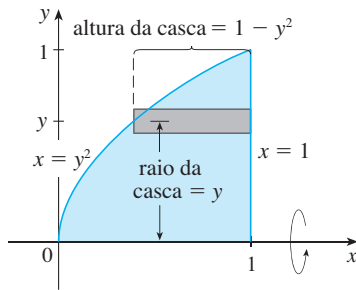



FIGURA 9

Como o exemplo a seguir mostra, o método das cascas cilíndricas funciona bem também quando giramos ao redor do eixo x. Simplesmente temos de desenhar um diagrama para identificar o raio e a altura da casca.

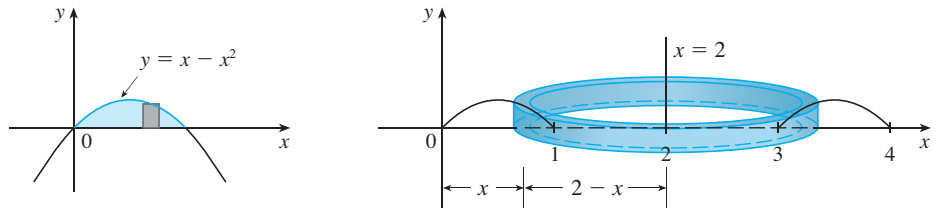
EXEMPLO 3 Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 1.

SOLUÇÃO Esse problema foi resolvido usando-se os discos no Exemplo 2 da Seção 6.2. Para usar as cascas reescrevemos $y = \sqrt{x}$ (na figura naquele exemplo) como $x = y^2$ na Figura 9. Pela rotação em torno do eixo x, vemos que uma casca típica tem raio y, circunferência $2\pi y$ e altura $1 - y^2$. Então, o volume é

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\, dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\, dy = 2\pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Neste exemplo, o método do disco foi mais simples. □

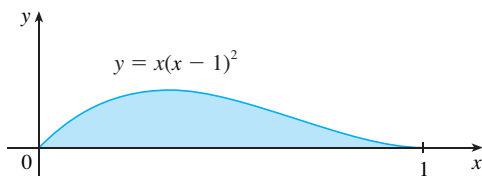
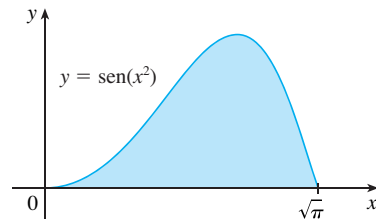
EXEMPLO 4 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$ em torno da reta $x = 2$.

SOLUÇÃO A Figura 10 mostra a região e a casca cilíndrica formada pela rotação em torno da reta $x = 2$. Esta tem raio $2 - x$, circunferência $2\pi(2 - x)$ e altura $x - x^2$.

O volume do sólido é

$$V = \int_0^1 (2\pi)(2 - x)(x - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$ □

6.3 EXERCÍCIOS

1. Seja S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura em torno do eixo y. Explique por que é inconveniente fatiar para obter o volume V de S. Esboce uma casca típica de aproximação. Qual é a circunferência e a altura? Use cascas para encontrar o volume V.

2. Seja S o sólido obtido pela rotação da região mostrada na figura em torno do eixo y. Esboce uma casca cilíndrica típica, e encontre sua circunferência e altura. Use cascas para encontrar o volume de S. Você acha que esse método é preferível ao fatiamento? Explique.

3–7 Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação em torno do eixo y da região limitada pelas curvas dadas. Esboce a região e uma casca típica.

3. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

4. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1$

5. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

6. $y = x^2 - 6x + 10, \quad y = -x^2 + 6x - 6$

7. $y^2 = x, \quad x = 2y$

8. Seja V o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$. Encontre V pelos métodos de fatiamento e cascas cilíndricas. Em ambos os casos, desenhe um diagrama para explicar seu método.

9–14 Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno do eixo x. Esboce a região e uma casca típica.

9. $x = 1 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 2$

10. $x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$

11. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

12. $x = 4y^2 - y^3, \quad x = 0$

13. $x = 1 + (y - 2)^2, \quad x = 2$

14. $x + y = 3, \quad x = 4 - (y - 1)^2$

15–20 Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume gerado pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado. Esboce a região e uma casca típica.

15. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2;$ em torno de $x = 1$

16. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1;$ em torno de $x = -1$

17. $y = 4x - x^2, \quad y = 3;$ em torno de $x = 1$

18. $y = x^2, \quad y = 2 - x^2;$ em torno de $x = 1$

19. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1;$ em torno de $y = 1$

20. $y = x^2, \quad x = y^2;$ em torno de $y = -1$

21–26 Escreva, mas não calcule, uma integral para o volume de um sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

21. $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 2;$ em torno do eixo y

22. $y = x, \quad y = 4x - x^2;$ em torno de $x = 7$

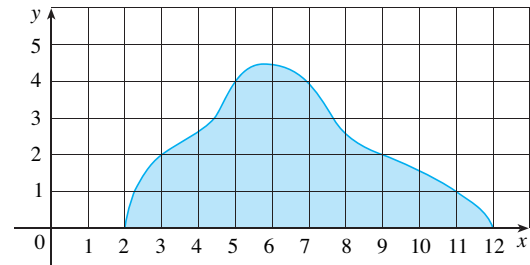
23. $y = x^4, \quad y = \operatorname{sen}(\pi x/2);$ em torno de $x = -1$

24. $y = 1/(1 + x^2), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$ em torno de $x = 2$

25. $x = \sqrt{\operatorname{sen} y}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi, \quad x = 0;$ em torno de $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7, \quad x = 4;$ em torno de $y = 5$

27. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para estimar o volume obtido pela rotação em torno do eixo y da região sob a curva $y = \sqrt{1 + x^3}, 0 \leqslant x \leqslant 1$.

28. Se a região na figura gira em torno do eixo y para formar um sólido, use a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para estimar o volume do sólido.

29–32 Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

29. $\int_0^3 2\pi x^5 \, dx$

30. $2\pi \int_0^2 \frac{y}{1 + y^2} \, dy$

31. $\int_0^1 2\pi(3 - y)(1 - y^2) \, dy$

32. $\int_0^{\pi/4} 2\pi(\pi - x)(\cos x - \operatorname{sen} x) \, dx$

33–34 Use um gráfico para estimar as coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas dadas. A seguir, use essa informação para estimar o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por essas curvas.

33. $y = e^x, \quad y = \sqrt{x} + 1$

34. $y = x^3 - x + 1, \quad y = -x^4 + 4x - 1$

SCA **35–36** Use um sistema de computação algébrica para achar o volume exato do sólido obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno da reta especificada.

35. $y = \operatorname{sen}^2 x, \quad y = \operatorname{sen}^4 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ em torno de $x = \pi/2$.

36. $y = x^3 \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ em torno de $x = -1$.

37–42 A região limitada pelas curvas dadas é girada em torno do eixo especificado. Ache o volume do sólido resultante por qualquer método.

37. $y = -x^2 + 6x - 8, \quad y = 0;$ em torno do eixo y

38. $y = -x^2 + 6x - 8, \quad y = 0;$ em torno do eixo x

39. $y = 5, \quad y = x + (4/x);$ em torno de $x = -1$

40. $x = 1 - y^4, \quad x = 0;$ em torno de $x = 2$

41. $x^2 + (y - 1)^2 = 1;$ em torno do eixo y

42. $x = (y - 3)^2, \quad x = 4;$ em torno de $y = 1$

43–45 Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido.

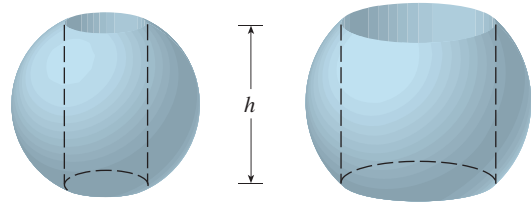
43. Uma esfera de raio r.

44. O toro sólido do Exercício 63 da Seção 6.2.

45. Um cone circular reto de altura h e base com raio r.

46. Suponha que você faça anéis para guardanapos perfurando buracos com diferentes diâmetros através de duas bolas de madeira (as quais também têm diferentes diâmetros). Você descobre que ambos os anéis de guardanapo têm a mesma altura h, como mostrado na figura.

(a) Faça uma conjectura sobre qual anel tem mais madeira.

(b) Verifique sua conjectura. Use cascas cilíndricas para calcular o volume de um anel de guardanapo criado pela perfuração de um buraco com raio r através do centro de uma esfera de raio R e expresse a resposta em termos de h.

6.4 TRABALHO

O termo *trabalho* é usado na linguagem cotidiana significando a quantidade de esforço necessária para executar uma tarefa. Na física essa palavra tem um significado técnico que depende do conceito de *força*. Intuitivamente, você pode pensar na força que descreve o empurrar ou o puxar de um objeto — por exemplo, um empurrão horizontal em um livro sobre uma mesa ou a ação da gravidade terrestre sobre uma bola. Em geral, se um objeto se move ao longo de uma reta com função posição $s(t)$, então a **força** F no objeto (na mesma direção) é definida pela Segunda Lei de Newton do Movimento como o produto de sua massa m pela sua aceleração:

1
$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

No Sistema Métrico Internacional (SI), a massa é medida em quilogramas (kg), o deslocamento em metros (m), o tempo em segundos (s) e a força em newtons ($\text{N} = \text{Kg}\cdot\text{m/s}^2$). Então, uma força de 1 N atuando em uma massa de 1 kg produz uma aceleração de 1 m/s^2. No sistema usual norte-americano, a unidade de força escolhida é a libra.

No caso de aceleração constante, a força F também é constante, e o trabalho feito é definido pelo produto da força F pela distância d na qual o objeto se move:

2 $$W = Fd \qquad \text{trabalho} = \text{força} \times \text{distância}$$

Se F é medida em newtons e d, em metros, então a unidade para W é o newton-metro, que é chamada joule (J). Se F é medida em libras (lb) e d em pés (pé), então a unidade de trabalho é a libra-pé (lb-pé), que equivale a cerca de 1,36 J.

EXEMPLO 1

(a) Quanto trabalho é exercido ao se levantar um livro de 1,2 kg do chão até uma carteira de altura 0,7 m? Considere que a aceleração da gravidade é $g = 9{,}8$ ms.^{2}

(b) Quanto trabalho é feito levantando-se um peso de 20 lb a uma altura de 6 pés do chão?

SOLUÇÃO

(a) A força exercida é igual e oposta à força exercida pela gravidade. Então, da Equação 1 temos

$$F = mg = (1{,}2)(9{,}8) = 11{,}76 \text{ N}$$

e a Equação 2 nos dá o trabalho executado como

$$W = Fd = (11{,}76)(0{,}7) \approx 8{,}2 \text{ J}$$

(b) Aqui a força dada é $F = 20$ lb; portanto, o trabalho feito é

$$W = Fd = 20 \cdot 6 = 120 \text{ lb-pé}$$

Observe que na parte (b), ao contrário da parte (a), não tivemos de multiplicar por g, porque o dado era o *peso* (que já é força) e não a massa do objeto. □

A Equação 2 define trabalho desde que a força seja constante. Mas o que acontece se a força for variável? Suponha que o objeto se mova ao longo do eixo x na direção positiva de $x = a$ até $x = b$, e em cada ponto x entre a e b uma força $f(x)$ atua no objeto, onde f é uma função contínua. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, \dots, x_n$ e larguras iguais a Δx. Escolhemos o ponto amostral x_i^* no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então, a força naquele ponto é $f(x_i^*)$. Se n é grande, então Δx é pequeno, e como f é contínua, os valores de f não variam muito ao longo do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Em outras palavras, f é praticamente constante no intervalo e então o trabalho W_i que é executado no movimento da partícula de x_{i-1} a x_i é dado aproximadamente pela Equação 2:

$$W_i \approx f(x_i^*)\,\Delta x$$

Então, podemos aproximar o trabalho total por

3
$$W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Parece que a aproximação torna-se cada vez melhor quando n cresce. Portanto, definimos o **trabalho feito no movimento de um objeto de a a b** como o limite dessa quantidade quando $n \to \infty$. Como o lado direito de (3) é uma soma de Riemann, reconhecemos seu limite como uma integral definida e então

4
$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

EXEMPLO 2 Quando uma partícula está localizada a uma distância de x metros da origem, uma força de $x^2 + 2x$ newtons age sobre ela. Quanto trabalho é realizado movendo-a de $x = 1$ a $x = 3$?

SOLUÇÃO
$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_1^3 = \frac{50}{3}$$

O trabalho feito é de $16\frac{2}{3}$ J. □

No próximo exemplo usaremos uma lei da física: a **Lei de Hooke** afirma que a força necessária para manter uma mola esticada x unidades além do seu comprimento natural é proporcional a x:

$$f(x) = kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada **constante elástica**). A Lei de Hooke vale desde que x não seja muito grande (veja a Figura 1).

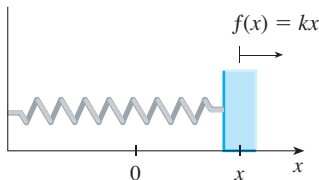
(a) Posição natural da mola

(b) Posição esticada da mola

FIGURA 1
Lei de Hooke

EXEMPLO 3 Uma força de 40 N é necessária para segurar uma mola que foi esticada do seu comprimento natural de 10 cm para um comprimento de 15 cm. Quanto trabalho é feito esticando-se a mola de 15 cm para 18 cm?

SOLUÇÃO De acordo com a Lei de Hooke, a força necessária para manter uma mola esticada x metros além do seu comprimento natural é $f(x) = kx$. Quando a mola é esticada de 10 cm para 15 cm, a quantidade esticada é 5 cm = 0,05 m. Isto significa que $f(0{,}05) = 40$, assim:

$$0{,}05k = 40 \qquad k = \frac{40}{0{,}05} = 800$$

Logo, $f(x) = 800x$, e o trabalho realizado para esticar a mola de 15 cm para 18 cm é

$$W = \int_{0,05}^{0,08} 800x\, dx = 800 \frac{x^2}{2} \Big]_{0,05}^{0,08}$$

$$= 400[(0,08)^2 - (0,05)^2] = 1,56 \text{ J}$$

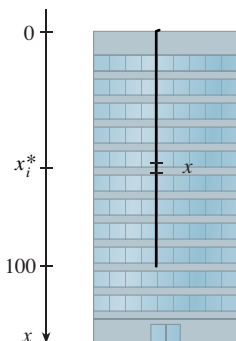



FIGURA 2

■ Se tivéssemos colocado a origem na extremidade do cabo e o eixo x apontando para cima, teríamos obtido

$$W = \int_0^{100} 2(100 - x)\, dx$$

que nos dá a mesma resposta.

EXEMPLO 4 Um cabo de 200 lb tem 100 pés de comprimento e está pendurado sobre a borda de um edifício alto. Qual o trabalho necessário para puxar o cabo para o topo do edifício?

SOLUÇÃO Aqui não temos uma fórmula para a função força, mas podemos usar um argumento semelhante ao que nos levou à Definição 4.

Vamos posicionar a origem no topo do edifício e o eixo x apontando para baixo, como na Figura 2. Dividimos o cabo em pequenos pedaços de comprimento Δx. Se x_i^* é um ponto no i-ésimo intervalo, então todos os pontos nesse intervalo são içados por aproximadamente a mesma quantidade, a saber, x_i^*. O cabo pesa 2 lb por pé, logo o peso da i-ésima parte é $2\Delta x$. Assim, o trabalho realizado nessa i-ésima parte, em lb-pé, é

$$\underbrace{(2\Delta x)}_{\text{força}} \quad \underbrace{x_i^*}_{\text{distância}} \quad = 2x_i^* \Delta x$$

Teremos o trabalho total realizado somando todas essas aproximações e fazendo o número de partes se tornar grande ($\Delta x \to 0$):

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2x_i^* \Delta x = \int_0^{100} 2x\, dx$$

$$= x^2\Big]_0^{100} = 10\,000 \text{ lb-pé}$$

EXEMPLO 5 Um tanque tem o formato de um cone circular invertido de altura 10 m e raio da base 4 m e está cheio de água até uma altura de 8 m. Calcule o trabalho necessário para esvaziar o tanque bombeando toda a água pelo topo do tanque. (A densidade da água é de 1 000 kg/m^3.)

FIGURA 3

SOLUÇÃO Vamos medir as profundidades a partir do topo do tanque introduzindo uma coordenada vertical como na Figura 3. A água se estende de uma profundidade de 2 m até uma profundidade de 10 m e então dividimos o intervalo [2, 10] em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e escolhemos x_i^* no i-ésimo subintervalo. Isso divide a água em n camadas. A i-ésima camada é aproximada por um cilindro circular de raio r_i e altura Δx. Podemos calcular r_i por semelhança de triângulos usando a Figura 4, como a seguir:

$$\frac{r_i}{10 - x_i^*} = \frac{4}{10} \qquad r_i = \tfrac{2}{5}(10 - x_i^*)$$

FIGURA 4

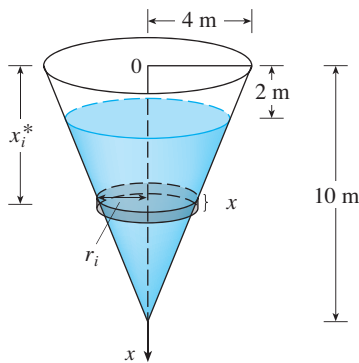
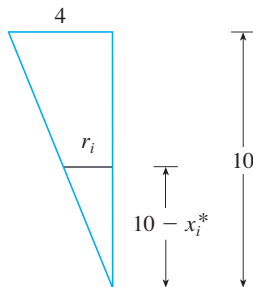
Então, uma aproximação para o volume da i-ésima camada de água é

$$V_i \approx \pi r_i^2 \Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \Delta x$$

e, dessa forma, sua massa é

$$m_i = \text{densidade} \times \text{volume}$$

$$\approx 1\,000 \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \Delta x = 160\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta x$$

A força necessária para elevar essa camada de água deve ser maior que a força da gravidade, e assim

$$F_i = m_i g \approx (9{,}8)160\pi(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

$$\approx 1\,570\pi(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

Cada partícula na camada deve se mover a uma distância de aproximadamente x_i^*. O trabalho W_i feito para elevar essa camada até o topo é aproximadamente o produto da força F_i e da distância x_i^*:

$$W_i \approx F_i x_i^* \approx 1\,570\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

Para encontrar o trabalho total realizado para esvaziar o tanque, adicionamos as contribuições de cada uma das n camadas e então tomamos o limite quando $n \to \infty$:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1\,570\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2\,\Delta x = \int_2^{10} 1\,570\pi x(10 - x)^2\,dx$$

$$= 1\,570\pi \int_2^{10} (100x - 20x^2 + x^3)\,dx = 1\,570\pi \left[50x^2 - \frac{20x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_2^{10}$$

$$= 1\,570\pi\left(\tfrac{2048}{3}\right) \approx 3{,}4 \times 10^6 \text{ J}$$

□

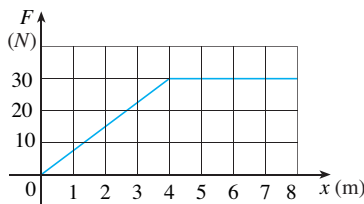
6.4 EXERCÍCIOS

1. Quanto trabalho é realizado ao se levantar um saco de areia de 40 kg a uma altura de 1,5 m?

2. Encontre o trabalho realizado se uma força constante de 100 libras for usada para puxar um carrinho a uma distância de 200 pés.

3. Uma partícula é movida ao longo do eixo x por uma força que mede $10/(1 + x)^2$ newtons em um ponto a x metros da origem. Calcule o trabalho realizado ao mover a partícula da origem até a distância de 9 m.

4. Quando uma partícula está localizada a uma distância de x metros da origem, uma força de $\cos(\pi x/3)$ newtons atua sobre ela. Quanto trabalho é feito ao mover a partícula de $x = 1$ até $x = 2$? Interprete a sua resposta considerando o trabalho feito de $x = 1$ a $x = 1{,}5$ e de $x = 1{,}5$ a $x = 2$.

5. A figura a seguir mostra o gráfico de uma função força (em newtons) que cresce até seu máximo valor e depois permanece constante. Quanto trabalho é realizado pela força ao mover um objeto a uma distância de 8 m?

6. A tabela a seguir mostra valores de uma função força $f(x)$, onde x é medido em metros e $f(x)$, em newtons. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o trabalho realizado pela força ao mover um objeto de $x = 4$ até $x = 20$.

x	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(x)$	5	5,8	7,0	8,8	9,6	8,2	6,7	5,2	4,1

7. Uma força de 10 lb é necessária para manter uma mola esticada 4 pol além do seu comprimento natural. Quanto trabalho é realizado para esticá-la do seu comprimento natural até 6 pol além do seu tamanho natural?

8. Uma mola tem o comprimento natural de 20 cm. Se uma força de 25 N é necessária para mantê-la esticada a um comprimento de 30 cm, qual o trabalho necessário para esticá-la de 20 cm a 25 cm?

9. Suponha que 2 J de trabalho sejam necessário para esticar uma mola de seu comprimento natural de 30 cm para 42 cm.
(a) Quanto trabalho é necessário para esticar a mola de 35 cm para 40 cm?
(b) Quão longe de seu comprimento natural uma força de 30 N manterá a mola esticada?

10. Se o trabalho necessário para esticar uma mola 1 pé além do seu comprimento natural é de 12 lb-pé, qual o trabalho necessário para esticá-la 9 pol além do seu comprimento natural?

11. Uma mola tem comprimento natural de 20 cm. Compare o trabalho W_1 feito ao esticar a mola de 20 cm para 30 cm com o trabalho W_2 feito para esticá-la de 30 cm para 40 cm. Como W_2 e W_1 estão relacionados?

12. Se 6 J de trabalho são necessários para esticar uma mola de 10 cm para 12 cm e um trabalho de 10 J é necessário para esticá-la de 12 cm para 14 cm, qual é o comprimento natural da mola?

13–20 Mostre como aproximar o trabalho pedido por uma soma de Riemann. Em seguida, expresse o trabalho como uma integral e calcule-a.

13. Uma corda de 50 pés de comprimento pesa 0,5 lb/pé e está pendurada sobre a borda de um edifício com 120 pés de altura.
(a) Qual o trabalho necessário para puxar a corda até o topo do edifício?
(b) Qual o trabalho necessário para puxar metade da corda do edifício?

14. Uma corrente que se encontra sobre um piso tem 10 m de comprimento e sua massa é de 80 kg. Quanto trabalho é necessário para erguer uma de suas extremidades a uma altura de 6 m?

15. Um cabo que pesa 2 lb/pé é usado para erguer 800 lb de carvão por um poço de mina de 500 pés de profundidade. Encontre o trabalho realizado.

16. Um balde que pesa 4 lb e uma corda de massa desprezível são usados para tirar água de um poço com 80 pés de profundidade. O balde é enchido com 40 lb de água e é puxado a uma velocidade de 2 pés/s, mas a água vaza por um buraco no balde a uma taxa de 0,2 lb/s. Encontre o trabalho realizado para puxar o balde até o topo do poço.

17. Um balde, furado, de 10 kg é levantado do chão até uma altura de 12 m, com velocidade constante, com a ajuda de uma corda que pesa 0,8 kg/m. Inicialmente o balde contêm 36 kg de água, mas a água vaza a uma taxa constante e o balde acaba ficando vazio justamente quando ele atinge os 12 m de altura. Quanto trabalho foi realizado?

18. Uma corrente de 10 pés pesa 25 lb e está pendurada no teto. Encontre o trabalho necessário para levantar a extremidade inferior da corrente até o teto, de modo que ela se junte com a extremidade superior.

19. Um aquário de 2 m de comprimento, 1 m de largura e 1 m de profundidade está cheio de água. Encontre o trabalho necessário para bombear metade da água para fora do aquário. (Use o fato de que a densidade da água é de 1 000 kg/m^3.)

20. Uma piscina circular tem um diâmetro de 10 m, os lados têm 1,5 m de altura e a profundidade da água é de 1,2 m. Quanto trabalho é necessário para bombear toda a água pelo lado da piscina? (Use o fato de que a densidade da água é de 62,5 lb/pé^3.)

21–24 Um tanque está cheio de água. Encontre o trabalho necessário para bombear a água pela saída. Nos Exercícios 23 e 24 use a densidade da água igual a 62,5 lb/pé^3.

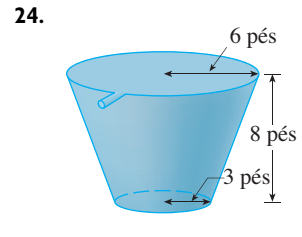
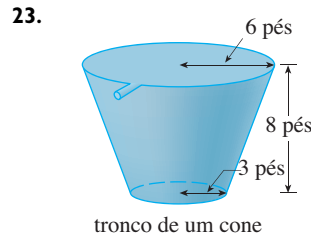
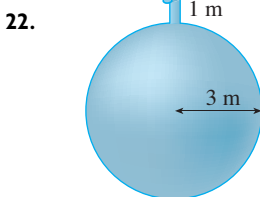
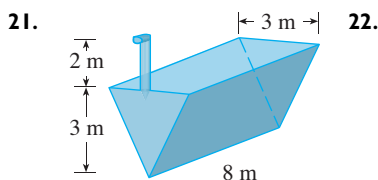
21.

22.

23.

6 pés
8 pés
3 pés

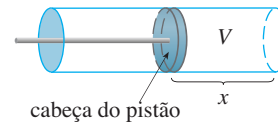
tronco de um cone

24.

25. Suponha que para o tanque do Exercício 21 a bomba tenha quebrado após ter sido feito o trabalho de $4{,}7 \times 10^5$ J. Qual a profundidade da água que permaneceu no tanque?

26. Resolva o Exercício 22 se o tanque estiver cheio até a metade de óleo, que tem densidade de 900 kg/m^3.

27. Quando um gás se expande em um cilindro de raio r, a pressão em um dado momento é uma função do volume: $P = P(V)$. A força exercida pelo gás no pistão (veja a figura) é o produto da pressão pela área: $F = \pi r^2 P$. Mostre que o trabalho feito pelo gás quando o volume expande de V_1 para V_2 é

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

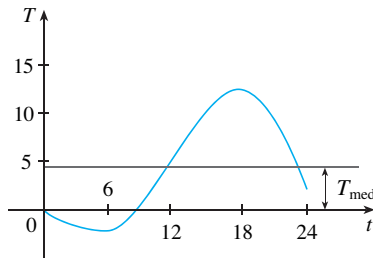
V
x
cabeça do pistão

28. Em uma máquina a vapor a pressão P e o volume V de vapor satisfazem a equação $PV^{1,4} = k$, em que k é uma constante. (Isso é verdade para uma expansão adiabática, que é uma expansão em que não ocorre a transferência de calor entre o cilindro e seus arredores.) Use o Exercício 27 para calcular o trabalho feito pelo motor em um ciclo quando o vapor começa a uma pressão de 160 lb/pol^2 e um volume de 100 pol^3 e se expande até um volume de 800 pol^3.

29. A Lei de Newton da Gravitação Universal afirma que dois corpos com massas m_1 e m_2 atraem um ao outro com uma força de

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

onde r é a distância entre os corpos e G é a constante gravitacional. Se um dos corpos é fixo, encontre o trabalho necessário para mover o outro corpo de $r = a$ para $r = b$.

30. Use a Lei de Newton da Gravitação Universal para calcular o trabalho necessário para lançar verticalmente um satélite de 1 000 kg a uma órbita de 1 000 km de altura. Você pode supor que a massa da Terra é $5{,}98 \times 10^{24}$ kg e está concentrada no seu centro. Use o raio da Terra igual a $6{,}37 \times 10^6$ m, e $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2.

6.5 VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO

É fácil calcular o valor médio de uma quantidade finita de números $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y_{med} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

FIGURA 1

Mas como calcular a temperatura média durante o dia se infinitas leituras de temperatura forem possíveis? A Figura 1 mostra o gráfico de uma função temperatura $T(t)$, onde t é medido em horas; T, em ºC; e T_{med} é uma estimativa para a temperatura média.

Em geral, vamos tentar calcular o valor médio da função $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Começamos dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais, cada qual com comprimento $\Delta x = (b - a)/n$. Então, escolhemos pontos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ em subintervalos sucessivos e calculamos a média dos números $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$:

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

(Por exemplo, se f representa a função temperatura e $n = 24$, isso significa que temos tomadas de temperatura a cada hora e então calculamos a média.) Como $\Delta x = (b - a)/n$, podemos escrever $n = (b - a)/\Delta x$, e o valor médio torna-se

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b - a}{\Delta x}} = \frac{1}{b - a}[f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x]$$

$$= \frac{1}{b - a}\sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x$$

Se n aumenta, podemos calcular o valor médio de um grande número de valores igualmente espaçados. (Por exemplo, poderíamos calcular a média de medições de temperatura tomadas a cada minuto ou até a cada segundo.) O valor limite é

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b - a}\sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$$

pela definição de integral definida.

Portanto, definimos o **valor médio de f** no intervalo $[a, b]$ como

■ Para uma função positiva, podemos pensar nesta definição em termos de

$$\frac{\text{área}}{\text{comprimento}} = \text{altura média}$$

$$f_{med} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$$

EXEMPLO 1 Encontre o valor médio da função $f(x) = 1 + x^2$ no intervalo $[-1, 2]$.

SOLUÇÃO Com $a = -1$ e $b = 2$, temos

$$f_{med} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2 - (-1)}\int_{-1}^{2} (1 + x^2)dx = \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2 \quad \square$$

Se $T(t)$ for a temperatura no instante t, poderíamos imaginar se existe um instante específico no qual a temperatura seja a mesma da temperatura média. Para a função temperatura traçada na Figura 1, vemos que existem dois destes instantes – imediatamente antes do meio-dia e imediatamente antes da meia-noite. Em geral, existe um número c no qual o valor da função f é exatamente igual ao valor médio da função, isto é, $f(c) = f_{med}$? O seguinte teorema diz que isto é verdade para funções contínuas.

TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS Se f é contínua em $[a, b]$, então existe um número c em $[a, b]$ tal que

$$f(c) = f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ou seja,
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

O Teorema do Valor Médio para as Integrais é uma consequência do Teorema do Valor Médio para as derivadas e do Teorema Fundamental do Cálculo. A demonstração é descrita no Exercício 23.

A interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio para Integrais é que, para funções *positivas* f, existe um número c tal que o retângulo de base $[a, b]$ e altura $f(c)$ tem a mesma área que a região sob o gráfico de f de a a b. (Veja a Figura 2 e uma interpretação mais pictórica na observação da margem.)

■ Você sempre pode cortar o topo de uma montanha (bidimensional) a uma certa altura e usá-lo para preencher os vales de tal maneira que a montanha se torne completamente plana.

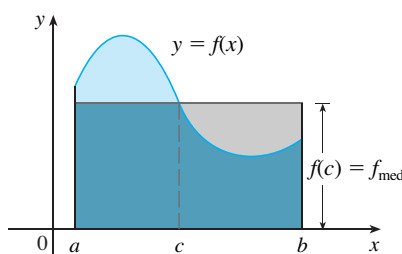



FIGURA 2

EXEMPLO 2 Como $f(x) = 1 + x^2$ é contínua no intervalo $[-1, 2]$, o Teorema do Valor Médio para Integrais diz que existe um número c em $[-1, 2]$ tal que

$$\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx = f(c)[2 - (-1)]$$

Nesse caso específico, podemos calcular c explicitamente. Do Exemplo 1 sabemos que $f_{\text{med}} = 2$, então o valor de c satisfaz

$$f(c) = f_{\text{med}} = 2$$

Portanto, $\qquad 1 + c^2 = 2 \qquad$ e assim $\qquad c^2 = 1$

Dessa forma, nesse caso, existem dois números $c = \pm 1$ no intervalo $[-1, 2]$ que satisfazem o Teorema do Valor Médio para Integrais. □

FIGURA 3

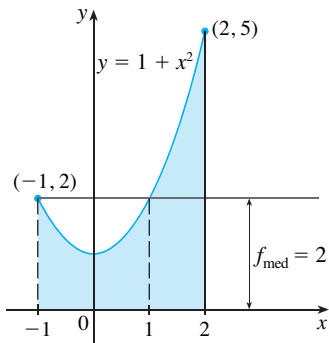
Os Exemplos 1 e 2 estão ilustrados na Figura 3.

EXEMPLO 3 Mostre que a velocidade média de um carro em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é a mesma que a média de suas velocidades durante a viagem.

SOLUÇÃO Se $s(t)$ é o deslocamento do carro no intervalo de tempo t, então, por definição, a velocidade média do carro no intervalo é

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Por outro lado, o valor médio da função velocidade no intervalo é

$$v_{\text{med}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}[s(t_2) - s(t_1)] \qquad \text{(pelo Teorema de Variação Total)}$$

$$= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{velocidade média}$$

6.5 EXERCÍCIOS

1–8 Encontre o valor médio da função no intervalo dado.

1. $f(x) = 4x - x^2$, $[0, 4]$

2. $f(x) = \text{sen}\, 4x$, $[-\pi, \pi]$

3. $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $[1, 8]$

4. $g(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}$, $[0, 2]$

5. $f(t) = te^{-t^2}$, $[0, 5]$

6. $f(\theta) = \sec\theta\, \text{tg}\,\theta$, $[0, \pi/4]$

7. $h(x) = \cos^4 x\, \text{sen}\, x$, $[0, \pi]$

8. $h(u) = (3 - 2u)^{-1}$, $[-1, 1]$

9–12

(a) Encontre o valor médio de f no intervalo dado.

(b) Encontre c tal que $f_{med} = f(c)$.

(c) Esboce o gráfico de f e um retângulo cuja área é a mesma que a área sob o gráfico de f.

9. $f(x) = (x - 3)^2$, $[2, 5]$

10. $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, 4]$

11. $f(x) = 2\,\text{sen}\, x - \text{sen}\, 2x$, $[0, \pi]$

12. $f(x) = 2x/(1 + x^2)^2$, $[0, 2]$

13. Se f é contínua e $\int_1^3 f(x)\,dx = 8$, mostre que f assume o valor 4 pelo menos uma vez no intervalo $[1, 3]$.

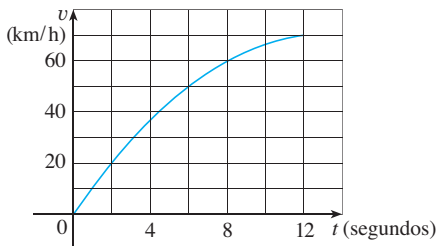
14. Encontre os valores de b tais que o valor médio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ no intervalo $[0, b]$ é igual a 3.

15. A tabela dá valores de uma função contínua. Use a Regra do Ponto Médio para estimar o valor médio de f em $[20, 50]$.

x	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	42	38	31	29	35	48	60

16. O gráfico da velocidade de um carro acelerado está mostrado a seguir.

(a) Dê uma estimativa da velocidade média do carro nos 12 primeiros segundos.

(b) Em que instante a velocidade instantânea foi igual à velocidade média?

17. Em uma certa cidade a temperatura (em °C) t horas depois das 9 horas foi aproximada pela função

$$T(t) = 20 + 6\,\text{sen}\,\frac{\pi t}{12}$$

Calcule a temperatura média durante o período entre 9 h e 21 h.

18. (a) Uma xícara de café está a uma temperatura de 95 °C e leva 30 minutos para esfriar para 61 °C em uma sala com temperatura de 20 °C. Use a Lei de Newton de Resfriamento (Seção 3.8) para mostrar que a temperatura do café após t minutos é

$$T(t) = 20 + 75e^{-kt}$$

em que $k \approx 0{,}02$.

(b) Qual a temperatura média do café durante a primeira meia hora?

19. A densidade linear de uma barra de 8 m de comprimento é $12/\sqrt{x + 1}$ kg/m, onde x é medido em metros a partir da ponta da barra. Encontre a densidade média da barra.

20. Se um corpo em queda livre parte do repouso, então o seu deslocamento é dado por $s = \frac{1}{2}gt^2$. Seja v_T a velocidade após um tempo T. Mostre que, se calcularmos a média das velocidades em relação a t, obteremos $v_{med} = \frac{1}{2}v_T$, mas se calcularmos a média das velocidades em relação a s, teremos $v_{med} = \frac{2}{3}v_T$.

21. Use o resultado do Exercício 79 na Seção 5.5 para calcular o volume médio de ar inalado pelos pulmões em um ciclo respiratório.

22. A velocidade v do sangue que circula em uma veia com raio R e comprimento l a uma distância r do eixo central é

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

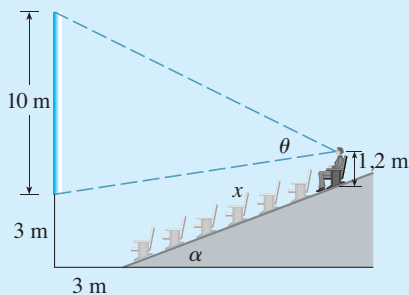
em que P é a diferença de pressão entre as extremidades da veia e η é a viscosidade do sangue (veja o Exemplo 7 da Seção 3.7). Encontre a velocidade média (em relação a r) no intevalo $0 \leqslant r \leqslant R$. Compare a velocidade média com a velocidade máxima.

23. Demonstre o Teorema do Valor Médio para Integrais usando o Teorema do Valor Médio para derivadas (veja a Seção 4.2) para a função $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

24. Se $f_{med}[a, b]$ denota o valor médio de f no intervalo $[a, b]$ e $a < c < b$, mostre que

$$f_{med}[a, b] = \frac{c - a}{b - a} f_{med}[a, c] + \frac{b - c}{b - a} f_{med}[c, b]$$

PROJETO APLICADO

SCA ONDE SENTAR-SE NO CINEMA

Uma sala de cinema tem uma tela que está posicionada 3 m acima do chão e tem 10 m de altura. A primeira fileira de poltronas está colocada a 3 m da tela e as fileiras estão separadas por 1 m. O chão da área com assentos está inclinado a um ângulo $\alpha = 20°$ acima da linha horizontal e a distância ao longo da linha inclinada até o seu assento é x. A sala tem 21 fileiras de poltronas, portanto $0 \leqslant x \leqslant 20$. Suponha que você decida que o melhor lugar para sentar é a fileira onde o ângulo subentendido pela tela em seus olhos é o máximo. Admita que os seus olhos estão a 1,2 m acima do solo, como mostrado na figura. (No Exercício 70 da Seção 4.7, vimos uma versão mais simples desse problema, onde o solo é horizontal, mas esse projeto envolve uma situação mais complicada e requer tecnologia.)

1. Mostre que

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 100}{2ab}\right)$$

onde $\qquad a^2 = (3 + x\cos\alpha)^2 + (11{,}8 - x\,\text{sen}\,\alpha)^2$

e $\qquad b^2 = (3 + x\cos\alpha)^2 + (x\,\text{sen}\,\alpha - 1{,}8)^2$

2. Use o gráfico de θ como uma função de x para estimar o valor de x que maximiza θ. Em qual fileira você deve sentar? Qual é o ângulo de visão θ nessa fileira?

3. Use seu sistema de computação algébrica para derivar e encontrar um valor numérico para a raiz da equação $d\theta/dx = 0$. Esse resultado confirma a sua resposta no Problema 2?

4. Use o gráfico de θ para estimar o valor médio de θ no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 20$. Então, use o seu SCA para calcular o valor médio. Compare com os valores máximo e mínimo de θ.

6 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) Desenhe duas curvas típicas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Mostre como aproximar a área entre essas curvas por uma soma de Riemann e esboce os correspondentes retângulos aproximantes. Então, escreva uma expressão para a área exata.

(b) Explique como a situação muda se as curvas tiverem equações $x = f(y)$ e $x = g(y)$, onde $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$.

2. Suponha que Sueli fique à frente de Cátia em uma corrida de 1 500 m. Qual é o significado físico da área entre suas curvas de velocidade para o primeiro minuto de corrida?

3. (a) Suponha que S seja um sólido com secções transversais conhecidas. Explique como aproximar o volume de S por uma soma de Riemann. Então, escreva uma expressão para o volume exato.

(b) Se S é um sólido de revolução, como você encontra as áreas das secções transversais?

4. (a) Qual é o volume de uma casca cilíndrica?

(b) Explique como usar cascas cilíndricas para encontrar o volume de um sólido de revolução.

(c) Por que você usaria o método das cascas em vez do de fatiamento?

5. Suponha que você empurre um livro sobre uma mesa de 6 m de comprimento exercendo uma força $f(x)$ a cada ponto de $x = 0$ a $x = 6$. O que $\int_0^6 f(x)\,dx$ representa? Se $f(x)$ é medida em newtons, quais são as unidades da integral?

6. (a) Qual é o valor médio da função f no intervalo $[a, b]$?

(b) O que diz o Teorema do Valor Médio para Integrais? Qual é a sua interpretação geométrica?

EXERCÍCIOS

1–6 Encontre a área da região limitada pelas curvas dadas.

1. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$

2. $y = 1/x$, $y = x^2$, $y = 0$, $x = e$

3. $y = 1 - 2x^2$, $y = |x|$

4. $x + y = 0$, $x = y^2 + 3y$

5. $y = \text{sen}(\pi x/2)$, $y = x^2 - 2x$

6. $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, $x = 2$

7–11 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

7. $y = 2x$, $y = x^2$; em torno do eixo x

8. $x = 1 + y^2$, $y = x - 3$; em torno do eixo y

9. $x = 0$, $x = 9 - y^2$; em torno de $x = -1$

10. $y = x^2 + 1$, $y = 9 - x^2$; em torno de $y = -1$

11. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = a + h$ (em que $a > 0$, $h > 0$); em torno do eixo y

12–14 Escreva, mas não calcule, uma integral para o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

12. $y = \text{tg}\, x$, $y = x$, $x = \pi/3$; em torno do eixo y

13. $y = \cos^2 x$, $|x| \leqslant \pi/2$, $y = \frac{1}{4}$; em torno de $x = \pi/2$

14. $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, em torno de $y = 2$

15. Encontre os volumes dos sólidos obtidos pela rotação da região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ em torno das seguintes retas:
(a) O eixo x (b) O eixo y (c) $y = 2$

16. Seja $\mathcal{R}$ a região no primeiro quadrante limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$. Calcule as seguintes quantidades:
(a) A área de $\mathcal{R}$.
(b) O volume obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.
(c) O volume obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo y.

17. Seja $\mathcal{R}$ a região limitada pelas curvas $y = \text{tg}(x^2)$, $x = 1$ e $y = 0$. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 4$ para estimar as seguintes quantidades:
(a) A área de $\mathcal{R}$.
(b) O volume obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

18. Seja $\mathcal{R}$ a região limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x^6 - x + 1$. Estime as seguintes quantidades:
(a) As coordenadas x dos pontos de intersecção das curvas.
(b) A área de $\mathcal{R}$.
(c) O volume gerado pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.
(d) O volume gerado pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo y.

19–22 Cada integral representa o volume de um sólido. Descreva o sólido.

19. $\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x\, dx$

20. $\int_0^{\pi/2} 2\pi \cos^2 x\, dx$

21. $\int_0^{\pi} \pi (2 - \text{sen}\, x)^2\, dx$

22. $\int_0^4 2\pi (6 - y)(4y - y^2)\, dy$

23. A base de um sólido é um disco circular de raio 3. Ache o volume do sólido se secções transversais paralelas perpendiculares à base são triângulos retos isósceles com a hipotenusa na base.

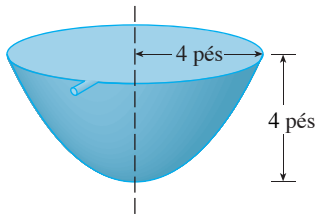
24. A base de um sólido é a região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$. Encontre o volume do sólido se as secções transversais perpendiculares ao eixo x são quadrados com um lado sobre a base.

25. A altura de um monumento é de 20 m. Uma secção transversal horizontal a uma distância de x metros do topo é um triângulo equilátero com lado $\frac{1}{4}x$ metros. Encontre o volume do monumento.

26. (a) A base de um sólido é um quadrado com vértices localizados em $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$. Cada secção transversal perpendicular ao eixo x é um semicírculo. Ache o volume do sólido.
(b) Mostre que cortando o sólido da parte (a) podemos rearranjá-lo para formar um cone. Assim, calcule seu volume mais simplesmente.

27. Uma força de 30 N é necessária para manter uma mola esticada do seu comprimento natural de 12 cm a um comprimento de 15 cm. Quanto trabalho é efetuado ao esticar a mola de 12 cm para 20 cm?

28. Um elevador de 1 600 lb é suspenso por um cabo de 200 pés que pesa 10 lb/pé. Quanto trabalho é necessário para suspender o elevador do porão para o terceiro andar a uma distância de 30 pés?

29. Um tanque cheio de água tem o formato de um paraboloide de revolução, como mostrado na figura; isto é, seu formato é obtido pela rotação de uma parábola ao redor de um eixo vertical.
(a) Se a sua altura é de 4 pés e o raio do topo, de 4 pés, ache o trabalho necessário para bombear a água para fora do tanque.
(b) Qual a profundidade da água remanescente no tanque depois de um trabalho de 4 000 pé-lb?

30. Encontre o valor médio da função $f(t) = t\ \text{sen}(t^2)$ no intervalo $[0, 10]$.

31. Se f é uma função contínua, qual é o limite quando $h \to 0$ do valor médio de f no intervalo $[x, x + h]$?

32. Seja $\mathcal{R}_1$ a região limitada por $y = x^2$, $y = 0$ e $x = b$, em que $b > 0$. Seja $\mathcal{R}_2$ a região limitada por $y = x^2$, $x = 0$ e $y = b^2$.

(a) Existe algum valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ tenham a mesma área?

(b) Existe algum valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ ocupe o mesmo volume quando girado em torno do eixo x e do eixo y?

(c) Existe algum valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ ocupem o mesmo volume quando girados em torno do eixo x?

(d) Existe algum valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ ocupem o mesmo volume quando girados em torno do eixo y?

FIGURA PARA O PROBLEMA 3

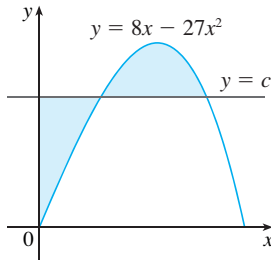



FIGURA PARA O PROBLEMA 5

1. (a) Encontre uma função contínua positiva, f, tal que a área sob seu gráfico, de 0 a t é $A(t) = t^3$ para todo $t > 0$.

(b) Um sólido é gerado pela rotação da região abaixo da curva $y = f(x)$, onde f é uma função positiva e $x \geqslant 0$, em torno do eixo x. O volume gerado pela parte da curva, de $x = 0$ até $x = b$, é b^2, para todo $b > 0$. Encontre a função f.

2. Existe uma reta que passa pela origem e que divide a região limitada pela parábola $y = x - x^2$ e o eixo x em duas regiões de áreas iguais. Qual é a inclinação dessa reta?

3. A figura mostra uma reta horizontal $y = c$ interceptando a curva $y = 8x - 27x^3$. Ache o número c tal que as áreas das regiões sombreadas sejam iguais.

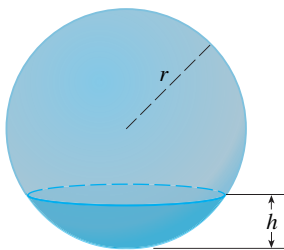
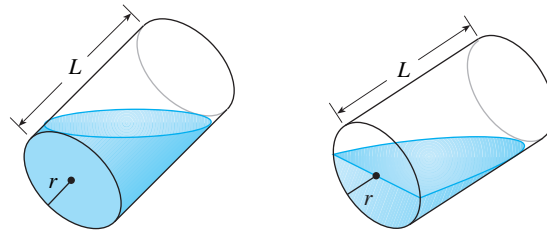
4. Um vidro cilíndrico de raio r e comprimento L é cheio com água e então inclinado até que a água remanescente no vidro cubra exatamente a sua base.

(a) Determine uma maneira de "fatiar" a água em secções transversais paralelas retangulares e então *escreva* uma integral definida para o volume de água no vidro.

(b) Determine uma maneira de "fatiar" a água em secções transversais paralelas que são trapézios e então *escreva* uma integral definida para o volume de água.

(c) Encontre o volume de água no vidro calculando uma das integrais na parte (a) ou (b).

(d) Encontre o volume de água no vidro a partir de considerações puramente geométricas.

(e) Suponha que o vidro fosse inclinado até que a água cobrisse exatamente a metade da base. Em que direção você poderia "fatiar" a água em secções transversais triangulares? E em secções transversais retangulares? E em secções transversais, que são segmentos de círculo? Encontre o volume de água no vidro.

5. (a) Mostre que o volume de uma calota de altura h de uma esfera de raio r é

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

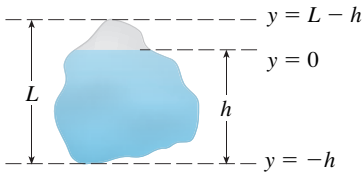
(b) Mostre que se uma esfera de raio 1 é fatiada por um plano a uma distância x do centro de maneira que o volume de uma calota é o dobro do volume da outra calota, então x é uma solução da equação

$$3x^3 - 9x + 2 = 0$$

em que $0 < x < 1$. Use o Método de Newton para encontrar o valor de x com precisão de quatro casas decimais.

(c) Usando a fórmula para o volume de uma calota de uma esfera, pode-se mostrar que a profundidade x até a qual uma esfera flutuante de raio r afunda na água é uma raiz da equação

$$x^3 - 3rx^2 + 4r^3s = 0$$

em que s é o peso específico da esfera. Suponha que uma esfera de madeira de raio 0,5 m tenha um peso específico de 0,75. Calcule, com precisão de 4 casas decimais, a profundidade até a qual a esfera afundará.

(d) Uma tigela hemisférica tem raio de 12 cm e a água está enchendo a tigela a uma taxa de 3 cm^3/s.

(i) Com que rapidez o nível de água está subindo na tigela no instante em que a profundidade da água é 7 cm?

(ii) Em um certo instante, a água está com uma profundidade de 8 cm. Quanto tempo vai levar para água encher a tigela?

FIGURA PARA O PROBLEMA 6

6. O Princípio de Arquimedes afirma que a força de empuxo em um objeto parcial ou totalmente submerso em um fluido é igual ao peso do fluido que o objeto desloca. Então, para um objeto de densidade ρ_0 boiando parcialmente submerso em um fluido de densidade ρ_f, a força de empuxo é dada por $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A(y)\, dy$, onde g é a aceleração da gravidade e $A(y)$, a área de uma secção transversal típica do objeto. O peso do objeto é dado por

$$W = \rho_0 g \int_{-h}^{L-h} A(y)\, dy$$

(a) Mostre que a porcentagem do volume do objeto acima do nível da superfície do fluido é dada por

$$100\, \frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}$$

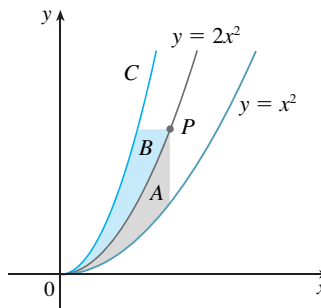
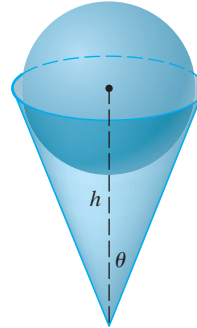
(b) A densidade do gelo é de 917 k/gm^3, e a densidade da água do mar é de 1 030 kg/m^3. Que porcentagem do volume de um *iceberg* está acima da água?

(c) Um cubo de gelo flutua em um copo completamente cheio com água. A água transbordará quando o gelo derreter?

(d) Uma esfera de raio 0,4 m e peso desprezível está flutuando em um grande lago de água doce. Qual o trabalho necessário para submergir a esfera completamente? A densidade da água é de 1 000 kg/m^3.

7. A água em uma tigela aberta evapora a uma taxa proporcional à área da superfície da água. (Isso significa que a taxa de diminuição do volume é proporcional à área da superfície.) Mostre que a profundidade da água diminui a uma taxa constante, independentemente do formato da tigela.

8. Uma esfera de raio 1 intercepta uma esfera menor de raio r de maneira que a intersecção é um círculo de raio r. (Em outras palavras, elas se interceptam em um círculo máximo da esfera pequena.) Encontre r de forma que o volume dentro da esfera pequena e fora da esfera grande seja o máximo possível.

9. A figura mostra uma curva C com a seguinte propriedade: para cada ponto P na curva do meio $y = 2x^2$, as áreas A e B são iguais. Ache uma equação para C.

10. Um copo descartável cheio de água tem o formato de um cone com altura h e ângulo semivertical θ (veja a figura). Uma bola é colocada cuidadosamente no copo, causando um deslocamento de água e, portanto, derramando-a. Qual é o raio da bola que causa o maior transbordamento de água?

11. Uma *clepsidra*, ou relógio de água, é um frasco com um pequeno furo no fundo pelo qual a água passa. O relógio é calibrado para medir o tempo colocando-se marcas no frasco que correspondem ao nível de água a intervalos de tempo iguais. Seja $x = f(y)$ uma função contínua no intervalo $[0, b]$ e suponha que o frasco seja formado pela rotação do gráfico de f ao redor do eixo y. Seja V o volume de água e h a altura do nível de água no instante t.

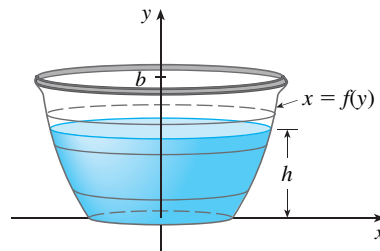
(a) Determine V como uma função de h.

(b) Mostre que

$$\frac{dV}{dt} = \pi[f(h)]^2 \frac{dh}{dt}$$

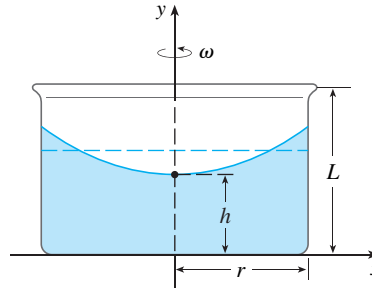
(c) Suponha que A é a área do buraco no fundo do frasco. Da Lei de Torricelli, temos que a taxa de mudança do volume de água dada por

$$\frac{dV}{dt} = kA\sqrt{h}$$

em que k é uma constante negativa. Determine uma fórmula para a função f tal que dh/dt seja uma constante C. Qual a vantagem em ter $dh/dt = C$?

12. Um frasco cilíndrico de raio r e altura L é parcialmente cheio com um líquido cujo volume é V. Se o frasco é girado ao redor do seu eixo de simetria com uma velocidade angular ω, constante, então o frasco induzirá um movimento de rotação do líquido em torno do mesmo eixo. Eventualmente, o líquido girará na mesma velocidade an-

gular do frasco. A superfície do líquido se tornará convexa, como indicado na figura, porque a força centrífuga nas partículas do líquido aumenta com a distância do eixo do frasco. Pode-se mostrar que a superfície do líquido é um paraboloide de revolução gerado pela rotação da parábola

$$y = h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

em torno do eixo y, em que g é a aceleração da gravidade.

(a) Determine h como uma função de ω.

(b) A que velocidade angular a superfície do líquido tocará o fundo do frasco? A que velocidade o líquido entornará?

(c) Suponha que o raio do frasco é 2 m, a altura, 7 m e o frasco e o líquido estão girando com a mesma velocidade angular. A superfície do líquido está 5 m abaixo do topo do frasco no eixo central e 4 m abaixo do topo do frasco, a 1 m de distância do eixo central.

(i) Determine a velocidade angular do frasco e o volume do fluido.

(ii) A que distância da borda do tanque está o líquido na parede do frasco?

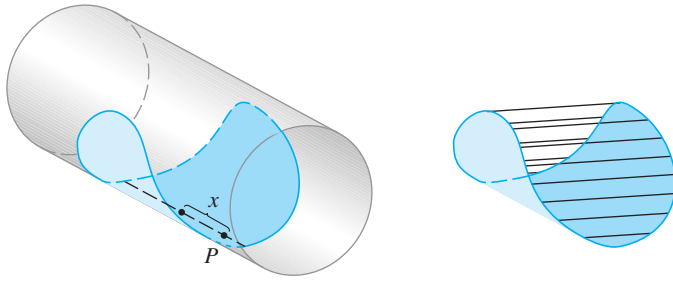
13. Suponha que o gráfico de um polinômio cúbico intercepta a parábola $y = x^2$ quando $x = 0$, $x = a$ e $x = b$, em que $0 < a < b$. Se as duas regiões entre as curvas tiverem a mesma área, como b está relacionado com a?

SCA **14.** Suponha que estejamos planejando fazer tacos com uma tortilha redonda com 8 polegadas de diâmetro, curvando a tortilha como se estivesse parcialmente envolvendo um cilindro circular. Queremos rechear a tortilha até a borda (e não mais) com carne, queijo e outros ingredientes. Nosso problema é decidir como curvar a tortilha a fim de maximizar o volume de comida que ela possa conter.

(a) Começamos posicionando um cilindro circular de raio r ao longo de um diâmetro da tortilha e envolvendo-a em torno do cilindro. Seja x a distância do centro da tortilha até um ponto P sobre o diâmetro (veja a figura). Mostre que a área da secção transversal do taco recheado no plano passando por P e perpendicular ao eixo do cilindro é

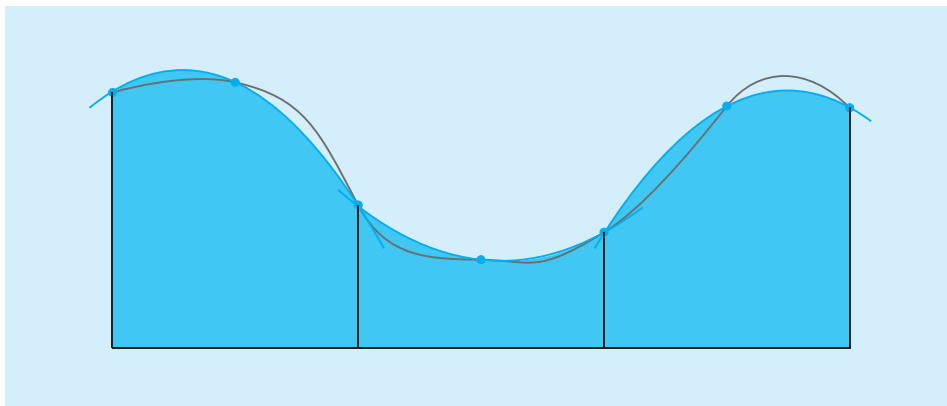
$$A(x) = r\sqrt{16 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{r}\sqrt{16 - x^2}\right)$$

e escreva uma expressão para o volume desse taco recheado.

(b) Determine (aproximadamente) o valor do r que maximiza o volume do taco. (Use uma aproximação gráfica do seu SCA).

15. Se a tangente no ponto P da curva $y = x^3$ intercepta essa mesma curva em Q, seja A a área da região delimitada pela curva e pelo segmento de reta PQ. Seja B a área da região definida da mesma forma, mas começando com Q em vez de P. Qual a relação entre A e B?

7

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

A Regra de Simpson estima integrais aproximando gráficos por parábolas.

Com o Teorema Fundamental do Cálculo podemos integrar uma função se conhecermos uma primitiva, isto é, uma integral indefinida. Aqui, resumimos as integrais mais importantes aprendidas até agora.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Neste capítulo desenvolveremos técnicas para usar essas fórmulas básicas de integração para obter integrais indefinidas de funções mais complicadas. Aprendemos o método mais importante de integração, o Método da Substituição, na Seção 5.5. A outra técnica geral, integração por partes, é apresentada na Seção 7.1. Então, aprenderemos métodos que são especiais para classes particulares de funções, tais como funções trigonométricas e racionais.

A integração não é tão simples quanto a derivação; não existem regras que nos garantam a obtenção de uma integral indefinida de uma função. Portanto, na Seção 7.5, discutiremos uma estratégia para integração.

7.1 INTEGRAÇÃO POR PARTES

Cada regra de derivação tem outra correspondente de integração. Por exemplo, a Regra de Substituição para a integração corresponde à Regra da Cadeia para a derivação. Aquela que corresponde à Regra do Produto para a derivação é chamada *integração por partes*.

A Regra do Produto afirma que se f e g são funções deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Na notação para integrais indefinidas, essa equação se torna

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

ou

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Podemos rearranjar essa equação como

1

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

A Fórmula 1, denominada **fórmula de integração por partes**, é mais facilmente lembrada com a seguinte notação. Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então, as diferenciais são $du = f'(x)\,dx$ e $dv = g'(x)\,dx$ e, assim, pela Regra da Substituição, a fórmula da integração por partes torna-se

2

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

EXEMPLO 1 Encontre $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 1 Suponha $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Então $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$. (Para g podemos escolher qualquer primitiva de g'.) Assim, usando a Fórmula 1, temos

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \\ &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

□

É interessante verificar a resposta, derivando-a. Se fizermos isso, obteremos $x \operatorname{sen} x$, como esperado.

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 2 Seja

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

Então,

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

■ É útil usar o seguinte padrão:

$u = \square \qquad dv = \square$

$du = \square \qquad v = \square$

e, desse modo,

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= \int \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{\operatorname{sen} x\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\,\overbrace{dx}^{du} \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

OBS. Nosso objetivo ao usar a integração por partes é obter uma integral mais simples que aquela de partida. Assim, no Exemplo 1 iniciamos com $\int x \operatorname{sen} x\, dx$ e a expressamos em termos da integral mais simples $\int \cos x\, dx$. Se tivéssemos escolhido $u = \operatorname{sen} x$ e $dv = x\, dx$, então $du = \cos x\, dx$ e $v = x^2/2$; assim, a integração por partes daria

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = (\operatorname{sen} x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx$$

Embora isso seja verdadeiro, $\int x^2 \cos x\, dx$ é uma integral mais difícil que aquela que começamos. Em geral, ao decidir sobre uma escolha para u e dv, geralmente tentamos escolher $u = f(x)$ como uma função que se torna mais simples quando derivada (ou ao menos não mais complicada), contanto que $dv = g'(x)\, dx$ possa ser prontamente integrada para fornecer v.

EXEMPLO 2 Calcule $\int \ln x\, dx$.

SOLUÇÃO Não temos aqui muita escolha para u e dv. Seja

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Então,

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$$

Integrando por partes, temos

■ É comum escrevermos $\int 1\, dx$ como $\int dx$.

■ Verifique a resposta derivando-a.

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= x \ln x - \int x\, \frac{dx}{x} \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

A integração por partes é eficaz nesse exemplo porque a derivada da função $f(x) = \ln x$ é mais simples que f. □

EXEMPLO 3 Encontre $\int t^2 e^t\, dt$.

SOLUÇÃO Observe que t^2 se torna mais simples quando derivada (enquanto e^t permanece inalterada quando a derivamos ou a integramos). Assim, escolhemos

$$u = t^2 \qquad dv = e^t\, dt$$

Então,

$$du = 2t\, dt \qquad v = e^t$$

A integração por partes resulta em

$$\int t^2 e^t\, dt = t^2 e^t - 2\int t e^t\, dt \tag{3}$$

A integral que obtivemos, $\int t e^t\, dt$, é mais simples que a integral original, mas ainda não é óbvia. Portanto, usamos a integração por partes mais uma vez, mas agora com $u = t$ e $dv = e^t\, dt$. Então, $du = dt$, $v = e^t$, e

$$\int t e^t\, dt = t e^t - \int e^t\, dt = t e^t - e^t + C$$

Colocando isso na Equação 3, temos

$$\begin{aligned}\int t^2 e^t\, dt &= t^2 e^t - 2\int t e^t\, dt \\ &= t^2 e^t - 2(t e^t - e^t + C) \\ &= t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{em que } C_1 = -2C\end{aligned}$$ □

■ Um método mais fácil, usando números complexos, é dado no Exercício 50 do Apêndice H.

EXEMPLO 4 Calcule $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$.

SOLUÇÃO Nem e^x nem sen x tornam-se mais simples quando derivadas, mas tentamos escolher $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$ de qualquer maneira. Então $du = e^x\, dx$ e $v = -\cos x$. Assim, integrando por partes obtemos

$$\boxed{4} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

A integral que obtivemos, $\int e^x \cos x\, dx$, não é mais simples que a integral original, mas pelo menos não é mais complicada. Como tivemos sucesso no exemplo anterior integrando por partes duas vezes, insistiremos e integraremos por partes novamente. Dessa vez usaremos $u = e^x$ e $dv = \cos x\, dx$. Então $du = e^x\, dx$, $v = \operatorname{sen} x$, e

$$\boxed{5} \qquad \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

■ A Figura 1 ilustra o Exemplo 4 mostrando os gráficos de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ e $F(x) = \frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como uma verificação visual de nosso trabalho, observe que $f(x) = 0$ quando F tem um máximo ou um mínimo.

FIGURA 1

A princípio, parece que não fizemos nada, já que chegamos a $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$, isto é, onde começamos. Contudo, se substituirmos a expressão para $\int e^x \cos x\, dx$ da Equação 5 na Equação 4 obtemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Isso pode ser considerado uma equação para integral desconhecida. Adicionando $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ em ambos os lados, obtemos

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividindo por 2 e adicionando a constante de integração, temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C \qquad \square$$

Se combinarmos a fórmula de integração por partes com a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, poderemos calcular integrais definidas por partes. Calculando ambos os lados da Fórmula 1 entre a e b, supondo f' e g' contínuas e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\boxed{6} \qquad \boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\, dx}$$

EXEMPLO 5 Calcule $\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1} x\, dx$

SOLUÇÃO Seja

$$u = \operatorname{tg}^{-1} x \qquad dv = dx$$

Então,

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad v = x$$

Assim, a Fórmula 6 dá

$$\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1} x\, dx = x \operatorname{tg}^{-1} x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx$$

$$= 1 \cdot \operatorname{tg}^{-1} 1 - 0 \cdot \operatorname{tg}^{-1} 0 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx$$

■ Como $\text{tg}^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, a integral no Exemplo 5 pode ser interpretada como a área da região mostrada na Figura 2.

FIGURA 2

Para calcular essa integral, usamos a substituição $t = 1 + x^2$ (já que u tem outro significado nesse exemplo). Então $dt = 2x\,dx$ e, assim, $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Quando $x = 0$, $t = 1$; quando $x = 1$, $t = 2$; portanto

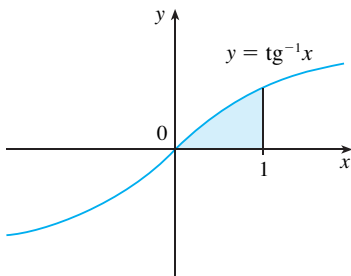
$$\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

Assim,
$$\int_0^1 \text{tg}^{-1}x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$ □

EXEMPLO 6 Demonstre a fórmula de redução

7
$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\text{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$

em que $n \geqslant 2$ é um inteiro.

■ A Equação 7 é chamada *fórmula de redução* porque o expoente n foi *reduzido* para $n - 1$ e $n - 2$.

SOLUÇÃO Seja

$$u = \text{sen}^{n-1}x \qquad dv = \text{sen}\,x\,dx$$

Então,
$$du = (n-1)\,\text{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$$

de modo que a integração por partes resulta em

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\text{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

Como $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, temos

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\text{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \text{sen}^n x\,dx$$

Como no Exemplo 4, nessa equação isolamos a integral desejada, levando o último termo do lado direito para o lado esquerdo. Então, temos

$$n\int \text{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\text{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$

ou
$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\text{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$ □

A fórmula de redução (7) é útil porque usando-a repetidas vezes podemos eventualmente expressar $\int \text{sen}^n x\,dx$ em termos de $\int \text{sen}\,x\,dx$ (se n for ímpar) ou $\int (\text{sen}\,x)^0\,dx = \int dx$ (se n for par).

7.1 EXERCÍCIOS

1–2 Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv indicadas.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$; $\quad u = \ln x$, $\quad dv = x^2\,dx$

2. $\int \theta\cos\theta\,d\theta$; $\quad u = \theta$, $\quad dv = \cos\theta\,d\theta$

3–32 Calcule a integral.

3. $\int x\cos 5x\,dx$

4. $\int xe^{-x}\,dx$

5. $\int re^{r/2}\,dr$

6. $\int t\,\text{sen}\,2t\,dt$

7. $\int x^2\cos 3x\,dx$

8. $\int x^2\,\text{sen}\,ax\,dx$

9. $\int \ln(2x + 1)\,dx$

10. $\int \text{sen}^{-1}x\,dx$

11. $\int \text{arctg}\,4t\,dt$

12. $\int p^5 \ln p\,dp$

13. $\int t\sec^2 2t\,dt$

14. $\int s\,2^s\,ds$

15. $\int (\ln x)^2\,dx$

16. $\int t\,\text{senh}\,mt\,dt$

17. $\int e^{2\theta}\,\text{sen}\,3\theta\,d\theta$

18. $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\,d\theta$

19. $\int_0^{\pi} t\,\text{sen}\,3t\,dt$

20. $\int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x}\,dx$

21. $\int_0^1 t \cosh t \, dt$

22. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}} \, dy$

23. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

24. $\int_0^{\pi} x^3 \cos x \, dx$

25. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}} \, dy$

26. $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(1/x) dx$

27. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x \, dx$

28. $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3} \, dx$

29. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x) \, dx$

30. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4 + r^2}} \, dr$

31. $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2 \, dx$

32. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t - s) \, ds$

33–38 Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.

33. $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

34. $\int t^3 e^{-t^2} \, dt$

35. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2) \, d\theta$

36. $\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t \, dt$

37. $\int x \ln(1 + x) \, dx$

38. $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx$

39–42 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável usando o gráfico da função e de sua primitiva ($C = 0$).

39. $\int (2x + 3)e^x \, dx$

40. $\int x^{3/2} \ln x \, dx$

41. $\int x^3 \sqrt{1 + x^2} \, dx$

42. $\int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx$

43. (a) Use a fórmula de redução do Exemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use a parte (a) e a fórmula de redução para calcular $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$.

44. (a) Demonstre a fórmula de redução

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n - 1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int \cos^2 x \, dx$.

(c) Use as partes (a) e (b) para calcular $\int \cos^4 x \, dx$.

45. (a) Use a fórmula de redução do Exemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{n - 1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

em que $n \geqslant 2$ é um inteiro.

(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \, dx$.

(c) Use a parte (a) para mostrar que, para as potências ímpares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n + 1)}$$

46. Demonstre que, para as potências pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}$$

47–50 Use integração por partes para demonstrar a fórmula de redução.

47. $\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$

48. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

49. $\operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n - 1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx \qquad (n \neq 1)$

50. $\int \sec^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n - 1} + \frac{n - 2}{n - 1} \int \sec^{n-2} x \, dx \qquad (n \neq 1)$

51. Use o Exercício 47 para encontrar $\int (\ln x)^3 \, dx$.

52. Use o Exercício 48 para encontrar $\int x^4 e^x dx$.

53–54 Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

53. $y = xe^{-0,4x}$, $\quad y = 0$, $\quad x = 5$

54. $y = 5 \ln x$, $\quad y = x \ln x$

55–56 Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas x dos pontos de intersecção das curvas dadas. A seguir, ache (aproximadamente) a área da região delimitada pelas curvas.

55. $y = x \operatorname{sen} x$, $\quad y = (x - 2)^2$

56. $y = \operatorname{arctg} 3x$, $\quad y = \frac{1}{2} x$

57–60 Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

57. $y = \cos(\pi x/2)$, $\quad y = 0$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$; $\quad$ em torno do eixo y

58. $y = e^x$, $\quad y = e^{-x}$, $\quad x = 1$; $\quad$ em torno do eixo y

59. $y = e^{-x}$, $\quad y = 0$, $\quad x = -1$, $\quad x = 0$; $\quad$ em torno de $x = 1$

60. $y = e^x$, $\quad x = 0$, $\quad y = \pi$; $\quad$ em torno do eixo x

61. Encontre o valor médio de $f(x) = x^2 \ln x$ no intervalo $[1, 3]$.

62. Um foguete acelera pela queima do combustível a bordo; assim, sua massa diminui com o tempo. Suponha que a massa inicial do foguete no lançamento (incluindo o combustível) seja m, que o combustível seja consumido a uma taxa r, e que os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante v_e (relativa ao foguete). Um modelo para a velocidade do foguete no instante t é dado pela seguinte equação:

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

em que g é a aceleração da gravidade e t não é muito grande. Se $g = 9{,}8$ m/s^2, $m = 30\,000$ kg, $r = 160$ kg/s e $v_e = 3\,000$ m/s, ache a altitude do foguete 1 minuto após o lançamento.

63. Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros t segundos?

64. Se $f(0) = g(0) = 0$ e f'' e g'' são contínuas, mostre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx.$$

65. Suponha que $f(1) = 2, f(4) = 7, f'(1) = 5, f'(4) = 3$ e que f'' seja contínua. Determine o valor de $\int_1^4 x f''(x)\,dx$.

66. (a) Use integração por partes para mostrar que

$$\int f(x)\,dx = x f(x) - \int x f'(x)\,dx$$

(b) Se f e g são funções inversas e f' é contínua, demonstre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

[*Sugestão*: Use a parte (a) e faça a substituição $y = f(x)$.]

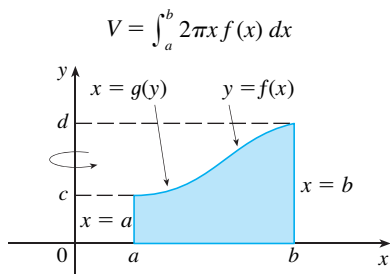
(c) No caso em que f e g são funções positivas e $b > a > 0$, desenhe um diagrama para dar uma interpretação geométrica à parte (b).

(d) Use a parte (b) para calcular $\int_1^e \ln x\,dx$.

67. Chegamos à Fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, utilizando cascas cilíndricas, mas agora podemos usar integração por partes para demonstrá-la usando o método das fatias da Seção 6.2, ao menos para o caso em que f é injetora e, portanto, tem uma função inversa g. Use a figura para mostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy$$

Faça a substituição $y = f(x)$ e então use integração por partes na integral resultante para demonstrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

68. Seja $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

(a) Mostre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.

(b) Use o Exercício 46 para mostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Utilize as partes (a) e (b) para mostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

e deduza que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

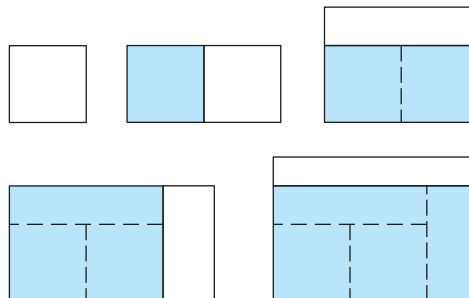
(d) Use a parte (c) e os Exercícios 45 e 46 para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Essa fórmula geralmente é escrita como um produto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

que é chamado *produto de Wallis*.

(e) Construímos retângulos como a seguir. Comece com um quadrado de área 1 e coloque retângulos de área 1 alternadamente ao lado ou no topo do retângulo anterior (veja a figura). Encontre o limite da relação largura/altura desses retângulos.

7.2 INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS

Nesta seção usaremos as identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas. Começaremos com as potências de seno e cosseno.

EXEMPLO 1 Calcule $\int \cos^3 x\,dx$.

SOLUÇÃO A simples substituição $u = \cos x$ não ajuda, porque assim $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Para integrarmos potências de cosseno, necessitaríamos de um fator extra $\operatorname{sen} x$. Analogamente, uma potência de seno precisaria de um fator extra $\cos x$. Dessa forma, podemos separar um fator cosseno e converter o fator $\cos^2 x$ restante em uma expressão envolvendo o seno usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x$$

Podemos então calcular a integral substituindo $u = \text{sen}\,x$, de modo que $du = \cos x\,dx$ e

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int (1 - \text{sen}^2 x)\cos x\,dx$$
$$= \int (1 - u^2)\,du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C$$
$$= \text{sen}\,x - \tfrac{1}{3}\text{sen}^3 x + C \qquad \square$$

Em geral, tentamos escrever um integrando envolvendo as potências de seno e cosseno em uma forma onde tenhamos somente um fator seno (e o restante da expressão em termos de cosseno) ou apenas um fator cosseno (e o restante da expressão em termos de seno). A identidade $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ nos permite a interconversão de potências pares de seno e cosseno.

EXEMPLO 2 Encontre $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\,dx$.

■ A Figura 1 mostra os gráficos do integrando $\text{sen}^5 x \cos^2 x$ do Exemplo 2 e sua integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

FIGURA 1

SOLUÇÃO Poderíamos converter $\cos^2 x$ para $1 - \text{sen}^2 x$, mas ficaríamos com uma expressão em termos de $\text{sen}\,x$ sem um fator extra $\cos x$. Em vez disso, separamos um único fator de seno e reescrevemos o fator $\text{sen}^4 x$ restante em termos de $\cos x$:

$$\text{sen}^5 x \cos^2 x = (\text{sen}^2 x)^2 \cos^2 x\,\text{sen}\,x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x\,\text{sen}\,x$$

Substituindo $u = \cos x$, temos $du = -\text{sen}\,x\,dx$ e assim

$$\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\,dx = \int (\text{sen}^2 x)^2 \cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx$$
$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx$$
$$= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\,du$$
$$= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C$$
$$= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C \qquad \square$$

Nos exemplos anteriores, uma potência ímpar de seno ou cosseno nos permitiu separar um único fator e converter a potência par remanescente. Se um integrando contém potências pares tanto para seno como para cosseno, essa estratégia falha. Nesse caso, podemos aproveitar as identidades dos ângulos-metade (veja as Equações 17b e 17a no Apêndice D).

$$\text{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{e} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

EXEMPLO 3 Calcule $\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\,dx$.

■ O Exemplo 3 mostra que a área da região exposta na Figura 2 é $\pi/2$.

FIGURA 2

SOLUÇÃO Se escrevermos $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, a integral não é mais simples de calcular. Usando a fórmula do ângulo-metade para $\text{sen}^2 x$, contudo, temos

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)dx = \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\text{sen}\,2x\right)\right]_0^{\pi}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,0\right) = \tfrac{1}{2}\,\pi$$

Observe que mentalmente fizemos a substituição $u = 2x$ quando integramos $\cos 2x$. Outro método para se calcular essa integral foi dado no Exercício 43 na Seção 7.1. $\square$

EXEMPLO 4 Encontre $\int \text{sen}^4 x\,dx$.

SOLUÇÃO É possível calcular essa integral usando a fórmula de redução para $\int \text{sen}^n x\,dx$ (Equação 7.1.7) com o Exemplo 3 (como no Exercício 43 na Seção 7.1), entretanto, outro método é escrever $\text{sen}^4 x = (\text{sen}^2 x)^2$ e usar uma fórmula do ângulo-metade:

$$\int \text{sen}^4 x\, dx = \int (\text{sen}^2 x)^2\, dx$$
$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \tfrac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

Como $\cos^2 2x$ ocorre, precisamos usar outra fórmula do ângulo-metade

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Isso resulta em

$$\int \text{sen}^4 x\, dx = \tfrac{1}{4} \int [1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)]\, dx$$
$$= \tfrac{1}{4} \int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2} - \text{sen}\, 2x + \tfrac{1}{8}\,\text{sen}\, 4x\right) + C \qquad \square$$

Para resumir, listamos as regras que devem ser seguidas quando calculamos integrais da forma $\int \text{sen}^m x \cos^n x\, dx$, em que $m \geqslant 0$ e $n \geqslant 0$ são inteiros.

ESTRATÉGIA PARA CALCULAR $\int \text{sen}^m x \cos^n x\, dx$

(a) Se a potência do cosseno é ímpar ($n = 2k + 1$), guarde um fator cosseno e use $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ para expressar os fatores remanescentes em termos de seno:

$$\int \text{sen}^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \text{sen}^m x\, (\cos^2 x)^k \cos x\, dx$$
$$= \int \text{sen}^m x\, (1 - \text{sen}^2 x)^k \cos x\, dx$$

A seguir, substitua $u = \text{sen}\, x$.

(b) Se a potência de seno é ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator seno e use $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, para expressar os fatores remanescentes em termos de cosseno:

$$\int \text{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx = \int (\text{sen}^2 x)^k \cos^n x\, \text{sen}\, x\, dx$$
$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x\, \text{sen}\, x\, dx$$

A seguir, substitua $u = \cos x$. [Observe que se ambas as potências de seno e cosseno forem ímpares, podemos usar (a) ou (b).]

(c) Se as potências de seno e cosseno são pares, utilizamos as identidades dos ângulos-metade

$$\text{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algumas vezes é útil usar a identidade

$$\text{sen}\, x \cos x = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, 2x$$

Podemos empregar uma estratégia semelhante para calcular integrais da forma $\int \text{tg}^m x \sec^n x\, dx$. Como $(d/dx)\, \text{tg}\, x = \sec^2 x$, podemos separar um fator $\sec^2 x$ e converter a potência (par) de secante remanescente em uma expressão envolvendo a tangente, utilizando a identidade $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$. Ou, como $(d/dx) \sec x = \sec x\, \text{tg}\, x$, podemos separar um fator $\sec x\, \text{tg}\, x$ e converter a potência (par) de tangente remanescente para secante.

EXEMPLO 5 Calcule $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx$.

SOLUÇÃO Se separamos um fator $\sec^2 x$, poderemos expressar o fator remanescente $\sec^2 x$ em termos de tangente usando a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Podemos então calcular a integral substituindo $u = \operatorname{tg} x$, de modo que $du = \sec^2 x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^6 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^6 x \,(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x \, dx \\ &= \int u^6 (1 + u^2) \, du = \int (u^6 + u^8) \, du \\ &= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C \\ &= \tfrac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x + \tfrac{1}{9} \operatorname{tg}^9 x + C\end{aligned}$$

□

EXEMPLO 6 Encontre $\int \operatorname{tg}^5 \theta \sec^7 \theta \, d\theta$

SOLUÇÃO Se separarmos um fator $\sec^2 \theta$ como no exemplo anterior, ficaremos com um fator $\sec^5 \theta$, que não é facilmente convertido para tangente. Contudo, se separarmos um fator $\sec \theta \operatorname{tg} \theta$, poderemos converter a potência remanescente de tangente em uma expressão envolvendo apenas a secante, usando a identidade $\operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$. Poderemos então calcular a integral substituindo $u = \sec \theta$, de modo que $du = \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 \theta \sec^7 \theta \, d\theta &= \int \tan^4 \theta \sec^6 \theta \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta \\ &= \int (\sec^2 \theta - 1)^2 \sec^6 \theta \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta \\ &= \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du \\ &= \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\ &= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\ &= \tfrac{1}{11} \sec^{11} \theta - \tfrac{2}{9} \sec^9 \theta + \tfrac{1}{7} \sec^7 \theta + C\end{aligned}$$

□

Os exemplos anteriores mostram as estratégias para calcular integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$ para dois casos, resumidos aqui.

ESTRATÉGIA PARA AVALIAR $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$

(a) Se a potência da secante é par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), guarde um fator de $\sec^2 x$ e use $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para expressar os fatores remanescentes em termos de $\operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x \, dx &= \int \operatorname{tg}^m x \,(\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^m x \,(1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \operatorname{tg} x$.

(b) Se a potência da tangente é ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ e use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os fatores remanescentes em termos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^{2k+1} x \sec^n x \, dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x \, dx\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \sec x$.

Para outros casos as regras não são tão simples. Talvez seja necessário usar identidades, integração por partes e, ocasionalmente, um pouco de engenhosidade. Algumas vezes precisaremos integrar tg x utilizando a fórmula estabelecida em 5.5.5:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln |\sec x| + C$$

Também precisaremos da integral indefinida de secante:

$$\boxed{1} \qquad \int \sec x\, dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Poderíamos verificar a Fórmula 1 derivando o lado direito, ou como a seguir. Primeiro multiplicamos numerador e denominador por $\sec x + \operatorname{tg} x$:

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x\, \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}\, dx$$

Se substituirmos $u = \sec x + \operatorname{tg} x$, então $du = (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x)\, dx$, assim a integral torna-se $\int (1/u)\, du = \ln |u| + C$. Então, temos

$$\int \sec x\, dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

EXEMPLO 7 Ache $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$.

SOLUÇÃO Aqui apenas tg x ocorre; então usamos $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para reescrever um fator $\operatorname{tg}^2 x$ em termos de $\sec^2 x$:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tg} x\, dx$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\sec x| + C$$

Na primeira integral substituímos mentalmente $u = \operatorname{tg} x$, de modo que $du = \sec^2 x\, dx$. □

Se uma potência par de tangente aparece com uma potência ímpar de secante, é útil expressar o integrando completamente em termos de sec x. As potências de sec x podem requerer a integração por partes, como mostrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 8 Ache $\int \sec^3 x\, dx$.

SOLUÇÃO Aqui integramos por partes com

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x\, dx$$

$$du = \sec x \operatorname{tg} x\, dx \qquad v = \operatorname{tg} x$$

Então,

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x\, dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

Usando a Fórmula 1 e isolando a integral pedida, temos

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C$$ □

As integrais como as do Exemplo 8 podem parecer muito especiais, mas elas ocorrem frequentemente nas aplicações de integração, como veremos no Capítulo 8. As integrais da forma $\int \operatorname{cotg}^m x \operatorname{cossec}^n x\, dx$ podem ser encontradas por métodos similares por causa da identidade $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$.

Finalmente, podemos usar outras identidades trigonométricas:

■ Essas identidades envolvendo produtos são discutidas no Apêndice D.

2 Para calcular as integrais (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$ ou (c) $\int \cos mx \cos nx\, dx$, use a identidade correspondente:

$$\text{(a) } \operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$$

$$\text{(b) } \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\text{(c) } \cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

EXEMPLO 9 Calcule $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx$.

SOLUÇÃO Essa integral pode ser calculada utilizando-se integração por partes, mas é mais fácil usar a identidade na Equação 2(a), como a seguir:

$$\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx = \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x) + C$$ □

7.2 EXERCÍCIOS

1–49 Calcule a integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$
2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x\, dx$
3. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\, dx$
4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^2(\pi x) \cos^5(\pi x)\, dx$
6. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$
8. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, d\theta$
9. $\int \cos^4 t\, dt$
10. $\int \operatorname{sen}^6 \pi x\, dx$
11. $\int (1 + \cos\theta)^2\, d\theta$
12. $\int x \cos^2 x\, dx$
13. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$
14. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t\, dt$
15. $\int \dfrac{\cos^5\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}}\, d\alpha$
16. $\int \cos\theta \cos^5(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$
17. $\int \cos^2 x \operatorname{tg}^3 x\, dx$
18. $\int \operatorname{cotg}^5\theta \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta$
19. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$
20. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} 2x\, dx$
21. $\int \sec^2 x \operatorname{tg} x\, dx$
22. $\int_0^{\pi/2} \sec^4(t/2)\, dt$
23. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$
24. $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)\, dx$
25. $\int \sec^6 t\, dt$
26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \operatorname{tg}^4\theta\, d\theta$
27. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\, dx$
28. $\int \operatorname{tg}^2(2x) \sec^5(2x)\, dx$
29. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec x\, dx$
30. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec^6 x\, dx$
31. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$
32. $\int \operatorname{tg}^6(ay)\, dy$
33. $\int \dfrac{\operatorname{tg}^3\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta$
34. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx$
35. $\int x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$
36. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi$
37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^2 x\, dx$
38. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^3 x\, dx$
39. $\int \operatorname{cotg}^3\alpha \operatorname{cossec}^3\alpha\, d\alpha$
40. $\int \operatorname{cossec}^4 x \operatorname{cotg}^6 x\, dx$
41. $\int \operatorname{cossec} x\, dx$
42. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{cossec}^3 x\, dx$
43. $\int \operatorname{sen} 8x \cos 5x\, dx$
44. $\int \operatorname{sen} 3x \cos x\, dx$
45. $\int \cos 7\theta \cos 5\theta\, d\theta$
46. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx$

47. $\int \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x}\, dx$

48. $\int \frac{dx}{\cos x - 1}$

49. $\int t \sec^2(t^2) \operatorname{tg}^4(t^2)\, dt$

50. Se $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6 x \sec x\, dx = I$, expresse o valor de $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^8 x \sec x\, dx$ em termos de I.

51–54 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável colocando em um gráfico o integrando e sua primitiva (tome $C = 0$).

51. $\int x \operatorname{sen}^2(x^2)\, dx$

52. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx$

53. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 6x\, dx$

54. $\int \sec^4 \frac{x}{2}\, dx$

55. Encontre o valor médio da função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

56. Calcule $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ por quatro métodos:
(a) a substituição $u = \cos x$,
(b) a substituição $u = \operatorname{sen} x$,
(c) a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
(d) integração por partes
Explique os aspectos diferentes de suas respostas.

57–58 Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

57. $y = \operatorname{sen}^2 x,\quad y = \cos^2 x,\quad -\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$

58. $y = \operatorname{sen}^3 x,\quad y = \cos^3 x,\quad \pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$

59–60 Use um gráfico do integrando para conjecturar o valor da integral. Então, utilize os métodos desta seção para demonstrar que sua conjectura está correta.

59. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, dx$

60. $\int_0^2 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 5\pi x\, dx$

61–64 Encontre o volume obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno dos eixos especificados.

61. $y = \operatorname{sen} x,\quad y = 0,\quad \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi;$ em torno de eixo x

62. $y = \operatorname{sen}^2 x,\quad y = 0,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ em torno de eixo x

63. $y = \operatorname{sen} x,\quad y = \cos x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4;$ em torno de $y = 1$

64. $y = \sec x,\quad y = \cos x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3;$ em torno de $y = -1$

65. Uma partícula se move em linha reta com função velocidade $v(t) = \operatorname{sen} \omega t \cos^2 \omega t$. Encontre sua função posição $s = f(t)$ se $f(0) = 0$.

66. A eletricidade doméstica é fornecida na forma de corrente alternada que varia de 155 V a -155 V com uma frequência de 60 ciclos por segundo (Hz). A voltagem então é dada pela seguinte equação:

$$E(t) = 155 \operatorname{sen}(120\pi t)$$

onde t é o tempo em segundos. Os voltímetros leem a voltagem RMS (raiz da média quadrática), que é a raiz quadrada do valor médio de $[E(t)]^2$ em um ciclo.
(a) Calcule a voltagem RMS da corrente doméstica.
(b) Muitos fornos elétricos requerem a voltagem RMS de 220 V. Encontre a amplitude A correspondente necessária para a voltagem $E(t) = A \operatorname{sen}(120\pi t)$.

67–69 Demonstre a fórmula, onde m e n são inteiros positivos.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0$

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

70. Uma *série de Fourier finita* é dada pela soma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx$$

Mostre que o m-ésimo coeficiente a_m é dado pela fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx$$

7.3 SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Para achar a área de um círculo ou uma elipse, uma integral da forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ aparece, onde $a > 0$. Se a integral fosse $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, a substituição $u = a^2 - x^2$ poderia ser eficaz, mas, como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ é mais difícil. Se mudarmos a variável de x para θ pela substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$, então a identidade $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permitirá que nos livremos da raiz, porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos\theta|$$

Observe a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual uma nova variável é uma função da velha) e a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$ (a variável velha é uma função da nova).

Em geral, podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$ usando a Regra da Substituição ao contrário. Para simplificar nossos cálculos, presumimos que g tenha uma fun-

ção inversa, isto é, g é injetora. Nesse caso, se trocarmos u por x e x por t na Regra da Substituição (Equação 5.5.4), obteremos

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Esse tipo de substituição é chamado *substituição inversa*.

Podemos fazer a substituição inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$ desde que esta defina uma função injetora. Isso pode ser conseguido pela restrição de θ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Na tabela a seguir listamos as substituições trigonométricas que são eficazes para as expressões radicais dadas em razão de certas identidades trigonométricas. Em cada caso, a restrição de θ é imposta para assegurar que a função que define a substituição seja injetora. (Estes são os mesmos intervalos usados na Seção 1.6 na definição de funções inversas.)

TABELA DE SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \operatorname{tg}^2\theta$

EXEMPLO 1 Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx$.

SOLUÇÃO Seja $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, onde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Então $dx = 3 \cos \theta\, d\theta$ e

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{9 \cos^2\theta} = 3\,|\cos \theta| = 3 \cos \theta$$

(Observe que $\cos \theta \geqslant 0$ porque $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.) Então, a Regra de Substituição Inversa fornece

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{3 \cos \theta}{9 \operatorname{sen}^2\theta} 3 \cos \theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \operatorname{cotg}^2\theta\, d\theta$$

$$= \int (\operatorname{cossec}^2 \theta - 1)d\theta$$

$$= -\operatorname{cotg} \theta - \theta + C$$

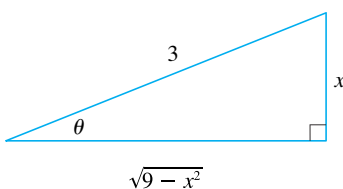



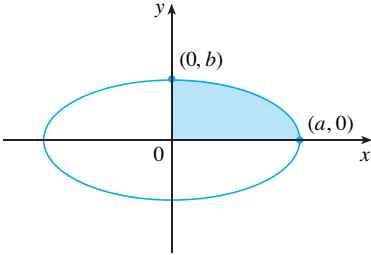
FIGURA 1

$\operatorname{sen} \theta = \dfrac{x}{3}$

Como esta é uma integral indefinida, devemos retornar à variável x original. Isso pode ser feito usando-se as identidades trigonométricas para expressar $\operatorname{cotg} \theta$ em termos de $\operatorname{sen} \theta = x/3$ ou pelo desenho de um diagrama, como na Figura 1, onde θ é interpretado como um ângulo de um triângulo retângulo. Como $\operatorname{sen} \theta = x/3$, escolhemos o lado oposto e a hipotenusa como tendo comprimentos x e 3. Pelo Teorema de Pitágoras o comprimento do lado adjacente é $\sqrt{9 - x^2}$, assim podemos ler o valor de $\operatorname{cotg} \theta$ diretamente da figura:

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$

(Embora $\theta > 0$ no diagrama, essa expressão para cotg θ é válida quando $\theta < 0$.) Como sen $\theta = x/3$, temos $\theta = \text{sen}^{-1}(x/3)$, e assim

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$ □

EXEMPLO 2 Encontre a área delimitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

FIGURA 2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUÇÃO Isolando y na a equação da elipse, temos

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \qquad \text{ou} \qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Como a elipse é simétrica em relação a ambos os eixos, a área total A é quatro vezes a área do primeiro quadrante (veja a Figura 2). A parte da elipse no primeiro quadrante é dada pela função

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

e, dessa forma,
$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Para calcular essa integral substituímos $x = a$ sen θ. Então $dx = a\cos\theta\, d\theta$. Para mudar os limites de integração notamos que quando $x = 0$, sen $\theta = 0$, logo $\theta = 0$; quando $x = a$, sen $\theta = 1$, assim $\theta = \pi/2$. Além disso,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\,\text{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\,|\cos\theta| = a\cos\theta$$

já que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Portanto

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\, d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 2ab\left[\theta + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) = \pi ab$$

Mostramos que a área de uma elipse com semieixos a e b é πab. Em particular, tomando $a = b = r$, demonstramos a famosa fórmula que diz que a área de um círculo de raio r é πr^2. □

OBS. Como a integral no Exemplo 2 era uma integral definida, mudamos os extremos de integração e não tivemos de converter de volta à variável x original.

EXEMPLO 3 Encontre $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$.

SOLUÇÃO Seja $x = 2\,\text{tg}\,\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Então $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$ e

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4(\text{tg}^2\theta + 1)} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2\,|\sec\theta| = 2\sec\theta$$

Assim, temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = \int \frac{2\sec^2\theta\, d\theta}{4\,\text{tg}^2\theta \cdot 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\text{tg}^2\theta}\, d\theta$$

Para calcular essa integral trigonométrica, colocamos tudo em termos de sen θ e cos θ:

$$\frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Portanto, fazendo a substituição $u = \operatorname{sen}\theta$, temos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C$$

$$= -\frac{\operatorname{cossec}\theta}{4} + C$$

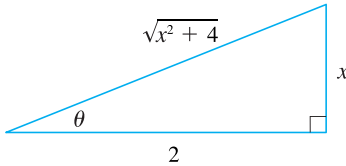



FIGURA 3

$\tan\theta = \dfrac{x}{2}$

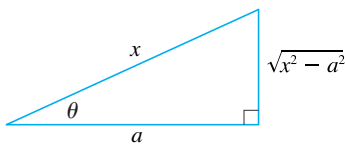
Usamos a Figura 3 para determinar que a cossec $\theta = \sqrt{x^2+4}/x$ e assim

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C \qquad \square$$

EXEMPLO 4 Encontre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

SOLUÇÃO Seria possível usar a substituição trigonométrica $x = 2\operatorname{tg}\theta$ aqui (como no Exemplo 3). Mas a substituição direta $u = x^2 + 4$ é mais simples, porque $du = 2x\,dx$ e

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C \qquad \square$$

OBS. O Exemplo 4 ilustra o fato de que, mesmo quando as substituições trigonométricas são possíveis, elas nem sempre dão a solução mais fácil. Você deve primeiro procurar um método mais simples.

EXEMPLO 5 Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, para $a > 0$.

SOLUÇÃO I Seja $x = a\sec\theta$, onde $0 < \theta < \pi/2$ ou $\pi < \theta < 3\pi/2$. Então $dx = a\sec\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta$ e

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\theta} = a\,|\operatorname{tg}\theta| = a\operatorname{tg}\theta$$

FIGURA 4

$\sec\theta = \dfrac{x}{a}$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{a\operatorname{tg}\theta}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C$$

O triângulo da Figura 4 mostra que $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{x^2-a^2}/a$, de modo que temos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C$$

Escrevendo $C_1 = C - \ln a$, temos

1 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1$$

SOLUÇÃO 2 Para $x > 0$ a substituição hiperbólica $x = a \cosh t$ também pode ser usada. Usando a identidade $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, temos

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 \operatorname{senh}^2 t} = a \operatorname{senh} t$$

Como $dx = a \operatorname{senh} t \, dt$, obtemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \operatorname{senh} t \, dt}{a \operatorname{senh} t} = \int dt = t + C$$

Como $\cosh t = x/a$, temos $t = \cosh^{-1}(x/a)$ e

2 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Embora as Fórmulas 1 e 2 pareçam muito diferentes, elas são realmente equivalentes pela Fórmula 3.11.4. □

OBS. Como o Exemplo 5 ilustra, as substituições hiperbólicas podem ser utilizadas no lugar de substituições trigonométricas e elas, às vezes, nos levam a respostas mais simples. Mas geralmente usamos substituições trigonométricas, porque as identidades trigonométricas são mais familiares que as identidades hiperbólicas.

EXEMPLO 6 Encontre $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}} dx$.

SOLUÇÃO Primeiro observamos que $(4x^2 + 9)^{3/2} = (\sqrt{4x^2 + 9})^3$; logo, a substituição trigonométrica é apropriada. Embora $\sqrt{4x^2 + 9}$ não seja exatamente uma expressão da tabela de substituições trigonométricas, ela se torna parte delas quando fazemos a substituição preliminar $u = 2x$. Quando combinamos esta com a substituição da tangente, temos $x = \frac{3}{2} \operatorname{tg} \theta$, o que dá $dx = \frac{3}{2} \sec^2\theta \, d\theta$ e

$$\sqrt{4x^2 + 9} = \sqrt{9 \operatorname{tg}^2\theta + 9} = 3 \sec \theta$$

Quando $x = 0$, $\operatorname{tg} \theta = 0$, assim $\theta = 0$; quando $x = 3\sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}$, assim $\theta = \pi/3$.

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8} \operatorname{tg}^3\theta}{27 \sec^3\theta} \frac{3}{2} \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{16} \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{\sec \theta} d\theta = \frac{3}{16} \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{3}{16} \int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta} \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

Agora substituímos $u = \cos \theta$, de modo que $du = -\operatorname{sen} \theta \, d\theta$. Quando $\theta = 0$, $u = 1$; quando $\theta = \pi/3$, $u = \frac{1}{2}$. Portanto

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}} dx = -\frac{3}{16} \int_0^{1/2} \frac{1 - u^2}{u^2} du = \frac{3}{16} \int_1^{1/2} (1 - u^{-2}) \, du$$

$$= \tfrac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} = \tfrac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2} + 2\right) - (1 + 1)\right] = \tfrac{3}{32}$$ □

EXEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx$.

SOLUÇÃO Podemos transformar o integrando em uma função para a qual a substituição trigonométrica é apropriada completando o quadrado:

$$\begin{aligned} 3 - 2x - x^2 &= 3 - (x^2 + 2x) = 3 + 1 - (x^2 + 2x + 1) \\ &= 4 - (x + 1)^2 \end{aligned}$$

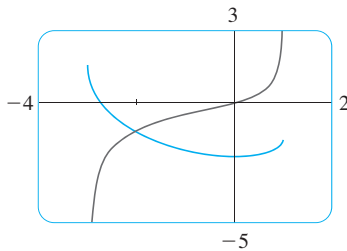
Isso sugere a substituição $u = x + 1$. Então $du = dx$ e $x = u - 1$, assim

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx = \int \frac{u - 1}{\sqrt{4 - u^2}}\,dy$$

■ A Figura 5 mostra o gráfico do integrando do Exemplo 7 e o de uma integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

FIGURA 5

Agora substituímos $u = 2\,\text{sen}\,\theta$, obtendo $du = 2\cos\theta\,d\theta$ e $\sqrt{4 - u^2} = 2\cos\theta$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx &= \int \frac{2\,\text{sen}\,\theta - 1}{2\cos\theta}\,2\cos\theta\,d\theta \\ &= \int (2\,\text{sen}\,\theta - 1)\,d\theta \\ &= -2\cos\theta - \theta + C \\ &= -\sqrt{4 - u^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C \end{aligned}$$ □

7.3 EXERCÍCIOS

1–3 Calcule a integral usando a substituição trigonométrica indicada. Esboce e coloque legendas no triângulo retângulo associado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}\,dx;\ x = 3\sec\theta$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9 - x^2}\,dx;\ x = 3\,\text{sen}\,\theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9 + x^2}}\,dx;\ x = 3\,\text{tg}\,\theta$

4–30 Calcule a integral.

4. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2 - 1}}\,dt$

6. $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{x^2 + 4}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25 - x^2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 2}}\,dt$

11. $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 4}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

15. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2 - 1}}$

17. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\,dx$

18. $\int \frac{dx}{[(ax)^2-b^2]^{3/2}}$

19. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$

20. $\int \frac{t}{\sqrt{25-t^2}}\,dt$

21. $\int_0^{0,6} \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}\,dx$

22. $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$

23. $\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$

24. $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-6t+13}}$

25. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

26. $\int \frac{x^2}{(3+4x-4x^2)^{3/2}}\,dx$

27. $\int \sqrt{x^2+2x}\,dx$

28. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$

29. $\int x\sqrt{1-x^4}\,dx$

30. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}}\,dt$

---

31. (a) Use substituição trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$

(b) Use a substituição hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$ para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

Essas fórmulas estão interligadas pela Fórmula 3.11.3.

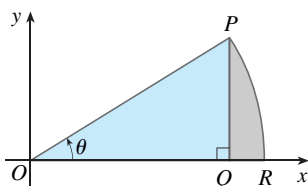
32. Calcule

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx$$

(a) por substituição trigonométrica.
(b) pela substituição hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$.

33. Encontre o valor médio de $f(x) = \sqrt{x^2-1}/x$, $1 \leqslant x \leqslant 7$.

34. Encontre a área da região delimitada pela hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ e a reta $x = 3$.

35. Demonstre a fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para a área de um setor circular com raio r e ângulo central θ. [*Sugestão*: Suponha $0 < \theta < \pi/2$ e coloque o centro do círculo na origem; assim ele terá a equação $x^2 + y^2 = r^2$. Então A é a soma da área do triângulo POQ e da área da região PQR na figura.]

36. Calcule a integral

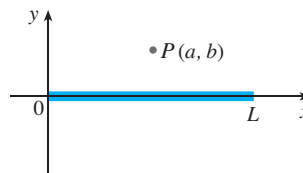
$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-2}}$$

Coloque em um gráfico o integrando e a integral indefinida e verifique se sua resposta é razoável.

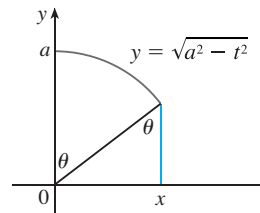
37. Use o gráfico para aproximar as raízes da equação $x^2\sqrt{4-x^2} = 2-x$. Então, aproxime a área limitada pela curva $y = x^2\sqrt{4-x^2}$ e a reta $y = 2-x$.

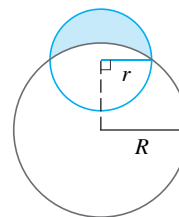
38. Uma barra carregada de comprimento L produz um campo elétrico no ponto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2+b^2)^{3/2}}\,dx$$

em que λ é a densidade de carga por unidade de comprimento da barra e ε_0, a permissividade do vácuo (veja a figura). Calcule a integral para determinar uma expressão para o campo elétrico $E(P)$.

39. (a) Use substituição trigonométrica para verificar que

$$\int_0^x \sqrt{a^2-t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{sen}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

(b) Use a figura para dar interpretações geométricas de ambos os termos no lado direito da equação na parte (a).

40. A parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide o disco $x^2 + y^2 \leqslant 8$ em duas partes. Encontre as áreas de ambas as partes.

41. Encontre a área da região em forma de *lua crescente* delimitada pelos arcos dos círculos de raios r e R. (Veja a figura.)

42. Um tanque reservatório de água tem o formato de um cilindro com diâmetro de 10 m. Ele está montado de forma que as secções transversais circulares são verticais. Se a profundidade da água é 7 m, qual porcentagem da capacidade total está sendo usada?

43. Um toro é gerado pela rotação do círculo $x^2 + (y-R)^2 = r^2$ ao redor do eixo x. Ache o volume delimitado pelo toro.

7.4 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

Nesta seção mostraremos como integrar qualquer função racional (um quociente de polinômios) expressando-a como uma soma de frações mais simples, chamadas *frações parciais*, que já sabemos como integrar. Para ilustrar o método, observe que, levando as frações $2/(x-1)$ e $1/(x+2)$ a um denominador comum, obtemos

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Se revertermos o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito dessa equação:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$
$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Para ver como esse método de frações parciais funciona em geral, consideramos a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. É possível expressar f como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de P seja menor que o grau de Q. Essa função racional é denominada *própria*. Lembre-se de que se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

no qual $a_n \neq 0$, então o grau de P é n, e escrevemos $\text{gr}(P) = n$.

Se f é imprópria, isto é, $\text{gr}(P) \geqslant \text{gr}(Q)$, então devemos fazer uma etapa preliminar dividindo P por Q (por divisão de polinômios) até o resto $R(x)$ ser obtido, com $\text{gr}(R) < \text{gr}(Q)$. O resultado da divisão é

$$\boxed{1} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde S e R são polinômios também.

Como o exemplo a seguir mostra, algumas vezes essa etapa preliminar é tudo de que precisamos.

EXEMPLO 1 Encontre $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

SOLUÇÃO Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, primeiro devemos fazer a divisão. Isso nos permite escrever

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C \qquad \square$$

A próxima etapa é fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. É possível demonstrar que qualquer polinômio Q pode ser fatorado como um produto de fatores linea-

res (da forma $ax + b$) e fatores quadráticos irredutíveis (da forma $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$). Por exemplo, se $Q(x) = x^4 - 16$, poderíamos fatorá-lo como

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

A terceira etapa é expressar a função racional própria $R(x)/Q(x)$ (da Equação 1) como uma soma de **frações parciais** da forma

$$\frac{A}{(ax + b)^i} \qquad \text{ou} \qquad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^j}$$

Um teorema na álgebra garante que é sempre possível fazer isso. Explicamos os detalhes para os quatro casos que ocorrem.

CASO I ■ O denominador $Q(x)$ é um produto de fatores lineares distintos.

Isso significa que podemos escrever

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

onde nenhum fator é repetido (e nenhum fator é múltiplo constante do outro). Nesse caso o teorema das frações parciais afirma que existem constantes $A_1, A_2, ..., A_k$ tal que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Essas constantes podem ser determinadas como no exemplo seguinte.

EXEMPLO 2 Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$.

SOLUÇÃO Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Fatoramos o denominador como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais do integrando (2) tem a forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

■ Outro método para achar A, B e C é dado na nota após este exemplo.

Para determinar os valores de A, B e C multiplicamos ambos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores, $x(2x - 1)(x + 2)$, obtendo

$$\boxed{4} \qquad x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Expandindo o lado direito da Equação 4 e escrevendo-a na forma-padrão para os polinômios, temos

$$\boxed{5} \qquad x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Os polinômios na Equação 5 são idênticos, então seus coeficientes devem ser iguais. O coeficiente de x^2 do lado direito, $2A + B + 2C$, deve ser igual ao coeficiente de x^2 do lado esquerdo, ou seja, 1. Do mesmo modo, os coeficientes de x são iguais e os termos constantes também. Isso resulta no seguinte sistema de equações para A, B e C:

$$
\begin{aligned}
2A + B + 2C &= 1 \\
3A + 2B - C &= 2 \\
-2A &= -1
\end{aligned}
$$

Resolvendo, obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$, e assim

■ Podemos conferir nosso resultado calculando o denominador comum dos termos e depois somando-os.

$$
\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\,\frac{1}{x+2} \right) dx
$$

$$
= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x-1| - \tfrac{1}{10}\ln|x+2| + K
$$

■ A Figura 1 mostra os gráficos do integrando e de sua integral indefinida (com $K = 0$), no Exemplo 2. Qual é qual?

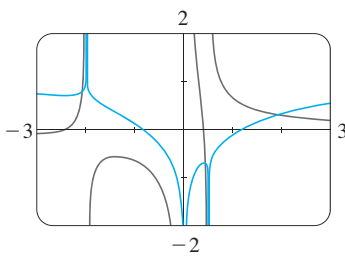



FIGURA 1

Ao integrar o termo do meio, fizemos mentalmente a substituição $u = 2x - 1$, que resulta em $du = 2\,dx$ e $dx = du/2$. □

OBS. Podemos usar um método alternativo para encontrar os coeficientes A, B e C no Exemplo 2. A Equação 4 é uma identidade; é verdadeira para cada valor de x. Vamos escolher valores de x que simplificam a equação. Se colocarmos $x = 0$ na Equação 4, o segundo e o terceiro membros do lado direito desaparecerão, e a equação será $-2A = -1$, ou $A = \frac{1}{2}$. Da mesma maneira, $x = \frac{1}{2}$ dá $5B/4 = \frac{1}{4}$ e $x = -2$ dá $10C = 1$, assim $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$. (Você pode argumentar que a Equação 3 não é válida para $x = 0$, $\frac{1}{2}$ ou -2, então, por que a Equação 4 deveria ser válida para aqueles valores? De fato, a Equação 4 é válida para todos os valores de x, até para $x = 0$, $\frac{1}{2}$ e -2. Veja o Exercício 69 para uma explicação.)

EXEMPLO 3 Encontre $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, onde $a \neq 0$.

SOLUÇÃO O método das frações parciais dá

$$
\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}
$$

e, portanto,

$$
A(x+a) + B(x-a) = 1
$$

Usando o método da observação anterior, colocamos $x = a$ nesta equação e obtemos $A(2a) = 1$, assim, $A = 1/(2a)$. Se pusermos $x = -a$, obteremos $B(-2a) = 1$ e, dessa forma, $B = -1/(2a)$. Então

$$
\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx
$$

$$
= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) + C
$$

Como $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, podemos escrever a integral como

$$
\boxed{6} \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C
$$

Veja os Exercícios 55-56 para maneiras de usar a Fórmula 6. □

CASO II ■ **$Q(x)$ é um produto de fatores lineares, e alguns dos fatores são repetidos.**

Suponha que o primeiro fator linear $(a_1x + b_1)$ seja repetido r vezes, isto é, $(a_1x + b_1)^r$ ocorre na fatoração de $Q(x)$. Então, em vez de um único termo $A_1/(a_1x + b_1)$ na Equação 2, usaríamos

$$\boxed{7} \qquad \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Para ilustrar, poderíamos escrever

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

mas é preferível detalhar um exemplo mais simples.

EXEMPLO 4 Encontre $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$.

SOLUÇÃO A primeira etapa é dividir. O resultado da divisão de polinômios é

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

A segunda etapa é fatorar o denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ é um fator e obtemos

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Como o fator linear $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

Multiplicando pelo mínimo denominador comum, $(x-1)^2(x+1)$, temos

$$\boxed{8} \qquad \begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \end{aligned}$$

■ Outro método para achar os coeficientes:
Faça $x = 1$ em (8): $B = 2$.
Faça $x = -1$: $C = -1$.
Faça $x = 0$: $A = B + C = 1$.

Agora igualamos os coeficientes:

$$\begin{aligned} A \qquad + \quad C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + \quad C &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos $A = 1$, $B = 2$ e $C = -1$, assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + K \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K$$ □

CASO III ■ $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete.

Se $Q(x)$ tem o fator $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, além das frações parciais nas Equações 2 e 7, a expressão para $R(x)/Q(x)$ terá um termo da forma

9
$$\frac{Ax + b}{ax^2 + bx + c}$$

em que A e B são as constantes a serem determinadas. Por exemplo, a função dada por $f(x) = x/[x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)]$ tem uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{x^2+4}$$

O termo dado em (9) pode ser integrado completando o quadrado e usando a fórmula

10
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

EXEMPLO 5 Calcule $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUÇÃO Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ não pode ser mais fatorado, escrevemos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, temos

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Então $A = 1$, $B = 1$ e $C = -1$ e, dessa forma,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right)dx$$

Para integrar o segundo termo, o dividimos em duas partes:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

Fazemos a substituição $u = x^2 + 4$ na primeira das integrais de modo que $du = 2x\,dx$. Calculamos a segunda integral usando a Fórmula 10 com $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}(x/2) + K \end{aligned}$$ □

EXEMPLO 6 Calcule $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx$.

SOLUÇÃO Como o grau do denominador *não é menor que* o do numerador, primeiro dividimos e obtemos

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Observe que o termo quadrático $4x^2 - 4x + 3$ é irredutível, porque seu discriminante é $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Isso significa que este não pode ser fatorado, então não precisamos usar a técnica da frações parciais.

Para integrar a função dada completamos o quadrado no denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$$

Isso sugere que façamos a substituição $u = 2x - 1$. Então, $du = 2\,dx$ e $x = \frac{1}{2}(u + 1)$, assim

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx = \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}\right)dx$$

$$= x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(u + 1) - 1}{u^2 + 2}\,du = x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u - 1}{u^2 + 2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2 + 2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2 + 2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C \quad \square$$

OBS. O Exemplo 6 ilustra o procedimento geral para se integrar uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{onde } b^2 - 4ac < 0$$

Completamos o quadrado no denominador e então fazemos a substituição que traz a integral para a forma

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2 + a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

Então, a primeira integral é um logaritmo, e a segunda é expressa em termos de tg^{-1}.

CASO IV ■ $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

Se $Q(x)$ tem um fator $(ax^2 + bx + c)^r$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, em vez de uma única fração parcial (9), a soma

11 $$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocorre na decomposição em frações parciais de $R(x)/Q(x)$. Cada um dos termos de (11) pode ser integrado primeiro completando o quadrado.

■ Seria extremamente tedioso o cálculo manual dos valores numéricos dos coeficientes no Exemplo 7. A maioria dos sistemas de computação algébrica, contudo, encontra os valores numéricos muito rapidamente. Por exemplo, o comando do Maple

convert(f, parfrac, x)

ou o comando do Mathematica

Apart[f]

dão os seguintes valores:

$A = -1,\quad B = \frac{1}{8},\quad C = D = -1,$
$E = \frac{15}{8},\quad F = -\frac{1}{8},\quad G = H = \frac{3}{4},$
$I = -\frac{1}{2},\quad J = \frac{1}{2},$

EXEMPLO 7 Escreva a forma da decomposição em frações parciais da função

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$

SOLUÇÃO

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)^3}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ix + J}{(x^2 + 1)^3}$$ □

EXEMPLO 8 Calcule $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\, dx$.

SOLUÇÃO A forma da decomposição em frações parciais é

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, temos

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x$$
$$= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex$$
$$= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$$

Se igualarmos os coeficientes, obteremos o sistema

$$A + B = 0 \qquad C = -1 \qquad 2A + B + D = 2 \qquad C + E = -1 \qquad A = 1$$

que tem a solução $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ e $E = 0$. Então

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{x\, dx}{(x^2 + 1)^2}$$

■ No 2º e 4º termos, fizemos mentalmente a substituição $u = x^2 + 1$.

$$= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \text{tg}^{-1}x - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + K$$ □

Observamos que algumas vezes as frações parciais podem ser evitadas na integração de funções racionais. Por exemplo, embora a integral

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\,dx$$

possa ser calculada pelo método do Caso III, é muito mais fácil observar que se $u = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$, então $du = (3x^2 + 3)\,dx$, e assim

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\,dx = \tfrac{1}{3} \ln |x^3 + 3x| + C$$

SUBSTITUIÇÕES RACIONALIZANTES

Algumas funções não racionais podem ser transformadas em funções racionais por meio de substituições apropriadas. Em particular, quando um integrando contém uma expressão da forma $\sqrt[n]{g(x)}$, então a substituição $u = \sqrt[n]{g(x)}$ pode ser eficaz. Outros exemplos aparecem nos exercícios.

EXEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}\,dx$.

SOLUÇÃO Seja $u = \sqrt{x + 4}$. Então $u^2 = x + 4$, de modo que $x = u^2 - 4$ e $dx = 2u\,du$. Portanto

$$\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2 - 4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2 - 4}\,du$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2 - 4}\right) du$$

Podemos calcular essa integral fatorando $u^2 - 4$ em $(u - 2)(u + 2)$ e usando as frações parciais ou a Fórmula 6 com $a = 2$:

$$\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2 - 4}$$

$$= 2u + 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{u - 2}{u + 2} \right| + C$$

$$= 2\sqrt{x + 4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sqrt{x + 4} + 2} \right| + C \qquad \square$$

7.4 EXERCÍCIOS

1–6 Escreva as formas de decomposição em frações parciais da função (como no Exemplo 7). Não determine os valores numéricos dos coeficientes.

1. (a) $\dfrac{2x}{(x + 3)(3x + 1)}$ (b) $\dfrac{1}{x^3 + 2x^2 + x}$

2. (a) $\dfrac{x - 1}{x^3 + x^2}$ (b) $\dfrac{x - 1}{x^3 + x}$

3. (a) $\dfrac{x - 2}{x^2 + 3x - 4}$ (b) $\dfrac{x^2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$

4. (a) $\dfrac{x^3}{x^2 + 4x + 3}$ (b) $\dfrac{2x + 1}{(x - 1)^3(x^2 + 4)^2}$

5. (a) $\dfrac{x^4}{x^4 - 1}$ (b) $\dfrac{t^4 + t^2 + 1}{(t^2 + 1)(t^2 + 4)^2}$

6. (a) $\dfrac{x^4}{(x^3+x)(x^2-x+3)}$ (b) $\dfrac{1}{x^6-x^3}$

7–38 Calcule a integral.

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}dx$

8. $\displaystyle\int \frac{y}{y+2}dy$

9. $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}dt$

11. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2}dx$

13. $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2-bx}dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx$

15. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}dx$

17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}dy$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2}dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4}dx$

22. $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}dx$

25. $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx$

30. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}dx$

33. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+4}dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}dx$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-x^2}dx$

36. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}dx$

38. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2}dx$

39–50 Faça uma substituição para expressar o integrando como uma função racional e então calcule a integral.

39. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$

41. $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}dx$

42. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x\sqrt[3]{x^2+1}}dx$

44. $\displaystyle\int_{1/3}^3 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}dx$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$ [*Sugestão:* Substitua $u=\sqrt[6]{x}$.]

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}dx$

47. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x}dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{\operatorname{tg}^2 t+3\operatorname{tg} t+2}dt$

50. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)}dx$

51–52 Use integração por partes, juntamente com as técnicas desta seção, para calcular a integral.

51. $\displaystyle\int \ln(x^2-x+2)dx$

52. $\displaystyle\int x\operatorname{tg}^{-1}x\,dx$

53. Use um gráfico de $f(x)=1/(x^2-2x-3)$ para decidir se $\int_0^2 f(x)\,dx$ é positiva ou negativa. Utilize o gráfico para dar uma estimativa aproximada do valor da integral e então use as frações parciais para encontrar o valor exato.

54. Trace a função $y=1/(x^3-2x^2)$ e sua primitiva na mesma tela.

55–56 Calcule a integral completando o quadrado e usando a Fórmula 6.

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}dx$

56. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}dx$

57. O matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) observou que a substituição $t=\operatorname{tg}(x/2)$ converte qualquer função racional de sen x e cos x em uma função racional ordinária de t.

(a) Se $t=\operatorname{tg}(x/2)$, $-\pi<x<\pi$, esboce um triângulo retângulo ou use as identidades trigonométricas para mostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b) Mostre que

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$$

(c) Mostre que

$$dx = \frac{2}{1 + t^2}\, dt$$

58–61 Use a substituição do Exercício 55 para transformar o integrando em uma função racional de t e então calcule a integral.

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 5 \operatorname{sen} x} dx$

59. $\displaystyle\int \frac{1}{3 \operatorname{sen} x - 4 \cos x} dx$

60. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x} dx$

61. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 + \cos x} dx$

62–63 Encontre a área da região sob a curva dada de 1 até 2.

62. $y = \dfrac{1}{x^3 + x}$

63. $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x - x^2}$

64. Encontre o volume do sólido resultante se a região sob a curva $y = 1/(x^2 + 3x = 2)$ de $x = 0$ a $x = 1$ for girada em torno do: (a) eixo x e (b) eixo y.

65. Um método de retardar o crescimento de uma população de insetos sem usar pesticidas é introduzir na população um número de machos estéreis que cruzam com fêmeas férteis, mas não produzem filhotes. Se P representa o número de fêmeas na população de insetos, S, o número de machos estéreis introduzidos a cada geração e r, a taxa de crescimento populacional natural, então a população de fêmeas está relacionada com o instante t por

$$t = \int \frac{P + S}{P[(r - 1)P - S]} dP$$

Suponha que uma população de insetos com 10 000 fêmeas cresça a uma taxa de $r = 0{,}10$ e que 900 machos estéreis sejam adicionados. Calcule a integral para dar uma equação relacionando a população de fêmeas com o tempo. (Observe que a equação resultante não pode ser resolvida explicitamente para P.)

66. Fatore $x^4 + 1$ como uma diferença de quadrados adicionando e subtraindo a mesma quantidade. Use essa fatoração para calcular $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$.

SCA **67.** (a) Use um sistema de computação algébrica para encontrar a decomposição em frações parciais da função

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

(b) Use a parte (a) para encontrar $\int f(x)\, dx$ (manualmente) e compare com o resultado usando um SCA para integrar f diretamente. Comente qualquer discrepância.

SCA **68.** (a) Encontre a decomposição em frações parciais da função

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

(b) Utilize a parte (a) para encontrar $\int f(x)\, dx$ e trace f e sua integral indefinida na mesma tela.

(c) Use o gráfico de f para descobrir as características principais do gráfico de $\int f(x)\, dx$.

69. Suponha que F, G e Q sejam polinômios e

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

para todo x, exceto quando $Q(x) = 0$. Demonstre que $F(x) = G(x)$ para todo x. (*Sugestão*: Use a continuidade.)

70. Se f é uma função quadrática tal que $f(0) = 1$ e

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x + 1)^3} dx$$

é uma função racional, encontre o valor de $f'(0)$.

7.5 ESTRATÉGIAS DE INTEGRAÇÃO

Como vimos, a integração é mais desafiadora que a derivação. Para achar a derivada de uma função é óbvio qual fórmula de derivação devemos aplicar. Porém, não é necessariamente óbvio qual técnica devemos aplicar para integrar uma dada função.

Até agora, técnicas individuais têm sido aplicadas em cada seção. Por exemplo, usamos geralmente a substituição nos Exercícios 5.5, a integração por partes nos Exercícios 7.1 e as frações parciais nos Exercícios 7.4. Nesta seção, contudo, apresentaremos uma coleção de integrais misturadas aleatoriamente, e o principal desafio será reconhecer quais técnicas ou fórmulas deverão ser usadas. Regras fáceis e rápidas para a aplicação de um dado método em uma determinada situação não podem ser dadas, todavia, damos alguns conselhos sobre estratégias que você pode achar útil.

Um prerrequisito para a escolha da estratégia é o conhecimento das fórmulas básicas de integração. Na tabela seguinte juntamos as integrais de nossas listas anteriores com várias fórmulas adicionais que aprendemos neste capítulo. A maioria delas deveria ser memorizada. É útil conhecê-las todas, mas aquelas marcadas com asterisco não precisam ser

memorizadas, porque podem ser facilmente deduzidas. A Fórmula 19 pode ser evitada pelo uso de frações parciais e as substituições trigonométricas podem ser utilizadas no lugar da Fórmula 20.

TABELA DE FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO As constantes de integração foram omitidas.

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$

2. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

3. $\int e^x\,dx = e^x$

4. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$

5. $\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x$

6. $\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x$

7. $\int \sec^2 x\,dx = \text{tg}\,x$

8. $\int \csc^2 x\,dx = -\text{cotg}\,x$

9. $\int \sec x\,\text{tg}\,x\,dx = \sec x$

10. $\int \text{cossec}\,x\,\text{cotg}\,x\,dx = -\text{cossec}\,x$

11. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \text{tg}\,x|$

12. $\int \text{cossec}\,x\,dx = \ln|\text{cossec}\,x - \text{cotg}\,x|$

13. $\int \text{tg}\,x\,dx = \ln|\sec x|$

14. $\int \text{cotg}\,x\,dx = \ln|\text{sen}\,x|$

15. $\int \text{senh}\,x\,dx = \text{cossech}\,x$

16. $\int \cosh x\,dx = \text{senh}\,x$

17. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\,\text{tg}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

***19.** $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$

***20.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

Uma vez armado destas fórmulas básicas de integração, se não enxergar imediatamente como atacar uma dada integral, você poderá tentar a seguinte estratégia de quatro etapas.

1. Se possível, simplifique o integrando Algumas vezes o uso de manipulação algébrica ou identidades trigonométricas simplifica o integrando e torna o método de integração óbvio. Aqui estão alguns exemplos:

$$\int \sqrt{x}\left(1 + \sqrt{x}\right)dx = \int \left(\sqrt{x} + x\right)dx$$

$$\int \frac{\text{tg}\,\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int \text{sen}\,2\theta\,d\theta$$

$$\int (\text{sen}\,x + \cos x)^2\,dx = \int (\text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\,x\cos x + \cos^2 x)dx$$

$$= \int (1 + 2\,\text{sen}\,x\cos x)dx$$

2. Procure por uma substituição óbvia Tente encontrar alguma função $u = g(x)$ no integrando cuja diferencial $du = g'(x)\,dx$ também ocorra, separado de um fator constante. Por exemplo, na integral

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$$

notamos que, se $u = x^2 - 1$, então $du = 2x\,dx$. Portanto, usamos a substituição $u = x^2 - 1$ em vez do método das frações parciais.

3. Classifique o integrando de acordo com sua forma Se as Etapas 1 e 2 não levaram a uma solução, então olhamos para a forma do integrando $f(x)$.

(a) *Funções trigonométricas*. Se $f(x)$ for um produto de potências de sen x e cos x, de tg x e sec x ou de cotg x e cossec x, então utilizaremos as substituições recomendadas na Seção 7.2.

(b) *Funções racionais*. Se f for uma função racional, usamos o procedimento da Seção 7.4 envolvendo as frações parciais.

(c) *Integração por partes*. Se $f(x)$ for um produto de uma potência de x (ou um polinômio) e uma função transcendental (como uma função trigonométrica, exponencial ou logarítmica), então tentamos a integração por partes, escolhendo u e dv de acordo com o conselho dado na Seção 7.1. Se você olhar as funções nos Exercícios 7.1, verá que a maioria é do tipo descrito.

(d) *Radicais*. Tipos particulares de substituição são recomendados quando certos radicais aparecem.

(i) Se $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ ocorre, utilizamos a substituição trigonométrica de acordo com a tabela da Seção 7.3.

(ii) Se $\sqrt[n]{ax + b}$ ocorre, usamos a substituição racionalizante $u = \sqrt[n]{ax + b}$. De modo mais geral, isto às vezes funciona para $\sqrt[n]{g(x)}$.

4. Tente novamente Se as três etapas anteriores não derem resultado, lembre-se de que existem basicamente apenas dois métodos de integração: substituição e por partes.

(a) *Tente a substituição*. Mesmo que nenhuma substituição seja óbvia (Etapa 2), alguma inspiração ou engenhosidade (ou até mesmo desespero) pode sugerir uma substituição apropriada.

(b) *Tente por partes*. Embora a integração por partes seja usada na maioria das vezes nos produtos da forma descrita na Etapa 3(c), algumas vezes é eficaz em funções mais simples. Olhando na Seção 7.1, vemos que ela funciona em $\text{tg}^{-1}x$, $\text{sen}^{-1}x$ e $\ln x$. Todas são funções inversas.

(c) *Manipule o integrando*. As manipulações algébricas (talvez racionalizando o denominador ou aplicando identidades trigonométricas) podem ser úteis na transformação da integral em uma forma mais fácil. Essas manipulações podem ser mais substanciais que na Etapa 1 e podem envolver alguma engenhosidade. Aqui está um exemplo:

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\,dx = \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1 + \cos x}{\text{sen}^2 x}\,dx = \int \left(\text{cossec}^2 x + \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\right) dx$$

(d) *Relacione o problema a problemas anteriores*. Quando tiver adquirido alguma experiência em integração, você poderá usar um método em uma dada integral similar ao método anteriormente usado em outra integral. Ou até será capaz de expressar a integral dada em termos de uma integral anterior. Por exemplo, a integral $\int \text{tg}^2 x \sec x\,dx$ é desafiadora, mas se utilizamos a identidade $\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$, poderemos escrever

$$\int \text{tg}^2 x \sec x \, dx = \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx$$

e se $\int \sec^3 x \, dx$ tiver sido previamente calculada (veja o Exemplo 8 na Seção 7.2), então os cálculos poderão ser usados no problema presente.

(e) *Use vários métodos*. Algumas vezes dois ou três métodos são necessários para calcular uma integral. O cálculo pode envolver várias substituições sucessivas de diferentes tipos ou até combinar a integração por partes com uma ou mais substituições.

Nos exemplos a seguir indicamos o método de ataque, mas não resolvemos totalmente as integrais.

EXEMPLO 1 $\displaystyle\int \frac{\text{tg}^3 x}{\cos^3 x} \, dx$

Na Etapa 1 reescrevemos a integral:

$$\int \frac{\text{tg}^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \text{tg}^3 x \sec^3 x \, dx$$

A integral é agora da forma $\int \text{tg}^m x \sec^n x \, dx$ com m ímpar; então, usamos o conselho dado na Seção 7.2.

Alternativamente, se na Etapa 1 tivéssemos escrito

$$\int \frac{\text{tg}^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x} \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^6 x} \, dx$$

então poderíamos ter continuado como segue, com a substituição $u = \cos x$:

$$\int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^6 x} \text{sen}\, x \, dx = \int \frac{1 - u^2}{u^6} (-du)$$

$$= \int \frac{u^2 - 1}{u^6} \, du = \int (u^{-4} - u^{-6}) du$$ □

EXEMPLO 2 $\int e^{\sqrt{x}} dx$

De acordo com a Etapa 3(d)(ii) substituímos $u = \sqrt{x}$. Então $x = u^2$, assim $dx = 2u \, du$ e

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int ue^u \, du$$

O integrando é agora um produto de u e da função transcendental e^u e, dessa forma, pode ser integrado por partes. □

EXEMPLO 3 $\displaystyle\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 - 10x} \, dx$

Nenhuma simplificação algébrica ou substituição é óbvia, por isso as Etapas 1 e 2 não se aplicam aqui. O integrando é uma função racional, então aplicamos o procedimento da Seção 7.4, lembrando que a primeira etapa é dividir. □

EXEMPLO 4 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Aqui a Etapa 2 é tudo o que é necessário. Substituímos $u = \ln x$ porque sua diferencial é $du = dx/x$, que ocorre na integral. □

EXEMPLO 5 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$

Embora a substituição racionalizante

$$u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

funcione aqui [(ii) Etapa 3(d)], isso leva a uma função racional muito complicada. Um método mais fácil é fazer alguma manipulação algébrica [como na Etapa 1 ou na Etapa 4(c)]. Multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{1-x}$, temos

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

□

PODEMOS INTEGRAR TODAS AS FUNÇÕES CONTÍNUAS?

A questão surge: nossa estratégia de integração nos permitirá encontrar a integral para toda função contínua? Por exemplo, podemos usar nossa estratégia para calcular $\int e^{x^2}\, dx$? A resposta é não, ao menos não em termos das funções que nos são familiares.

As funções com as quais temos lidado neste livro são chamadas **funções elementares**. Essas são as funções polinomiais, as racionais, as potências (x^a), as exponenciais (a^x), as logarítmicas, as trigonométricas e suas inversas, as hiperbólicas e suas inversas e todas aquelas que podem ser obtidas pelas operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e composição. Por exemplo, a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+2x-1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\operatorname{sen} 2x}$$

é uma função elementar.

Se f é uma função elementar, então f' é uma função elementar, mas $\int f(x)\, dx$ não é necessariamente uma função elementar. Considere $f(x) = e^{x^2}$. Como f é contínua, sua integral existe e definimos a função F por

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

e então sabemos pela Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Então, $f(x) = e^{x^2}$ tem uma primitiva, mas pode-se demonstrar que F não é uma função elementar. Isso significa que não importa o quanto tentamos, nunca teremos sucesso em calcular $\int e^{x^2} dx$ em termos das funções que conhecemos. (No Capítulo 11, no Volume II, contudo, veremos como expressar $\int e^{x^2}\, dx$ como uma série infinita.) O mesmo pode ser dito das integrais a seguir:

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\, dx \qquad \int \cos(e^x)\, dx$$

$$\int \sqrt{x^3 + 1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

De fato, a maioria das funções elementares não tem primitivas elementares. Você pode ter a certeza, entretanto, de que todas as integrais nos exercícios a seguir são funções elementares.

7.5 EXERCÍCIOS

1–80 Calcule a integral.

1. $\int \cos x\,(1 + \operatorname{sen}^2 x)\,dx$
2. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$
3. $\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$
4. $\int \operatorname{tg}^3\theta\,d\theta$
5. $\int_0^2 \frac{2t}{(t-3)^2}\,dt$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{3 - x^4}}\,dx$
7. $\int_{-1}^1 \frac{e^{\operatorname{arctg} y}}{1 + y^2}\,dy$
8. $\int x \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx$
9. $\int_1^3 r^4 \ln r\,dr$
10. $\int_0^4 \frac{x-1}{x^2 - 4x - 5}\,dx$
11. $\int \frac{x-1}{x^2 - 4x + 5}\,dx$
12. $\int \frac{x}{x^4 + x^2 + 1}\,dx$
13. $\int \operatorname{sen}^3\theta \cos^5\theta\,d\theta$
14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$
15. $\int \frac{dx}{(1 - x^2)^{3/2}}$
16. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$
17. $\int x \operatorname{sen}^2 x\,dx$
18. $\int \frac{e^{2t}}{1 + e^{4t}}\,dt$
19. $\int e^{x + e^x}\,dx$
20. $\int \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$
21. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\,dx$
22. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + (\ln x)^2}}\,dx$
23. $\int_0^1 \left(1 + \sqrt{x}\right)^8\,dx$
24. $\int \ln(x^2 - 1)\,dx$
25. $\int \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 2x - 8}\,dx$
26. $\int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x - 8}\,dx$
27. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$
28. $\int \operatorname{sen} \sqrt{at}\,dt$
29. $\int_0^5 \frac{3w - 1}{w + 2}\,dw$
30. $\int_{-2}^2 |x^2 - 4x|\,dx$
31. $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\,dx$
32. $\int \frac{\sqrt{2x - 1}}{2x + 3}\,dx$
33. $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx$
34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + 4 \operatorname{cotg} x}{4 - \operatorname{cotg} x}\,dx$
35. $\int_{-1}^1 x^8 \operatorname{sen} x\,dx$
36. $\int \operatorname{sen} 4x \cos 3x\,dx$
37. $\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$
38. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5\theta \sec^3\theta\,d\theta$
39. $\int \frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta - \sec\theta}\,d\theta$
40. $\int \frac{1}{\sqrt{4y^2 - 4y - 3}}\,dy$
41. $\int \theta \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$
42. $\int \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x^2}\,dx$
43. $\int e^x \sqrt{1 + e^x}\,dx$
44. $\int \sqrt{1 + e^x}\,dx$
45. $\int x^5 e^{-x^3}\,dx$
46. $\int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\,dx$
47. $\int x^3 (x - 1)^{-4}\,dx$
48. $\int \frac{x}{x^4 - a^4}\,dx$
49. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x + 1}}\,dx$
50. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x + 1}}\,dx$
51. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2 + 1}}\,dx$
52. $\int \frac{dx}{x(x^4 + 1)}$
53. $\int x^2 \operatorname{senh} mx\,dx$
54. $\int (x + \operatorname{sen} x)^2\,dx$
55. $\int \frac{dx}{x + x\sqrt{x}}$
56. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}$
57. $\int x \sqrt[3]{x + c}\,dx$
58. $\int \frac{x \ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$
59. $\int \cos x \cos^3 x(\operatorname{sen} x)\,dx$
60. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 1}}\,dx$
61. $\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\,dx$
62. $\int \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{\text{sen } 2x}{1 + \cos^4 x}\,dx$

64. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\text{tg } x)}{\text{sen } x \cos x}\,dx$

65. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\,dx$

66. $\displaystyle\int_2^3 \frac{u^3 + 1}{u^3 - u^2}\,du$

67. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2}\,dx$

68. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + 2e^x - e^{-x}}\,dx$

69. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\,dx$

70. $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

71. $\displaystyle\int \frac{x + \text{arcsen } x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

72. $\displaystyle\int \frac{4^x + 10^x}{2^x}\,dx$

73. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)}\,dx$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^4}$

75. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{1 + e^x}}\,dx$

76. $\displaystyle\int (x^2 - bx)\,\text{sen } 2x\,dx$

77. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x^3}\,dx$

78. $\displaystyle\int \frac{\sec x \cos 2x}{\text{sen } x + \sec x}\,dx$

79. $\displaystyle\int x\,\text{sen}^2 x \cos x\,dx$

80. $\displaystyle\int \frac{\text{sen } x \cos x}{\text{sen}^4 x + \cos^4 x}\,dx$

81. As funções $y = e^{x^2}$ e $y = x^2 e^{x^2}$ não têm primitivas expressas por meio de funções elementares, mas $y = (2x^2 + 1)\,e^{x^2}$ tem. Calcule $\int (2x^2 + 1)\,e^{x^2}\,dx$.

7.6 INTEGRAÇÃO USANDO TABELAS E SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA

Nesta seção descrevemos como usar as tabelas e os sistemas de computação algébrica para integrar as funções que têm primitivas elementares. Você deve ter em mente, contudo, que até mesmo os mais poderosos sistemas não podem achar fórmulas explícitas para as primitivas de funções do tipo e^{x^2} ou outras funções descritas no final da Seção 7.5.

TABELAS DE INTEGRAIS

As tabelas de integrais indefinidas são muito úteis quando nos deparamos com uma integral que é difícil de calcular manualmente e não temos acesso a um sistema computação algébrica. Uma tabela relativamente curta de 120 integrais é dada no fim do livro. Tabelas mais extensas podem ser encontradas no *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 31. ed., por Daniel Zwillinger, Boca Raton, FL: CRC Press, 1995 (709 entradas) ou no *Table of Integrals, Series and Products,* por Gradshteyn e Ryzhik's (Nova York, Academic Press, 2000), que contêm centenas de páginas de integrais. Devemos nos lembrar, contudo, que as integrais frequentemente não ocorrem da maneira exata como foram listadas nas tabelas. Geralmente temos de usar substituições ou manipulações algébricas para transformar a integral dada em uma das formas da tabela.

■ A Tabela de Integrais aparece nas Páginas de Referência, no final do livro.

EXEMPLO 1 A região delimitada pelas curvas $y = \text{arctg } x$, $y = 0$ e $x = 1$ é girada em torno do eixo y. Encontre o volume do sólido resultante.

SOLUÇÃO Usando o método das cascas cilíndricas, vemos que o volume é

$$V = \int_0^1 2\pi x \,\text{arctg } x\,dx$$

Na seção da Tabela de Integrais com o título *Formas Trigonométricas Inversas* localizamos a Fórmula 92:

$$\int u\,\text{tg}^{-1} u\,du = \frac{u^2 + 1}{2}\,\text{tg}^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

Então, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^1 x \operatorname{tg}^{-1} x \, dx = 2\pi \left[\frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{tg}^{-1} x - \frac{x}{2} \right]_0^1$$

$$= \pi\left[(x^2 + 1)\operatorname{tg}^{-1} x - x\right]_0^1 = \pi(2 \operatorname{tg}^{-1} 1 - 1)$$

$$= \pi\left[2(\pi/4) - 1\right] = \tfrac{1}{2}\pi^2 - \pi$$

□

EXEMPLO 2 Use a Tabela de Integrais para achar $\int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} \, dx$.

SOLUÇÃO Se olharmos na seção da tabela intitulada *Formas envolvendo* $\sqrt{a^2 - u^2}$, veremos que a entrada mais próxima é a de número 34:

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} \, du = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Isso não é exatamente o que temos, mas poderemos usá-la se fizermos primeiro a substituição $u = 2x$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} \, dx = \int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{5 - u^2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{8} \int \frac{u^2}{\sqrt{5 - u^2}} \, du$$

Nesse caso, usamos a Fórmula 34 com $a^2 = 5$ (assim $a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5 - 4x^2}} \, dx = \frac{1}{8} \int \frac{u^2}{\sqrt{5 - u^2}} \, du = \frac{1}{8}\left(-\frac{u}{2}\sqrt{5 - u^2} + \frac{5}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= -\frac{x}{8}\sqrt{5 - 4x^2} + \frac{5}{16} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

□

EXEMPLO 3 Utilize a Tabela de Integrais para achar $\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUÇÃO Se olharmos na seção intitulada *Formas Trigonométricas*, veremos que nenhuma das entradas explicitamente inclui um fator u^3. Contudo, podemos usar a fórmula de redução na entrada 84 com $n = 3$:

$$\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x \, dx$$

85. $\int u^n \cos u \, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du$

Precisamos agora calcular $\int x^2 \cos x \, dx$. Podemos usar a fórmula de redução na entrada 85 com $n = 2$, seguida pela entrada 82:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x - 2(\operatorname{sen} x - x \cos x) + K$$

Combinando esses cálculos, temos

$$\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C$$

onde $C = 3K$.

□

EXEMPLO 4 Use a Tabela de Integrais para encontrar $\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx$.

SOLUÇÃO Como a tabela fornece formas envolvendo $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ e $\sqrt{x^2-a^2}$, mas não $\sqrt{ax^2+bx+c}$, primeiro completamos o quadrado:

$$x^2+2x+4=(x+1)^2+3$$

Se fizermos a substituição $u=x+1$ (assim $x=u-1$), o integrando envolverá o padrão $\sqrt{a^2+u^2}$:

$$\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx=\int(u-1)\sqrt{u^2+3}\,du$$

$$=\int u\sqrt{u^2+3}\,du-\int\sqrt{u^2+3}\,du$$

A primeira integral é calculada utilizando-se a substituição $t=u^2+3$:

$$\int u\sqrt{u^2+3}\,du=\tfrac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}t^{3/2}=\tfrac{1}{3}(u^2+3)^{3/2}$$

$$21.\ \int\sqrt{a^2+u^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

Para a segunda integral usamos a Fórmula 21 com $a=\sqrt{3}$:

$$\int\sqrt{u^2+3}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+3}+\tfrac{3}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+3}\right)$$

Então,

$$\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx$$

$$=\tfrac{1}{3}(x^2+2x+4)^{3/2}-\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+4}-\tfrac{3}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right)+C \quad \square$$

SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA

Vimos que o uso de tabelas envolve combinar a forma de um dado integrando com as formas dos integrandos das tabelas. Os computadores são particularmente bons para reconhecer padrões. E, do mesmo jeito que usamos as substituições com as tabelas, um SCA pode fazer substituições que transformam uma integral dada em uma daquelas que ocorrem em suas fórmulas armazenadas. Então, não é surpresa que um sistema de computação algébrica seja muito bom para fazer integração. Isso não significa que a integração manual seja uma habilidade obsoleta. Veremos que os cálculos manuais algumas vezes produzem uma integral indefinida em uma forma que é mais conveniente que a resposta do computador.

Para começar, vamos ver o que acontece quando pedimos que uma máquina integre a função relativamente simples $y=1/(3x-2)$. Usando a substituição $u=3x-2$, um cálculo manual fácil nos fornece

$$\int\frac{1}{3x-2}\,dx=\tfrac{1}{3}\ln|3x-2|+C$$

enquanto Derive, Mathematica e Maple retornam a resposta

$$\tfrac{1}{3}\ln(3x-2)$$

A primeira coisa a observar é que o sistema de computação algébrica omite a constante de integração. Em outras palavras, eles produzem uma primitiva *particular*, não a mais geral. Portanto, quando usarmos uma integração feita por máquina, teremos de adicionar uma constante. Segundo, os símbolos do valor absoluto são omitidos na resposta da máquina. Isso é aceitável se o nosso problema envolver apenas os valores de x maiores que $\frac{2}{3}$. Mas se estivermos interessados em outros valores de x, então teremos de inserir o símbolo do valor absoluto.

No próximo exemplo reconsideramos a integral do Exemplo 4, mas, dessa vez, perguntamos a resposta a uma máquina.

EXEMPLO 5 Use um sistema de computação algébrica para encontrar $\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx$.

SOLUÇÃO O Maple responde com

$$\tfrac{1}{3}(x^2+2x+4)^{3/2}-\tfrac{1}{4}(2x+2)\sqrt{x^2+2x+4}-\frac{3}{2}\,\text{arcsenh}\,\frac{\sqrt{3}}{3}(1+x)$$

Isso parece diferente da resposta que encontramos no Exemplo 4, mas é equivalente, porque o terceiro termo pode ser reescrito utilizando-se a identidade

$$\text{arcsenh}\,x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

■ Isto é a Equação 3.11.3.

Assim,

$$\text{arcsenh}\,\frac{\sqrt{3}}{3}(1+x)=\ln\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(1+x)+\sqrt{\tfrac{1}{3}(1+x)^2+1}\right]$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1+x+\sqrt{(1+x)^2+3}\right]$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{3}}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right)$$

O termo extra resultante $-\frac{3}{2}\ln\left(1/\sqrt{3}\right)$ pode ser absorvido na constante de integração.

O Mathematica dá a resposta

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{3}\right)\sqrt{x^2+2x+4}-\frac{3}{2}\,\text{arcsenh}\left(\frac{1+x}{\sqrt{3}}\right)$$

O Mathematica combinou os dois primeiros termos do Exemplo 4 (e do resultado do Maple) em um único termo por fatoração.

O Derive dá a resposta

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{x^2+2x+4}\,(2x^2+x+5)-\tfrac{3}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x+1\right)$$

O primeiro termo é igual ao primeiro termo da resposta do Mathematica e o segundo termo é idêntico ao último termo no Exemplo 4. □

EXEMPLO 6 Use um SCA para calcular $\int x(x^2+5)^8\,dx$.

SOLUÇÃO O Maple e o Mathematica dão a mesma resposta:

$$\tfrac{1}{18}x^{18}+\tfrac{5}{2}x^{16}+50x^{14}+\tfrac{1\,750}{3}x^{12}+4\,375x^{10}+21\,875x^8+\tfrac{218\,750}{3}x^6+156\,250x^4+\tfrac{390\,625}{2}x^2$$

Está claro que ambos os sistemas devem ter expandido $(x^2+5)^8$ pelo Teorema Binomial e então integrado cada termo.

Se em vez disso integrarmos manualmente, usando a substituição $u=x^2+5$, obteremos

$$\int x(x^2+5)^8\,dx=\tfrac{1}{18}(x^2+5)^9+C$$

■ O Derive e o TI–89/92 também dão essa resposta.

Para a maioria dos propósitos, essa é uma forma mais conveniente de resposta. □

EXEMPLO 7 Use um SCA para encontrar $\int \text{sen}^5x\cos^2x\,dx$.

SOLUÇÃO No Exemplo 2 na Seção 7.2, encontramos que

$$\boxed{1}\qquad \int \text{sen}^5x\cos^2x\,dx=-\tfrac{1}{3}\cos^3x+\tfrac{2}{5}\cos^5x-\tfrac{1}{7}\cos^7x+C$$

O Derive e o Maple dão a resposta

$$-\tfrac{1}{7}\,\text{sen}^4x\cos^3x - \tfrac{4}{35}\,\text{sen}^2x\cos^3x - \tfrac{8}{105}\cos^3x$$

ao passo que o Mathematica responde

$$-\tfrac{5}{64}\cos x - \tfrac{1}{192}\cos 3x + \tfrac{3}{320}\cos 5x - \tfrac{1}{448}\cos 7x$$

Suspeitamos que existem identidades trigonométricas que mostram que essas três respostas são equivalentes. De fato, se pedirmos para o Derive, o Maple e o Mathematica simplificarem suas expressões usando as identidades trigonométricas, eles finalmente produzirão a mesma forma da resposta que na Equação 1. □

7.6 EXERCÍCIOS

1–4 Use a entrada indicada da Tabela de Integrais no fim do livro para calcular a integral.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{7-2x^2}}{x^2}\,dx$; entrada 33

2. $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{3-2x}}\,dx$; entrada 55

3. $\displaystyle\int \sec^3(\pi x)\,dx$; entrada 71

4. $\displaystyle\int e^{2\theta}\,\text{sen}\,3\theta\,d\theta$; entrada 98

5–30 Utilize a Tabela de Integrais no fim do livro para calcular a integral.

5. $\displaystyle\int_0^1 2x\cos^{-1}x\,dx$

6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-7}}\,dx$

7. $\displaystyle\int \text{tg}^3(\pi x)\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

9. $\displaystyle\int x\,\text{sen}^{-1}(x^2)\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2y^2-3}}{y^2}\,dx$

11. $\displaystyle\int_{-1}^0 t^2e^{-t}\,dt$

12. $\displaystyle\int x^2\,\text{cossech}(x^3+1)\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\text{tg}^3(1/z)}{z^2}\,dz$

14. $\displaystyle\int \text{sen}^{-1}\sqrt{x}\,dx$

15. $\displaystyle\int e^{2x}\,\text{arctg}(e^x)\,dx$

16. $\displaystyle\int x\,\text{sen}(x^2)\cos(3x^2)\,dx$

17. $\displaystyle\int y\sqrt{6+4y-4y^2}\,dy$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^3-3x^2}$

19. $\displaystyle\int \text{sen}^2x\cos x\ln(\text{sen}\,x)\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,2\theta}{\sqrt{5-\text{sen}\,\theta}}\,d\theta$

21. $\displaystyle\int \frac{e^x}{3-e^{2x}}\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{4x^2-x^4}\,dx$

23. $\displaystyle\int \sec^5x\,dx$

24. $\displaystyle\int \text{sen}^6 2x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+(\ln x)^2}}{x}\,dx$

26. $\displaystyle\int_0^1 x^4e^{-x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \sqrt{e^{2x}-1}\,dx$

28. $\displaystyle\int e^t\,\text{sen}(\alpha t-3)\,dt$

29. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$

30. $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta\,\text{tg}^2\theta}{\sqrt{9-\text{tg}^2\theta}}\,d\theta$

31. Encontre o volume do sólido obtido quando a região sob a curva $y = x\sqrt{4-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ é girada em torno do eixo y.

32. A região sob a curva $y = \text{tg}^2x$ de 0 a $\pi/4$ é girada em torno do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

33. Verifique a Fórmula 53 na Tabela de Integrais (a) por derivação e (b) pela substituição $t = a + bu$.

34. Verifique a Fórmula 31 (a) por derivação e (b) pela substituição $u = a\,\text{sen}\,\theta$.

SCA **35–42** Use um sistema de computação algébrica para calcular a integral. Compare a resposta com o resultado usando as tabelas. Se as respostas forem diferentes, mostre que elas são equivalentes.

35. $\displaystyle\int \sec^4x\,dx$

36. $\displaystyle\int x^2(1+x^3)^4\,dx$

37. $\displaystyle\int \text{sen}^3x\cos^2x\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x(3e^x+2)}$

39. $\displaystyle\int x\sqrt{1+2x}\,dx$

40. $\displaystyle\int \text{sen}^4x\,dx$

41. $\displaystyle\int \text{tg}^5x\,dx$

42. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\,dx$

SCA **43.** (a) Use a tabela de integrais para calcular $F(x) = \int f(x)\,dx$, em que

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Qual é o domínio de f e F?

(b) Use um SCA para calcular $F(x)$. Qual o domínio da função F produzida pelo SCA? Existe uma discrepância entre este domínio e o domínio da função F que você encontrou na parte (a)?

SCA **44.** Tente calcular

$$\int (1 + \ln x)\sqrt{1 + (x \ln x)^2}\, dx$$

com um sistema de computação algébrica. Se ele não retornar uma resposta, faça uma substituição que mude a integral para uma daquelas que o SCA *pode* calcular.

SCA **45–48** Use um SCA para encontrar uma primitiva F de f tal que $F(0) = 0$. Desenhe f e F e localize aproximadamente as coordenadas x dos pontos extremos e de inflexão de F.

45. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}$

46. $f(x) = xe^{-x} \operatorname{sen} x, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5$

47. $f(x) = \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

48. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^6 + 1}$

PROJETO DE DESCOBERTA

SCA PADRÕES EM INTEGRAIS

Neste projeto, um sistema de computação algébrica é usado para investigar as integrais indefinidas de famílias de funções. Observando os padrões que ocorrem nas integrais de vários membros da família, primeiro você vai sugerir e, então, demonstrar uma fórmula geral para qualquer membro da família.

1. (a) Use um sistema de computação algébrica para calcular as seguintes integrais.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}\, dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+5)}\, dx$

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x-5)}\, dx$ (iv) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)^2}\, dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor da integral

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\, dx$$

se $a \neq b$. O que acontece se $a = b$?

(c) Verifique sua conjectura pedindo para seu SCA calcular a integral na parte (b). Então demonstre-a usando frações parciais.

2. (a) Utilize um sistema de computação algébrica para calcular as seguintes integrais.

(i) $\int \operatorname{sen} x \cos 2x\, dx$ (ii) $\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x\, dx$ (iii) $\int \operatorname{sen} 8x \cos 3x\, dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor da integral

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx$$

(c) Verifique sua conjectura com um SCA. Então demonstre-a usando as técnicas da Seção 7.2. Para quais valores de a e b isso é válido?

3. (a) Use um sistema de computação algébrica para calcular as seguintes integrais.

(i) $\int \ln x\, dx$ (ii) $\int x \ln x\, dx$ (iii) $\int x^2 \ln x\, dx$

(iv) $\int x^3 \ln x\, dx$ (v) $\int x^7 \ln x\, dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor de

$$\int x^n \ln x\, dx$$

(c) Utilize integração por partes para demonstrar a conjectura que você fez na parte (b). Para quais valores de n isso é válido?

4. (a) Use um sistema de computação algébrica para calcular as seguintes integrais.

(i) $\int xe^x\,dx$ (ii) $\int x^2e^x\,dx$ (iii) $\int x^3e^x\,dx$

(iv) $\int x^4e^x\,dx$ (v) $\int x^5e^x\,dx$

(b) Baseado no padrão de suas respostas na parte (a), sugira o valor de $\int x^6e^x\,dx$. Então, use seu SCA para verificar sua sugestão.

(c) Baseado nos padrões das partes (a) e (b), faça uma conjectura sobre o valor da integral

$$\int x^n e^x\,dx$$

quando n é um inteiro positivo.

(d) Use a indução matemática para demonstrar a conjectura que você fez na parte (c).

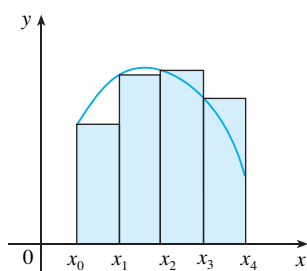
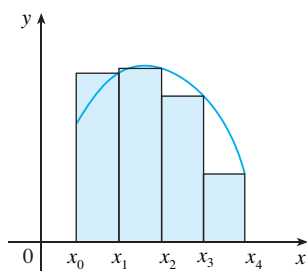
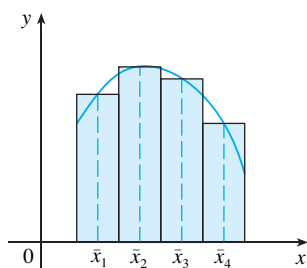
7.7 INTEGRAÇÃO APROXIMADA

(a) Aproximação pela extremidade esquerda

(b) Aproximação pela extremidade direita

(c) Aproximação pelo ponto médio

FIGURA 1

Existem duas situações nas quais é impossível encontrar o valor exato de uma integral definida.

A primeira situação surge do fato de que, para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo, precisamos conhecer uma primitiva de f. Algumas vezes, contudo, é difícil, ou até impossível, encontrar uma primitiva (veja a Seção 7.5). Por exemplo, é impossível calcular as seguintes integrais exatamente:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

A segunda situação surge quando a função é determinada por um experimento científico, por meio de leituras de instrumentos ou dados coletados. Pode não haver uma fórmula para a função (veja o Exemplo 5).

Em ambos os casos precisamos encontrar valores aproximados para as integrais definidas. Já conhecemos um método desse tipo. Lembre-se de que a integral definida é definida como o limite das somas de Riemann; assim, qualquer soma de Riemann pode ser usada como uma aproximação para a integral: se dividirmos $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$, então temos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\,\Delta x$$

onde x_i^* é um ponto qualquer no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Se x_i^* for escolhido como a extremidade esquerda do intervalo, então $x_i^* = x_{i-1}$ e temos

1 $$\int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\,\Delta x$$

Se $f(x) \geqslant 0$, então a integral representa uma área e (1), uma aproximação dessa área pelos retângulos mostrados na Figura 1(a). Se escolhermos x_i^* como a extremidade direita, então $x_i^* = x_i$ e temos

2 $$\int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta x$$

[Veja a Figura 1(b).] As aproximações L_n e R_n definidas pelas Equações 1 e 2 são chamadas **aproximação pela extremidade esquerda** e **aproximação pela extremidade direita**, respectivamente.

Na Seção 5.2 também consideramos o caso em que x_i^* é escolhido como o ponto médio $\bar{x}_i$ do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A Figura 1(c) mostra a aproximação pelo ponto médio M_n, que parece ser melhor que L_n ou R_n.

REGRA DO PONTO MÉDIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

e $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = $ ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$

Outra aproximação, denominada Regra do Trapézio, resulta da média das aproximações nas Equações 1 e 2:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^n \big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\Big[\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \big(f(x_1) + f(x_2)\big) + \cdots + \big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)\Big]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

REGRA DO TRAPÉZIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = (b-a)/n$ e $x_i = a + i\,\Delta x$.

FIGURA 2
Aproximação por trapézios

A razão para o nome Regra do Trapézio pode ser vista na Figura 2, que ilustra o caso $f(x) \geqslant 0$. A área do trapézio que está acima do i-ésimo subintervalo é

$$\Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

e se adicionarmos as áreas de todos os trapézios teremos o lado direito da Regra do Trapézio.

EXEMPLO 1 Use (a) a Regra do Trapézio e (b) a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ para aproximar a integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUÇÃO

(a) Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2-1)/5 = 0{,}2$, e então a Regra do Trapézio dá

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0{,}2}{2}[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)]$$

$$= 0{,}1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0{,}695635$$

Essa aproximação é ilustrada na Figura 3.

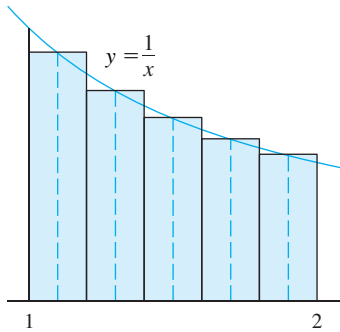
FIGURA 3

(b) Os pontos médios dos cinco subintervalos são 1,1; 1,3; 1,5; 1,7; e 1,9; assim, a Regra do Ponto Médio dá

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1,1) + f(1,3) + f(1,5) + f(1,7) + f(1,9)]$$

FIGURA 4

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,9}\right)$$

$$\approx 0,691908$$

Essa aproximação é ilustrada na Figura 4. □

No Exemplo 1 escolhemos deliberadamente uma integral cujo valor pode ser calculado explicitamente de maneira que possamos ver quão precisas são as Regras do Trapézio e do Ponto Médio. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0,693147...$$

$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aproximação} + \text{erro}$

O **erro** no uso de uma aproximação é definido como a quantidade que precisa ser adicionada à aproximação para torná-la exata. Pelos valores do Exemplo 1 vemos que os erros nas aproximações pelas Regras do Trapézio e do Ponto Médio para $n = 5$ são

$$E_T \approx -0,002488 \qquad \text{e} \qquad E_M \approx 0,001239$$

Em geral, temos

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad \text{e} \qquad E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n$$

As tabelas a seguir mostram os resultados de cálculos similares àqueles no Exemplo 1, mas para $n = 5$, 10 e 20 e para as aproximações pelas extremidades esquerda e direita, assim como as Regras do Trapézio e do Ponto Médio.

Aproximação para $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0,745635	0,645635	0,695635	0,691908
10	0,718771	0,668771	0,693771	0,692835
20	0,705803	0,680803	0,693303	0,693069

Erros correspondentes

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	−0,052488	0,047512	−0,002488	0,001239
10	−0,025624	0,024376	−0,000624	0,000312
20	−0,012656	0,012344	−0,000156	0,000078

Podemos fazer várias observações a partir dessas tabelas:

■ Essas observações são verdadeiras na maioria dos casos.

1. Em todos os métodos obtemos aproximações mais precisas quando aumentamos o valor de n. (Mas valores muito grandes de n resultam em tantas operações aritméticas, que temos de tomar cuidado com os erros de arredondamento acumulados.)
2. Os erros nas aproximações pelas extremidades esquerda e direita têm sinais opostos e parecem diminuir por um fator de cerca de 2 quando dobramos o valor de n.
3. As Regras do Trapézio e do Ponto Médio são muito mais precisas que as aproximações pelas extremidades.
4. Os erros nas Regras do Trapézio e do Ponto Médio têm sinais opostos e parecem diminuir por um fator de cerca de 4 quando dobramos o valor de n.

5. O tamanho do erro na Regra do Ponto Médio é cerca de metade do tamanho do erro na Regra do Trapézio.

A Figura 5 mostra por que geralmente podemos esperar maior precisão na Regra do Ponto Médio do que na Regra do Trapézio. A área de um retângulo típico na Regra do Ponto Médio é a mesma que a do trapézio *ABCD* cujo lado superior é a tangente ao gráfico de *P*. A área desse trapézio é mais próxima à área sob o gráfico que a área do trapézio *AQRD* usado na Regra do Trapézio. (O erro do ponto médio, área sombreada em cinza, é menor que o erro do trapézio, área sombreada em azul.)

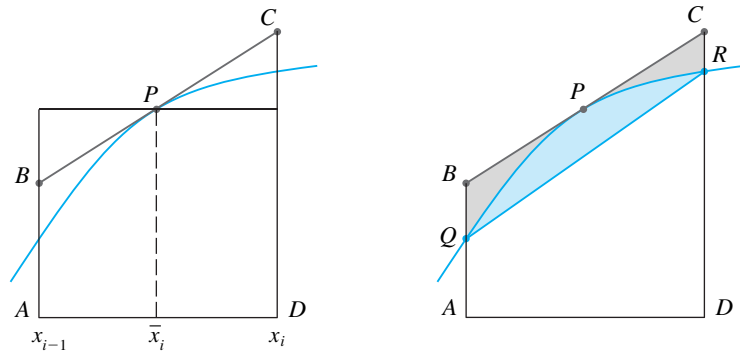



FIGURA 5

Essas observações são corroboradas nas seguintes estimativas de erros, que são demonstradas em livros de análise numérica. Perceba que a Observação 4 corresponde a n^2 em cada denominador, porque $(2n)^2 = 4n^2$. O fato de que as estimativas dependem do tamanho da segunda derivada não surpreende se você olhar a Figura 5, pois $f''(x)$ mede quanto o gráfico está curvado. [Lembre-se de que $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $y = f(x)$ muda.]

3 **LIMITANTES DE ERRO** Suponha $|f''(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se E_T e E_M são os erros nas Regras do Trapézio e do Ponto Médio, então

$$|E_T| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad \text{e} \qquad |E_M| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Vamos aplicar essa estimativa de erro na aproximação pela Regra do Trapézio no Exemplo 1. Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$. Como $1 \leqslant x \leqslant 2$, temos $1/x \leqslant 1$, assim

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

Portanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ e $n = 5$ na estimativa de erro (3), vemos que

$$|E_T| \leqslant \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0{,}006667$$

■ K pode ser qualquer número maior que todos os valores de $|f(x)|$, mas valores menores para K dão melhores limitantes para o erro.

Comparando essa estimativa de erro de 0,006667 com o erro real de 0,002488, vemos que pode acontecer de o erro real ser substancialmente menor que o limitante superior do erro dado por (3).

EXEMPLO 2 Quão grande devemos tomar n para garantir que as aproximações de $\int_1^2 (1/x)\,dx$ pelas Regras do Trapézio e do Ponto Médio tenham precisão de 0,0001?

SOLUÇÃO Vimos no cálculo precedente que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$; assim, podemos tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ em (3). A precisão de 0,0001 significa que o tamanho do erro deve ser menor que 0,0001. Portanto escolhemos n de maneira que

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0{,}0001$$

Isolando n na desigualdade, temos

$$n^2 > \frac{2}{12(0{,}0001)}$$

ou $$n > \frac{1}{\sqrt{0{,}0006}} \approx 40{,}8$$

■ É bem possível que um valor de n mais baixo seja suficiente, mas 41 é o menor valor para o qual a fórmula de estimativa de erro pode nos garantir a precisão de 0,0001.

Então, $n = 41$ garantirá a precisão desejada.

Para a mesma precisão com a Regra do Ponto Médio escolhemos n de modo que

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0{,}0001$$

o que resulta $$n > \frac{1}{\sqrt{0{,}0012}} \approx 29$$ □

EXEMPLO 3

(a) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.

(b) Dê um limitante superior para o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO

(a) Como $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$, a Regra do Ponto Médio dá

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}\,dx &\approx \Delta x[f(0{,}05) + f(0{,}15) + \cdots + f(0{,}85) + f(0{,}95)]\\ &= 0{,}1[e^{0{,}0025} + e^{0{,}0225} + e^{0{,}0625} + e^{0{,}1225} + e^{0{,}2025} + e^{0{,}3025}\\ &\quad + e^{0{,}4225} + e^{0{,}5625} + e^{0{,}7225} + e^{0{,}9025}]\\ &\approx 1{,}460393\end{aligned}$$

FIGURA 6

A Figura 6 ilustra essa aproximação.

(b) Como $f(x) = e^{x^2}$, temos $f'(x) = 2xe^{x^2}$ e $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$. Além disso, como $0 \leqslant x \leqslant 1$, temos $x^2 \leqslant 1$ e assim

$$0 \leqslant f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leqslant 6e$$

■ Estimativas de erro são limitantes superiores para o erro. Estas dão, teoricamente, os piores cenários. O erro real, nesse caso, é de cerca de 0,0023.

Tomando $K = 6e$, $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$ na estimativa de erro (3), vemos que um limitante superior para o erro é

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0{,}007$$ □

REGRA DE SIMPSON

Outra regra para resultados de integração aproximados consiste no uso de parábolas em vez de segmentos de reta para aproximar uma curva. Como anteriormente, dividimos $[a, b]$ em n subintervalos de iguais comprimentos, $h = \Delta x = (b - a)/n$, mas dessa vez assumimos que n é um número *par*. Então, em cada par consecutivo de intervalos aproximamos a curva $y = f(x) \geqslant 0$ por uma parábola, como mostrado na Figura 7. Se $y_i = f(x_i)$,

então $P_i(x_i, y_i)$ é o ponto da curva acima de x_i. Uma parábola típica passa por três pontos consecutivos P_i, P_{i+1} e P_{i+2}.

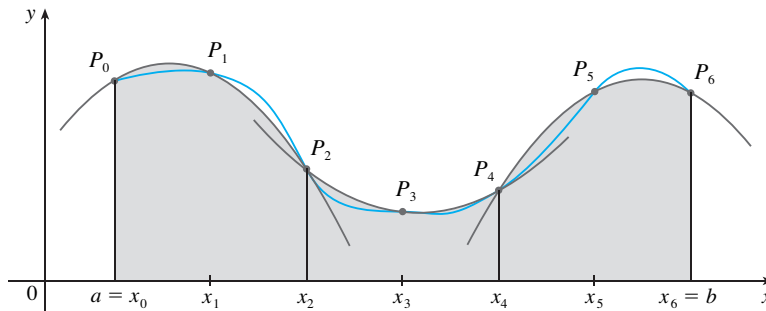



FIGURA 7

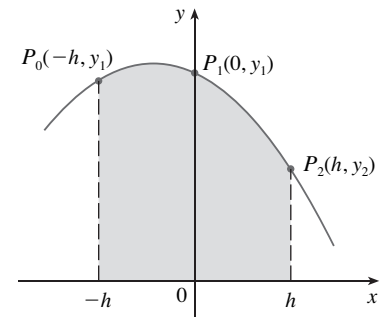



FIGURA 8

Para simplificar os nossos cálculos, primeiro consideramos o caso em que $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, e $x_2 = h$. (Veja a Figura 8.) Sabemos que a equação da parábola que passa por P_0, P_1 e P_2 tem a forma $y = Ax^2 + Bx + C$, e assim a área sob a parábola de $x = -h$ até $x = h$ é

■ Aqui, usamos o Teorema 5.5.7. Observe que $Ax^2 + C$ é par e Bx é ímpar.

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = 2\int_0^h (Ax^2 + C)\,dx$$

$$= 2\left[A\frac{x^3}{3} + Cx\right]_0^h$$

$$= 2\left(A\frac{h^3}{3} + Ch\right) = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$$

Mas, como a parábola passa por $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ e $P_2(h, y_2)$, temos

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = C$$

$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

e, portanto, $$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

Por isso podemos reescrever a área sob a parábola como

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Agora, movendo essa parábola horizontalmente, não mudamos a área sob ela. Isso significa que a área sob a parábola por P_0, P_1 e P_2 de $x = x_0$ a $x = x_2$ na Figura 7 ainda é

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Analogamente, a área sob a parábola por P_2, P_3 e P_4 de $x = x_2$ a $x = x_4$ é

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Se calcularmos as áreas sob todas as parábolas dessa forma e adicionarmos os resultados, obteremos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Embora tenhamos deduzido essa aproximação para o caso no qual $f(x) \geqslant 0$, essa é uma aproximação razoável para qualquer função contínua f e é chamada Regra de Simpson, em homenagem ao matemático inglês Thomas Simpson (1710-1761). Observe o padrão dos coeficientes: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 2, 4, 1.

THOMAS SIMPSON

Thomas Simpson era um tapeceiro que aprendeu sozinho matemática e tornou-se um dos maiores matemáticos ingleses do século XVIII. O que chamamos Regra de Simpson já era conhecido por Cavalieri e Gregory no século XVII, mas Simpson popularizou-a em seu livro de cálculo, muito vendido, chamado *A New Treatise of Fluxions*.

REGRA DE SIMPSON

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde n é par e $\Delta x = (b - a)/n$.

EXEMPLO 4 Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUÇÃO Colocando $f(x) = 1/x$, $n = 10$ e $\Delta x = 0{,}1$ na Regra de Simpson, temos

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx S_{10}$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\,[f(1) + 4f(1{,}1) + 2f(1{,}2) + 4f(1{,}3) + \cdots + 2f(1{,}8) + 4f(1{,}9) + f(2)]$$

$$= \frac{0{,}1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1{,}1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{4}{1{,}3} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{4}{1{,}5} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{4}{1{,}7} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{4}{1{,}9} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0{,}693150$$ □

Observe que, no Exemplo 4, a Regra de Simpson nos dá uma aproximação *muito* melhor ($S_{10} \approx 0{,}693150$) em relação ao valor verdadeiro da integral ($\ln 2 \approx 0{,}693147\ldots$) do que a aproximação pela Regra do Trapézio ($T_{10} \approx 0{,}693771$) ou pela Regra do Ponto Médio ($M_{10} \approx 0{,}692835$). As aproximações pela Regra de Simpson são médias ponderadas das aproximações pelas Regras do Trapézio e do Ponto Médio (veja o Exercício 48):

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n$$

(Lembre-se de que E_T e E_M geralmente têm sinais opostos, e $|E_M|$ é de cerca de metade de $|E_T|$.)

Em muitas aplicações de cálculo precisamos calcular uma integral mesmo quando nenhuma fórmula explícita é conhecida para y como função de x. Uma função pode ser dada graficamente ou como uma tabela de dados coletados. Se existe evidência de que os valores não estão mudando rapidamente, então a Regra do Trapézio ou de Simpson pode ainda ser usada para calcular um valor aproximado para $\int_a^b y\,dx$, a integral de y em relação a x.

EXEMPLO 5 A Figura 9 mostra o tráfego de dados através de uma linha direta conectando os Estados Unidos à SWITCH, a rede acadêmica e de pesquisa da Suíça, no dia 10 de fevereiro de 1998. $D(t)$ fornece os dados em processamento, medidos em megabits por segundo (Mb/s). Use a Regra de Simpson para dar uma estimativa da quantidade total de dados transmitidos através dessa linha até as 12 horas daquele dia.

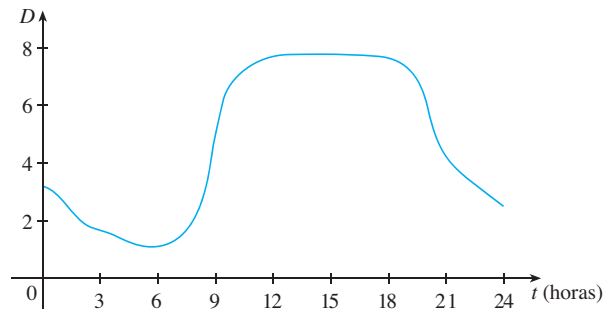



FIGURA 9

SOLUÇÃO Como queremos consistência entre as unidades e $D(t)$ é medido em megabits por segundo, as unidades para t serão transformadas de horas para segundos. Chamando $A(t)$ a quantidade de dados (em megabits) transmitida no instante t, em que t é medido em segundos, então $A'(t) = D(t)$. Logo, pelo Teorema da Variação Total (veja a Seção 5.4), a quantidade total de dados transmitida até as 12 horas (quando $t = 12 \times 60^2 = 43\,200$) é

$$A(43\,200) = \int_0^{43\,200} D(t)\,dt$$

A partir do gráfico, fizemos as estimativas para os valores de $D(t)$, com intervalos de hora em hora, e os compilamos na tabela a seguir.

t (horas)	t (segundos)	$D(t)$	t (horas)	t (segundos)	$D(t)$
0	0	3,2	7	25 200	1,3
1	3 600	2,7	8	28 800	2,8
2	7 200	1,9	9	32 400	5,7
3	10 800	1,7	10	36 000	7,1
4	14 400	1,3	11	39 600	7,7
5	18 000	1,0	12	43 200	7,9
6	21 600	1,1			

Então, usamos a Regra de Simpson com $n = 12$ e $\Delta t = 3\,600$ para estimar a integral:

$$\int_0^{43.200} A(t)\,dt \approx \frac{\Delta t}{3}\,[D(0) + 4D(3\,600) + 2D(7\,200) + \cdots + 4D(39\,600) + D(43\,200)]$$

$$\approx \frac{3\,600}{3}\,[3{,}2 + 4(2{,}7) + 2(1{,}9) + 4(1{,}7) + 2(1{,}3) + 4(1{,}0)$$

$$+ 2(1{,}1) + 4(1{,}3) + 2(2{,}8) + 4(5{,}7) + 2(7{,}1) + 4(7{,}7) + 7{,}9]$$

$$= 143\,880$$

Assim, a quantidade total de dados transmitidos até o meio-dia é aproximadamente 144 000 Mb ou equivalentemente 144 gigabits. □

n	M_n	S_n
4	0.69121989	0.69315453
8	0.69266055	0.69314765
16	0.69302521	0.69314721

n	E_M	E_S
4	0.00192729	−0.00000735
8	0.00048663	−0.00000047
16	0.00012197	−0.00000003

■ Muitas calculadoras e sistemas de computação algébrica têm um algoritmo embutido que calcula uma aproximação de uma integral definida. Algumas dessas máquinas usam a Regra de Simpson; outras utilizam as técnicas mais sofisticadas, como a integração numérica *adaptativa*. Isso significa que, se uma função flutua muito mais em uma certa parte do intervalo do que em outro lugar, então essa parte é dividida em mais subintervalos. Essa estratégia reduz o número de cálculos necessários para atingir uma dada precisão.

A tabela à margem compara a Regra de Simpson à Regra do Ponto Médio para a integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$, cujo valor real é 0,69314718. A segunda tabela mostra como o erro E_S na Regra de Simpson decresce por um fator de 16 quando n é dobrado. (Nos Exercícios 27 e 28, você deverá confirmar isso em outras duas integrais.) Isso é consistente com o aparecimento de n^4 no denominador da seguinte estimativa de erro para a Regra de Simpson. Ela é similar às estimativas dadas em (3) para as Regras do Trapézio e do Ponto Médio, mas usa a quarta derivada de f.

LIMITANTE DE ERRO PARA A REGRA DE SIMPSON Suponha que $|f^{(4)}(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Se E_S é o erro envolvido no uso da Regra de Simpson, então

$$|E_S| \leqslant \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

EXEMPLO 6 Qual o tamanho de n que devemos tomar para garantir que a aproximação pela Regra de Simpson para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ tenha uma precisão de 0,0001?

SOLUÇÃO Se $f(x) = 1/x$, então $f^{(4)}(x) = 24/x^5$. Como $x \geqslant 1$, temos $1/x \leqslant 1$ e assim

$$|f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{x^5}\right| \leqslant 24$$

Portanto, podemos tomar $K = 24$ em (4). Por isso, para um erro menor que 0,0001 devemos escolher n de modo que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0{,}0001$$

Isso dá $$n^4 > \frac{24}{180(0{,}0001)}$$

ou $$n > \frac{1}{\sqrt[4]{0{,}00075}} \approx 6{,}04$$

Portanto, $n = 8$ (n deve ser par) dá a precisão desejada. (Compare esse resultado com o Exemplo 2, no qual obtivemos $n = 41$ para a Regra do Trapézio e $n = 29$ para a Regra do Ponto Médio.) □

■ A Figura 10 ilustra os cálculos no Exemplo 7. Observe que os arcos de parábola estão tão próximos do gráfico de $y = e^{x^2}$ que eles são praticamente indistinguíveis do gráfico.

FIGURA 10

EXEMPLO 7

(a) Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar a integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.

(b) Estime o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO

(a) Se $n = 10$, então $\Delta x = 0{,}1$ e a Regra de Simpson dá

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(0) + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + \cdots + 2f(0{,}8) + 4f(0{,}9) + f(1)]$$

$$= \frac{0{,}1}{3}[e^0 + 4e^{0{,}01} + 2e^{0{,}04} + 4e^{0{,}09} + 2e^{0{,}16} + 4e^{0{,}25} + 2e^{0{,}36}$$
$$+ 4e^{0{,}49} + 4e^{0{,}64} + 4e^{0{,}81} + e^1]$$

$$\approx 1{,}462681$$

(b) A quarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ é

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

e assim, como $0 \leqslant x \leqslant 1$, temos

$$0 \leqslant f^{(4)}(x) \leqslant (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

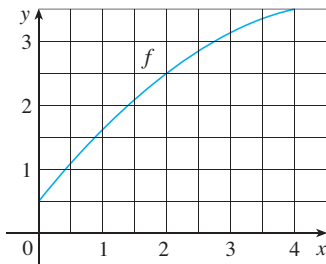
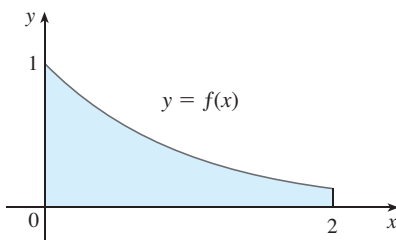
Portanto, colocando $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ e $n = 10$ em (4) vemos que o erro é no máximo

$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0{,}000115$$

(Compare esse resultado com o Exemplo 3.) Por isso, com precisão de três casas decimais temos

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx 1{,}463$$ □

7.7 EXERCÍCIOS

1. Seja $I = \int_0^4 f(x)\,dx$, em que f é a função cujo gráfico é mostrado.
(a) Use o gráfico para encontrar L_2, R_2 e M_2.
(b) Estas são estimativas por baixo ou por cima de I?
(c) Use o gráfico para achar T_2. Como isso se compara com I?
(d) Para qualquer valor de n, liste os números L_n, R_n, M_n, T_n e I na ordem crescente.

2. As aproximações pela extremidade esquerda, extremidade direita, Trapézio e Ponto Médio foram usadas para estimar $\int_0^2 f(x)\,dx$, onde f é uma função cujo gráfico é mostrado. As estimativas foram 0,7811, 0,8675, 0,8632 e 0,9540 e o mesmo número de subintervalos foi usado em cada caso.
(a) Qual regra produz qual estimativa?
(b) Entre quais aproximações está o valor verdadeiro de $\int_0^2 f(x)\,dx$?

3. Estime $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ usando (a) a Regra do Trapézio e (b) a Regra do Ponto Médio, cada qual com $n = 4$. A partir de um gráfico do integrando, decida se suas estimativas são subestimadas ou superestimadas. O que você pode concluir sobre o valor verdadeiro da integral?

4. Trace o gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x^2)$ na janela retangular $[0, 1]$ por $[0, 0{,}5]$ e seja $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
(a) Use o gráfico para decidir se L_2, R_2, M_2 e T_2 subestimam ou superestimam I.
(b) Para qualquer valor de n, liste os números L_n, R_n e M_n, T_n e I na ordem crescente.
(c) Calcule L_5, R_5, M_5 e T_5. A partir do gráfico, qual você acha que dá a melhor estimativa de I?

5–6 Use (a) a Regra do Ponto Médio e (b) a Regra de Simpson para aproximar a integral dada com o valor de n especificado. (Arredonde seu resultado para seis casas decimais). Compare seu resultado com o valor real para determinar o erro em cada aproximação.

5. $\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\,dx$, $n = 8$

6. $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx$, $n = 6$

7–18 Use (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra do Ponto Médio e (c) a Regra de Simpson para aproximar a integral dada com o valor especificado de n. (Arredonde seu resultado para seis casas decimais.)

7. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, $n = 10$

8. $\int_0^2 \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^3}}\,dx$, $n = 10$

9. $\int_1^2 \dfrac{\ln x}{1 + x}\,dx$, $n = 10$

10. $\int_0^3 \dfrac{dt}{1 + t^2 + t^4}\,dx$, $n = 6$

11. $\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(e^{t/2})\,dt$, $n = 8$

12. $\int_0^4 \sqrt{1 + \sqrt{x}}\,dx$, $n = 8$

13. $\int_0^4 e^{\sqrt{t}} \operatorname{sen} t\, dt, \quad n = 8$

14. $\int_0^1 \sqrt{z}\, e^{-z}\, dz, \quad n = 10$

15. $\int_1^5 \frac{\cos x}{x}\, dx, \quad n = 8$

16. $\int_4^6 \ln(x^3 + 2)\, dx, \quad n = 10$

17. $\int_0^3 \frac{1}{1 + y^5}\, dy, \quad n = 6$

18. $\int_0^4 \cos \sqrt{x}\, dx, \quad n = 10$

19. (a) Calcule as aproximações T_8 e M_8 para a integral $\int_0^1 \cos(x^2)\, dx$.
(b) Estime os erros nas aproximações na parte (a).
(c) Que tamanho de n devemos escolher para que as aproximações T_n e M_n para a integral na parte (a) tenham uma precisão de 0,0001?

20. (a) Ache as aproximações T_{10} e M_{10} para $\int_1^2 e^{1/x}\, dx$.
(b) Estime os erros envolvidos nas aproximações da parte (a).
(c) Que tamanho de n devemos escolher para que as aproximações T_n e M_n para a integral na parte (a) tenham uma precisão de 0,0001?

21. (a) Calcule as aproximações T_{10}, M_{10} e S_{10} para $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx$ e os erros correspondentes E_T, E_m e E_S.
(b) Compare os erros reais na parte (a) com as estimativas de erro dadas por (3) e (4).
(c) Que tamanho de n devemos escolher para que as aproximações T_n, M_n e S_n para a integral na parte (a) tenham uma precisão de 0,00001?

22. Quão grande deve ser n para garantir que a aproximação pela Regra de Simpson de $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ tenha uma precisão de 0,00001?

SCA **23.** O problema com as estimativas de erro é que frequentemente é muito difícil calcular as quatro derivadas e obter um bom limitante superior K para $|f^{(4)}(x)|$ manualmente. Mas os sistemas de computação algébrica não têm problemas para calcular $f^{(4)}$ e traçá-la; assim podemos facilmente encontrar um valor de K a partir do gráfico de uma máquina. Este exercício trabalha com aproximações para a integral $I = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$, em que $f(x) = e^{\cos x}$.
(a) Use um gráfico para obter um bom limitante superior para $|f''(x)|$.
(b) Use M_{10} para aproximar I.
(c) Use a parte (a) para estimar o erro na parte (b).
(d) Use o recurso de integração numérica de seu SCA para aproximar I.
(e) Como o erro real se compara com o erro estimado na parte (c)?
(f) Use um gráfico para obter um bom limitante superior para $|f^{(4)}(x)|$.
(g) Use S_{10} para aproximar I.
(h) Use a parte (f) para estimar o erro na parte (g).
(i) Como o erro real se compara com o erro estimado na parte (h)?
(j) Quão grande deve ser n para garantir que o tamanho do erro usando S_n seja menor que 0,0001?

SCA **24.** Repita o Exercício 23 para a integral $\int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^3}\, dx$.

25–26 Calcule as aproximações L_n, R_n, T_n e M_n para $n = 5$, 10 e 20. Então calcule os erros correspondentes E_L, E_R, E_T e E_M. (Arredonde seus resultados para seis casas decimais. Você pode usar o comando soma em um sistema de computação algébrica.) Quais observações você pode fazer? Em particular, o que acontece aos erros quando n é dobrado?

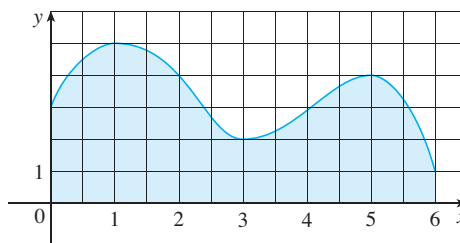
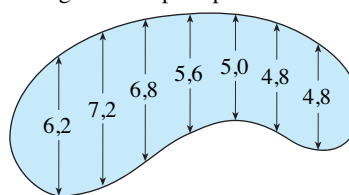
25. $\int_0^1 xe^x\, dx$

26. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx$

27–28 Ache as aproximações T_n, M_n e S_n para $n = 6$ e 12. Então calcule os erros correspondentes E_T, E_M e E_S. (Arredonde seu resultado para seis casas decimais. Você pode usar o comando soma em um sistema de computação algébrica.) Quais observações você pode fazer? Em particular, o que acontece quando n é dobrado?

27. $\int_0^2 x^4\, dx$

28. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

29. Estime a área sob o gráfico na figura usando (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra do Ponto Médio e (c) a Regra de Simpson, cada qual com $n = 6$.

30. Os comprimentos (em metros) de uma piscina com o formato de um rim são medidos a intervalos de 2 metros, como indicado na figura. Use a Regra de Simpson para estimar a área da piscina.

31. (a) Use a Regra do Trapézio e os dados a seguir para estimar o valor da integral $\int_0^{3,2} f(x)\, dx$.

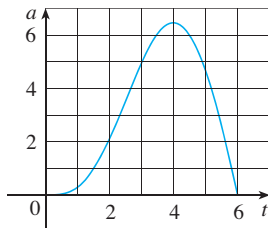
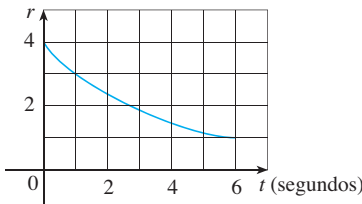
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,0	6,8	2,0	7,6
0,4	6,5	2,4	8,4
0,8	6,3	2,8	8,8
1,2	6,4	3,2	9,0
1,6	6,9		

(b) Se soubermos que $-4 \leqslant f'(x) \leqslant 1$ para todo x, estime o erro envolvido na aproximação da parte (a).

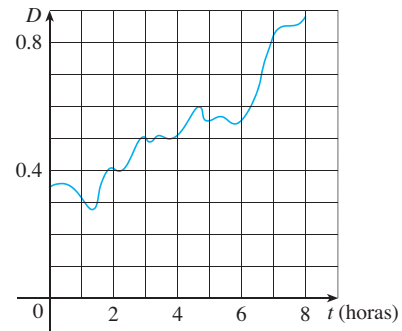
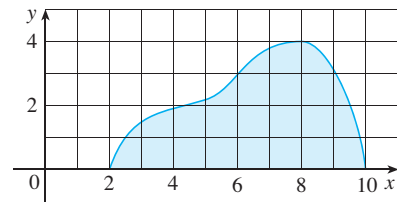
32. Um radar foi usado para medir a velocidade de um corredor durante os primeiros 5 segundos de uma corrida (veja a tabela).

Use a Regra de Simpson para estimar a distância que o corredor cobriu durante aqueles 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3,0	10,51
0,5	4,67	3,5	10,67
1,0	7,34	4,0	10,76
1,5	8,86	4,5	10,81
2,0	9,73	5,0	10,81
2,5	10,22		

33. O gráfico da aceleração $a(t)$ de um carro, medida em m/s^2, é mostrado. Use a Regra de Simpson para estimar o aumento da velocidade do carro durante o intervalo de 6 segundos.

34. A água vaza de um tanque a uma taxa de $r(t)$ litros por hora, sendo que o gráfico de r é como mostrado. Use a Regra de Simpson para estimar a quantidade total de água que vazou durante as primeiras seis horas.

35. A tabela dá o consumo de potência em megawatts, em Ontário, da meia-noite até às 6 horas da manhã em 10 de dezembro de 2004. Use a Regra de Simpson para estimar a energia usada durante aquele período. (Utilize o fato de que a potência é a derivada da energia.)

t	P	t	P
0:00	17 888	3:30	16 835
0:30	17 398	4:00	17 065
1:00	17 110	4:30	17 264
1:30	16 881	5:00	17 577
2:00	16 832	5:30	17 992
2:30	16 950	6:00	18 216
3:00	16 833		

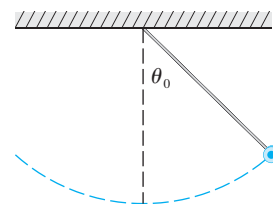
36. O gráfico a seguir mostra o tráfego de dados em um provedor de serviços na Internet entre meia-noite e as 8 horas da manhã. D denota os dados em processamento, medidos em megabits por segundo. Use a Regra de Simpson para estimar a quantidade total de dados transmitidos durante esse período de tempo.

37. Se a região mostrada na figura a seguir é girada em torno do eixo y formando um sólido, use a Regra de Simpson, com $n = 8$, para estimar o volume do sólido.

38. A tabela mostra os valores de uma função força $f(x)$ onde x é medido em metros e $f(x)$, em newtons. Use a Regra de Simpson para estimar o trabalho realizado por essa força para mover um objeto por uma distância de 18 m.

x	0	3	6	9	12	15	18
$f(x)$	9.8	9.1	8.5	8.0	7.7	7.5	7.4

39. A região delimitada pelas curvas $y = e^{-1/x}$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = 5$ é girada em torno do eixo x. Use a Regra de Simpson com $n = 8$ para estimar o volume do sólido resultante.

SCA **40.** A figura mostra um pêndulo com comprimento L que faz um ângulo máximo θ_0 com a vertical. Usando a Segunda Lei de Newton, pode ser mostrado que o período T (o tempo para um ciclo completo) é dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2 x}}$$

em que $k = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ e g é a aceleração da gravidade. Se $L = 1$ m e $\theta_0 = 42°$, use a Regra de Simpson com $n = 10$ para calcular o período.

41. A intensidade de luz com comprimento de onda λ viajando através de uma grade de difração com N fendas a um ângulo θ é dada por $I(\theta) = N^2\operatorname{sen}^2 k/k^2$, em que $k = (\pi Nd \operatorname{sen}\theta)/\lambda$ e d é a distância entre cada fenda. Um laser de hélio-neônio com

comprimento de onda $\lambda = 632{,}8 \times 10^{-9}$ m está emitindo uma banda estreita de luz, dada por $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$, através de uma grade com 10 000 fendas separadas por 10^{-4} m. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar a intensidade de luz total $\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\, d\theta$ emergindo da grade.

42. Use a Regra do Trapézio com $n = 10$ para aproximar $\int_0^{20} \cos(\pi x)\, dx$. Compare seu resultado com o valor real. Você pode explicar a discrepância?

43. Esboce o gráfico de uma função contínua no intervalo $[0, 2]$ para a qual a Regra do Trapézio, com $n = 2$, seja mais apropriada que a Regra do Ponto Médio.

44. Esboce o gráfico de uma função contínua no intervalo $[0, 2]$ para a qual a aproximação pela extremidade direita com $n = 2$ seja mais apropriada que a Regra de Simpson.

45. Se f é uma função positiva e $f''(x) < 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, mostre que

$$T_n < \int_a^b f(x)\, dx < M_n$$

46. Mostre que se f for um polinômio de grau três ou menor, então a Regra de Simpson dá o valor exato de $\int_a^b f(x)\, dx$.

47. Mostre que $\frac{1}{2}(T_n + M_n) = T_{2n}$.

48. Mostre que $\frac{1}{3} T_n + \frac{2}{3} M_n = S_{2n}$.

7.8 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Na definição de integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ trabalhamos com uma função f definida em um intervalo limitado $[a, b]$ e supomos que f não tem uma descontinuidade infinita (veja a Seção 5.2). Nesta seção estendemos o conceito de integral definida para o caso em que o intervalo é infinito e também para o caso onde f tem uma descontinuidade infinita em $[a, b]$. Em ambos os casos, a integral é chamada integral *imprópria*. Uma das aplicações mais importantes dessa ideia, distribuições de probabilidades, será estudada na Seção 8.5.

TIPO 1: INTERVALOS INFINITOS

Considere a região infinita S que está sob a curva $y = 1/x^2$, acima do eixo x e à direita da reta $x = 1$. Você poderia pensar que, como S tem extensão infinita, sua área deve ser infinita, mas vamos olhar mais de perto. A área da parte de S que está à esquerda da reta $x = t$ (sombreado na Figura 1) é

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Observe que $A(t) < 1$ não importando quão grande seja t.

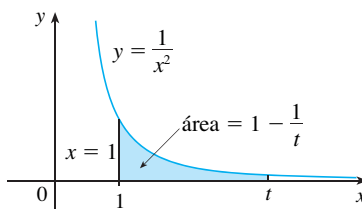



FIGURA 1

Também observamos que

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

A área da região sombreada se aproxima de 1 quando $t \to \infty$ (veja a Figura 2); assim, dizemos que a área da região infinita S é igual a 1 e escrevemos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

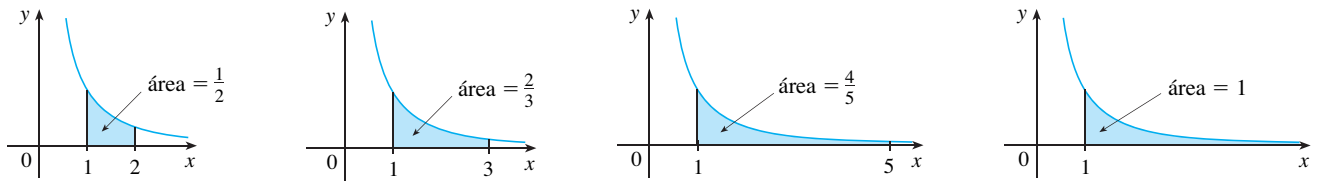



FIGURA 2

Usando esse exemplo como um guia, definimos a integral de f (não necessariamente uma função positiva) sobre um intervalo infinito como o limite das integrais sobre os intervalos finitos.

1 DEFINIÇÃO DE UMA INTEGRAL IMPRÓPRIA DO TIPO I

(a) Se $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para cada número $t \geqslant a$, então

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número finito).

(b) Se $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para cada número $t \leqslant b$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

desde que o limite exista (como um número finito).

As integrais impróprias $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ são chamadas **convergentes** se os limites correspondentes existem e **divergentes** se os limites não existem.

(c) Se ambas $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ são convergentes, então definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

Na parte (c), qualquer número real a pode ser usado (veja o Exercício 74).

Qualquer uma das integrais impróprias na Definição 1 pode ser interpretada como uma área, desde que f seja uma função positiva. Por exemplo, no caso (a), se $f(x) \geqslant 0$ e a integral $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ é convergente, então definimos a área da região $S = \{(x, y)\,|\,x \geqslant a, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ na Figura 3 como

$$A(S) = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

Isso é apropriado porque $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ é o limite quando $t \to \infty$ da área sob o gráfico de f de a a t.

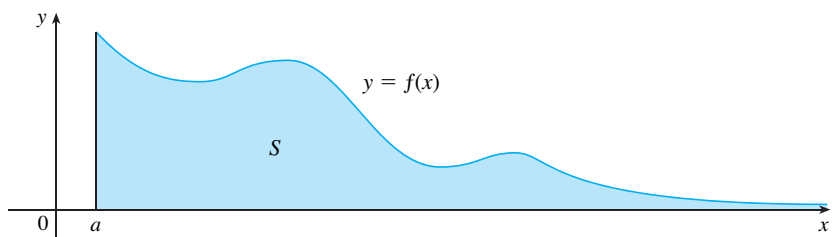



FIGURA 3

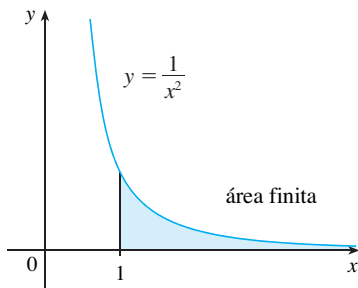



FIGURA 4

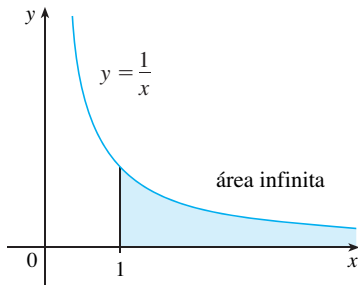



FIGURA 5

EXEMPLO 1 Determine se a integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO De acordo com a parte (a) da Definição 1, temos

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

O limite não existe como um número finito e, assim, a integral imprópria $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ é divergente. □

Vamos comparar o resultado do Exemplo 1 com o exemplo dado no início desta seção:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge}$$

Geometricamente, isso quer dizer que, embora as curvas $y = 1/x^2$ e $y = 1/x$ sejam muito semelhantes para $x > 0$, a região sob $y = 1/x^2$ à direita de $x = 1$ (a região sombreada na Figura 4) tem uma área finita, enquanto a correspondente região sob $y = 1/x$ (na Figura 5) tem uma área infinita. Observe que $1/x^2$ e $1/x$ aproximam-se de 0 quando $x \to \infty$, mas $1/x^2$ aproxima-se de 0 mais rápido que $1/x$. Os valores de $1/x$ não diminuem rápido o suficiente para que sua integral tenha um valor finito.

EXEMPLO 2 Calcule $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$.

SOLUÇÃO Usando a parte (b) da Definição 1, temos

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x\,dx$$

Integramos por partes com $u = x$, $dv = e^x\,dx$, de modo que $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_t^0 xe^x\,dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

Sabemos que $e^t \to 0$ quando $t \to -\infty$, e pela Regra de L'Hôspital temos

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(-e^t) = 0$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}(-te^t - 1 + e^t)$$

$$= -0 - 1 - 0 = -1$$ □

EXEMPLO 3 Calcule $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

SOLUÇÃO É conveniente escolher $a = 0$ na Definição 1(c):

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

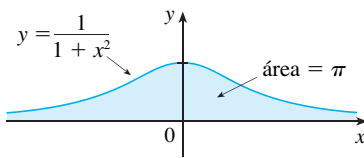
Precisamos calcular as integrais no lado direito separadamente:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\operatorname{tg}^{-1}t - \operatorname{tg}^{-1}0) = \lim_{t\to\infty}\operatorname{tg}^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(\operatorname{tg}^{-1}0 - \operatorname{tg}^{-1}t)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Como ambas as integrais são convergentes, a integral dada é convergente e

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

FIGURA 6

Como $1/(1+x^2) > 0$, a integral imprópria dada pode ser interpretada como a área da região infinita sob a curva $y = 1/(1+x^2)$ e acima do eixo x (veja a Figura 6). □

EXEMPLO 4 Para quais valores de p a integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

é convergente?

SOLUÇÃO Sabemos do Exemplo 1 que se $p = 1$, a integral é divergente. Vamos então supor que $p \neq 1$. Então,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\,dx\Big]_{x=1}^{x=t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$$

Se $p > 1$, então $p - 1 > 0$; assim, quando $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ e $1/t^{p-1} \to 0$. Portanto,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{se } p > 1$$

e, nesse caso, a integral converge. Mas se $p < 1$, então $p - 1 < 0$ e assim,

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{quando } t \to \infty$$

e a integral diverge. □

Resumimos o resultado do Exemplo 4 para referência futura:

2 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

TIPO 2: INTEGRANDOS DESCONTÍNUOS

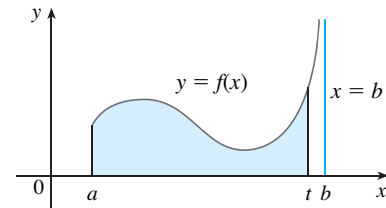
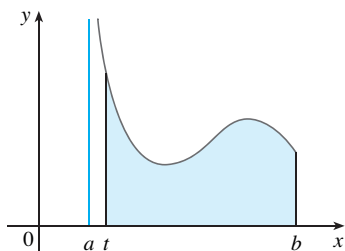
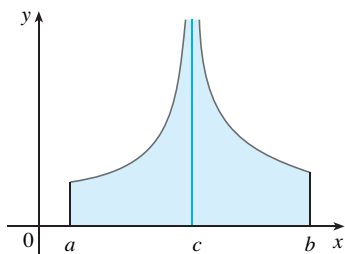
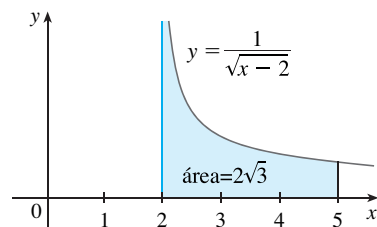
Suponha que f seja uma função positiva contínua definida no intervalo finito $[a, b)$, mas com a assíntota vertical em b. Seja S a região ilimitada sob o gráfico de f e acima do eixo x entre a e b. (Para as integrais do Tipo 1, a região se estende indefinidamente em uma direção horizontal. Aqui a região é infinita em uma direção vertical.) A área da parte de S entre a e t (a região sombreada na Figura 7) é

FIGURA 7

$$A(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

Se acontecer de $A(t)$ se aproximar um número definido A quando $t \to b^-$, então dizemos que a área da região S é A e escrevemos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx$$

Usamos essa equação para definir uma integral imprópria do Tipo 2 mesmo quando f não é uma função positiva, não importando o tipo de descontinuidade que f tenha em b.

■ As partes (b) e (c) da Definição 3 são mostradas nas Figuras 8 e 9 para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e f tem uma assíntota vertical em a e c, respectivamente.

3 DEFINIÇÃO DE UMA INTEGRAL IMPRÓPRIA DO TIPO 2

(a) Se f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx$$

se esse limite existir (como um número finito).

(b) Se f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$$

se esse limite existir (como um número).

A integral imprópria $\int_a^b f(x)\, dx$ é chamada **convergente** se o limite correspondente existir e **divergente** se o limite não existir.

(c) Se f tiver uma descontinuidade em c, onde $a < c < b$, e ambos $\int_a^c f(x)\, dx$ e $\int_c^b f(x)\, dx$ forem convergentes, então definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

FIGURA 8

FIGURA 9

EXEMPLO 5 Calcule $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\, dx$.

SOLUÇÃO Observamos primeiro que essa integral é imprópria, porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tem uma assíntota vertical $x = 2$. Como a descontinuidade infinita ocorre no extremo esquerdo de $[2, 5]$, usamos a parte (b) da Definição 3:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t \to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{t \to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5$$

$$= \lim_{t \to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}$$

FIGURA 10

Então, a integral imprópria dada é convergente e, como o integrando é positivo, podemos interpretar o valor da integral como a área da região sombreada na Figura 10. □

EXEMPLO 6 Determine se $\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO Observe que a integral fornecida é imprópria, porque $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \sec x = \infty$. Usando a parte (a) da Definição 3 e a Fórmula 14 da Tabela de Integrais, temos

$$\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx = \lim_{t \to (\pi/2)^-} \int_0^t \sec x\, dx = \lim_{t \to (\pi/2)^-} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \Big]_0^t$$

$$= \lim_{t \to (\pi/2)^-} [\ln(\sec t + \operatorname{tg} t) - \ln 1] = \infty$$

porque $\sec t \to \infty$ e $\operatorname{tg} t \to \infty$ quando $t \to (\pi/2)^-$. Então, a integral imprópria dada é divergente. □

EXEMPLO 7 Calcule $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ se for possível.

SOLUÇÃO Observe que a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical do integrando. Como esta ocorre no meio do intervalo $[0, 3]$, devemos usar a parte (c) da Definição 3 com $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

onde

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t \to 1^-} \ln |x-1| \Big]_0^t$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \big(\ln |t-1| - \ln |-1|\big)$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

porque $1 - t \to 0^+$ quando $t \to 1^-$. Então, $\int_0^1 dx/(x-1)$ é divergente. Isso implica que $\int_0^3 dx/(x-1)$ é divergente. [Não precisamos calcular $\int_1^3 dx/(x-1)$.] □

ATENÇÃO Se não tivéssemos observado a assíntota $x = 1$ no Exemplo 7 e em vez disso tivéssemos confundido essa integral com uma integral ordinária, então poderíamos ter feito erroneamente o seguinte cálculo:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln |x-1| \Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Isto é errado, porque a integral é imprópria e deve ser calculada em termos de limite.

De agora em diante, quando você se deparar com o símbolo $\int_a^b f(x)\, dx$ deverá decidir, olhando a função f no intervalo $[a, b]$, se ela é uma integral definida ordinária ou uma integral imprópria.

EXEMPLO 8 Calcule $\int_0^1 \ln x\, dx$.

SOLUÇÃO Sabemos que função $f(x) = \ln x$ tem uma assíntota vertical em 0 porque $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$. Assim, a integral dada é imprópria e temos

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \ln x\, dx$$

Agora, usamos a integral por partes com $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$ e $v = x$:

$$\int_t^1 \ln x\, dx = x \ln x \Big]_t^1 - \int_t^1 dx$$

$$= 1 \ln 1 - t \ln t - (1 - t)$$

$$= -t \ln t - 1 + t$$

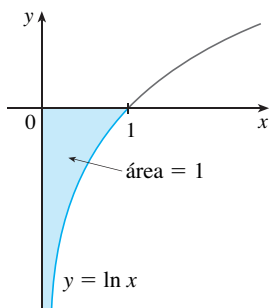



FIGURA 11

Para calcular o limite do primeiro termo usamos a Regra de L'Hôspital:

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0$$

Portanto, $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} (-t\ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1$$

A Figura 11 mostra a interpretação geométrica desse resultado. A área da região sombreada acima de $y = \ln x$ e abaixo do eixo x é 1. □

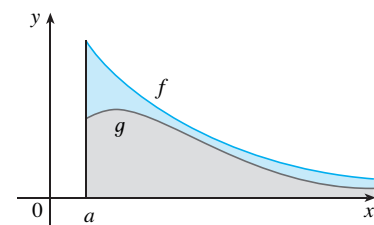
UM TESTE DE COMPARAÇÃO PARA INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Algumas vezes é impossível encontrar o valor exato de uma integral imprópria, mas ainda assim é importante saber se ela é convergente ou divergente. Nesses casos, o teorema seguinte é útil. Apesar de afirmarmos isso para as integrais do Tipo 1, um teorema análogo é verdadeiro para as integrais do Tipo 2.

FIGURA 12

TEOREMA DE COMPARAÇÃO Suponha que f e g sejam funções contínuas com $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$.

(a) Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

(b) Se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é divergente.

Omitiremos a demonstração do Teorema da Comparação, mas a Figura 12 o faz parecer plausível. Se a área sob a curva superior $y = f(x)$ for finita, então a área sob a curva inferior $y = g(x)$ também é finita. E se a área sob $y = g(x)$ for infinita, então a área sob $y = f(x)$ também é infinita. [Observe que a recíproca não é necessariamente verdadeira: se $\int_a^\infty g(x)\,dx$ é convergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ pode ser ou não convergente, e se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ é divergente, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ pode ser ou não divergente.]

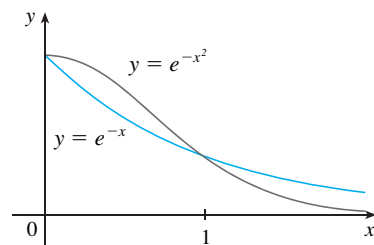



FIGURA 13

EXEMPLO 9 Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ é convergente.

SOLUÇÃO Não podemos calcular a integral diretamente porque a primitiva de e^{-x^2} não é uma função elementar (como explicado na Seção 7.5). Escrevemos

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

e observamos que a primeira integral do lado direito é apenas uma integral definida ordinária. Na segunda integral usamos o fato de que para $x \geqslant 1$ temos $x^2 \geqslant x$, assim $-x^2 \leqslant -x$ e, portanto, $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. (Veja a Figura 13.) A integral de e^{-x} é calculada facilmente:

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

Então, tomando $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = e^{-x^2}$ no Teorema da Comparação, vemos que $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ é convergente. Segue que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ é convergente. □

TABELA 1

t	$\int_0^t e^{-x^2}\,dx$
1	0,7468241328
2	0,8820813908
3	0,8862073483
4	0,8862269118
5	0,8862269255
6	0,8862269255

No Exemplo 9 mostramos que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ é convergente sem calcular seu valor. No Exercício 70 indicamos como mostrar que seu valor é aproximadamente 0,8862. Na teoria de probabilidade é importante saber o valor exato dessa integral imprópria, como veremos na Seção 8.5; usando os métodos do cálculo em diversas variáveis pode ser mostrado que o valor exato é $\sqrt{\pi}/2$. A Tabela 1 ilustra a definição de integral imprópria revelando como os valores (gerados por computador) de $\int_0^t e^{-x^2}$ se aproximam de $\sqrt{\pi}/2$

quando t se torna grande. De fato, esses valores convergem bem depressa, porque $e^{-x^2} \to 0$ muito rapidamente quando $x \to \infty$.

TABELA 2

t	$\int_1^t [(1 + e^{-x})/x]dx$
2	0,8636306042
5	1,8276735512
10	2,5219648704
100	4,8245541204
1 000	7,1271392134
10 000	9.4297243064

EXEMPLO 10 A integral $\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x}\, dx$ é divergente pelo Teorema da Comparação porque

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

e $\int_1^\infty (1/x)\, dx$ é divergente pelo Exemplo 1 [ou por (2) com $p = 1$]. □

A Tabela 2 ilustra a divergência da integral do Exemplo 10. Parece que os valores não se aproximam de nenhum número fixado.

7.8 EXERCÍCIOS

1. Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria.

(a) $\int_1^\infty x^4 e^{-x^4} dx$ (b) $\int_1^{\pi/2} \sec x\, dx$

(c) $\int_0^2 \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\, dx$ (d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 5}\, dx$

2. Quais das seguintes integrais é imprópria? Por quê?

(a) $\int_0^2 \frac{1}{2x - 1}\, dx$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{2x - 1}\, dx$

(c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\text{sen}\, x}{1 + x^2}\, dx$ (d) $\int_1^2 \ln(x - 1)\, dx$

3. Encontre a área sob a curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ e calcule-a para $t = 10$, 100 e 1 000. Então, encontre a área total abaixo dessa curva para $x \geqslant 1$.

4. (a) Trace as funções $f(x) = 1/x^{1,1}$ e $g(x) = 1/x^{0,9}$ nas janelas retangulares $[0, 10]$ por $[0, 1]$ e $[0, 100]$ por $[0, 1]$.
(b) Encontre as áreas sob os gráficos de f e g de $x = 1$ a $x = t$ e calcule para $t = 10$, 100, 10^4, 10^6, 10^{10} e 10^{20}.
(c) Calcule a área total sob cada curva para $x \geqslant 1$, se ela existir.

5–40 Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

5. $\int_1^\infty \frac{1}{(3x + 1)^2}\, dx$

6. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x - 5}\, dx$

7. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2 - w}}\, dw$

8. $\int_0^\infty \frac{x}{(x^2 + 2)^2}\, dx$

9. $\int_4^\infty e^{-y/2}\, dy$

10. $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\, dt$

11. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1 + x^2}\, dx$

12. $\int_{-\infty}^\infty (2 - v^4)\, dv$

13. $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\, dx$

14. $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

15. $\int_{2\pi}^\infty \text{sen}\, \theta\, d\theta$

16. $\int_{-\infty}^{\pi/2} \text{sen}\, 2\theta\, d\theta$

17. $\int_1^\infty \frac{x + 1}{x^2 + 2x}\, dx$

18. $\int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + 3z + 2}$

19. $\int_{-\infty}^1 x e^{2x}\, dx$

20. $\int_{-\infty}^6 r e^{r/3}\, dr$

21. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\, dx$

22. $\int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^4} dx$

23. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9 + x^6}\, dx$

24. $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 3}\, dx$

25. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx$

26. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1 + x^2)^2}\, dx$

27. $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\, dx$

28. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3 - x}}\, dx$

29. $\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x + 2}}\, dx$

30. $\int_6^8 \frac{4}{(x - 6)^3}\, dx$

31. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\, dx$

32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

33. $\int_0^{33} (x - 1)^{-1/5}\, dx$

34. $\int_0^1 \frac{1}{4y - 1}\, dy$

35. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$

36. $\int_{\pi/2}^\pi \text{cossec}\, x\, dx$

37. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\, dx$

38. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\, dx$

39. $\int_0^2 z^2 \ln z\, dz$

40. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

41–46 Esboce a região e encontre sua área (se a área for finita).

41. $S = \{(x, y) | x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant e^x\}$

42. $S = \{(x, y) | x \geqslant -2, 0 \leqslant y \leqslant e^{-x/2}\}$

43. $S = \{(x, y) | 0 \leqslant y \leqslant 2/(x^2 + 9)\}$

44. $S = \{(x, y) | x \geqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant x/(x^2 + 9)\}$

45. $S = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, 0 \leqslant y \leqslant \sec^2 x\}$

46. $S = \{(x, y) | -2 < x \leqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x + 2}\}$

47. (a) Se $g(x) = (\text{sen}^2 x)/x^2$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\,dx$ para $t = 2, 5, 10, 100, 1\,000$ e $10\,000$. Parece que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente?

(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/x^2$ para mostrar que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

(c) Ilustre a parte (b) traçando f e g na mesma tela para $1 \leqslant x \leqslant 10$. Use seu gráfico para explicar intuitivamente por que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

48. (a) Se $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\,dx$ para $t = 5, 10, 100, 1\,000$ e $10\,000$. Parece que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é convergente ou divergente?

(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para mostrar que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

(c) Ilustre a parte (b) colocando em um gráfico f e g na mesma tela para $2 \leqslant x \leqslant 20$. Use seu gráfico para explicar intuitivamente por que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

49–54 Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral é convergente ou divergente.

49. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3 + 1}\,dx$

50. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2 + e^{-x}}{x}\,dx$

51. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x + 1}{\sqrt{x^4 - x}}\,dx$

52. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{arctg}\, x}{2 + e^x}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\text{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

55. A integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

é imprópria por duas razões: o intervalo $[0, \infty)$ é infinito e o integrando tem uma descontinuidade infinita em 0. Calcule-a expressando-a como uma soma de integrais impróprias do Tipo 2 e do Tipo 1, como a seguir:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

56. Calcule

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$$

pelo mesmo método do Exercício 55.

57–59 Encontre os valores de p para os quais a integral converge e calcule a integral para estes valores de p.

57. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

58. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$

59. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\,dx$

60. (a) Calcule a integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ para $n = 0, 1, 2$ e 3.

(b) Conjecture o valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ quando n é um inteiro positivo arbitrário.

(c) Demonstre sua conjectura usando a indução matemática.

61. (a) Mostre que $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ é divergente.

(b) Mostre que

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-t}^t x\,dx = 0$$

Isso mostra que não podemos definir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$$

62. A *velocidade média* das moléculas em um gás ideal é

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

em que M é o peso molecular do gás; R, a constante do gás; T, a temperatura do gás; e v, a velocidade molecular. Mostre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Sabemos do Exemplo 1 que a região $\mathcal{R} = \{(x, y) | x \geqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ tem área infinita. Mostre que pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x obtemos um sólido com volume finito.

64. Use a informação e os dados dos Exercícios 29 e 30 da Seção 6.4 para calcular o trabalho necessário para lançar um satélite de 1 000 kg para fora do campo gravitacional da Terra.

65. Calcule a *velocidade de escape* v_0 necessária para lançar um foguete de massa m para fora do campo gravitacional de um planeta com massa M e raio R. Use a Lei de Newton da Gravitação (veja o Exercício 29 na Seção 6.4) e o fato de que a energia cinética inicial de $\frac{1}{2} m v_0^2$ supre o trabalho necessário.

66. Os astrônomos usam uma técnica chamada *estereografia estelar* para determinar a densidade de estrelas em um aglomerado estelar a partir da densidade (bidimensional) observada, que pode ser analisada a partir de uma fotografia. Suponha que em um aglomerado esférico de raio R a densidade de estrelas dependa somente da distância r do centro do aglomerado. Se a densidade

estelar aparente for dada por $y(s)$, onde s é a distância planar observada do centro do aglomerado e $x(r)$ é a densidade real, pode ser mostrado que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\, x(r)\, dr$$

Se a densidade real de estrelas em um aglomerado for $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, ache a densidade aparente $y(s)$.

67. Um fabricante de lâmpadas quer produzir lâmpadas que durem cerca de 700 horas, mas naturalmente algumas lâmpadas queimam mais rapidamente que outras. Seja $F(t)$ a fração de lâmpadas da companhia que queimam antes de t horas; assim $F(t)$ está entre 0 e 1.

(a) Faça um esboço de como você acha que o gráfico de F deve parecer.

(b) Qual o significado da derivada $r(t) = F'(t)$?

(c) Qual é o valor de $\int_0^\infty r(t)\, dt$? Por quê?

68. Como vimos na Seção 3.8, uma substância radioativa decai exponencialmente: a massa no tempo t é $m(t) = m(0)e^{kt}$, onde $m(0)$ é a massa inicial e k, uma constante negativa. A *vida média M* de um átomo na substância é

$$M = -k \int_0^\infty te^{kt}\, dt$$

Para o isótopo radioativo de carbono, ^{14}C, usado para a datação, o valor de k é $-0{,}000121$. Calcule a vida média de um átomo de ^{14}C.

69. Determine o quão grande tem de ser o número a de modo que

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2 + 1}\, dx < 0{,}001$$

70. Estime o valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ escrevendo a integral como uma soma de $\int_0^4 e^{-x^2}\, dx$ e $\int_4^\infty e^{-x^2}\, dx$. Aproxime a primeira integral usando a Regra de Simpson com $n = 8$ e mostre que a segunda integral é menor que $\int_4^\infty e^{-4x}\, dx$, que é menor que 0,0000001.

71. Se $f(t)$ é contínua para $t \geqslant 0$, a *Transformada de Laplace* de f é a função F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$$

e o domínio de F é o conjunto de todos os números s para os quais a integral converge. Calcule a Transformada de Laplace das seguintes funções.

(a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = e^t$ (c) $f(t) = t$

72. Mostre que se $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ para $t \geqslant 0$, onde M e a são constantes, então a Transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

73. Suponha que $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ e $0 \leqslant f'(t) \leqslant Ke^{at}$ para $t \geqslant 0$, onde f' é contínua. Se a Transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$ e a Transformada de Laplace de $f'(t)$ é $G(s)$, mostre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

74. Se $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ é convergente e a e b são números reais, mostre que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx + \int_b^\infty f(x)\, dx$$

75. Mostre que $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$.

76. Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\, dy$ interpretando as integrais como áreas.

77. Calcule o valor da constante C para a qual a integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{C}{x + 2} \right) dx$$

converge. Calcule a integral para esse valor de C.

78. Ache o valor da constante C para o qual a integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{3x + 1} \right) dx$$

converge. Calcule a integral para esse valor de C.

79. Suponha que f seja contínua em $[0, \infty)$ e que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. É possível que $\int_0^\infty f(x)\, dx$ seja convergente?

80. Mostre que se $a > -1$ e $b > a + 1$, então a seguinte integral é convergente.

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^b}\, dx$$

7 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Escreva a regra de integração por partes. Na prática, como você a usa?

2. Como você calcula $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ se m é ímpar? O que acontece se n é ímpar? O que acontece se m e n são pares?

3. Se a expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$ aparece em uma integral, que substituição você pode tentar? O que acontece se $\sqrt{a^2 + x^2}$ aparece? O que acontece se $\sqrt{x^2 - a^2}$ aparece?

4. Qual é a forma da expansão em frações parciais de uma função racional $P(x)/Q(x)$ se o grau de P é menor que o grau de Q e $Q(x)$ tem apenas os fatores lineares distintos? O que acontece se um fator linear é repetido? O que acontece se $Q(x)$ tem um fator quadrático irredutível (não repetido)? O que acontece se o fator quadrático é repetido?

5. Escreva as regras para a aproximação da integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ pela Regra do Ponto Médio, pela Regra do Trapézio

e pela Regra de Simpson. De qual você espera a melhor estimativa? Como você aproxima o erro para cada regra?

6. Defina as seguintes integrais impróprias.

(a) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (b) $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ (c) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

7. Defina a integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ para cada um dos seguintes casos.

(a) f tem uma descontinuidade infinita em a.
(b) f tem uma descontinuidade infinita em b.
(c) f tem uma descontinuidade infinita em c, onde $a < c < b$.

8. Enuncie o Teorema da Comparação para as integrais impróprias.

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $\dfrac{x(x^2+4)}{x^2-4}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2}$.

2. $\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-2}$.

3. $\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x-4}$.

4. $\dfrac{x^2-4}{x(x^2+4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2+4}$.

5. $\int_0^4 \dfrac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln 15$

6. $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^{\sqrt{2}}}\,dx$ é convergente.

7. Se f for contínua, então $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$.

8. A Regra do Ponto Médio é sempre mais precisa que a Regra do Trapézio.

9. (a) Toda função elementar tem uma derivada elementar.

(b) Toda função elementar tem uma primitiva elementar.

10. Se f é contínua em $[0, \infty)$ e $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é convergente, então $\int_0^\infty f(x)\,dx$ é convergente.

11. Se f é uma função contínua, decrescente em $[1, \infty)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, então $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é convergente.

12. Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ são ambas convergentes, então $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\,dx$ é convergente.

13. Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ são ambas divergentes, então $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\,dx$ é divergente.

14. Se $f(x) \leqslant g(x)$ e $\int_0^\infty g(x)\,dx$ diverge, então $\int_0^\infty f(x)\,dx$ também diverge.

EXERCÍCIOS

Observação: prática adicional nas técnicas de integração é fornecida no Exercício 7.5.

1–40 Calcule a integral.

1. $\int_0^5 \dfrac{x}{x+10}\,dx$

2. $\int_0^5 ye^{-0{,}06y}\,dy$

3. $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

4. $\int_1^4 \dfrac{dt}{(2t+1)^3}$

5. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta \cos^2\theta\,d\theta$

6. $\int \dfrac{1}{y^2-4y-12}\,dy$

7. $\int \dfrac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t}\,dt$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

9. $\int_1^4 x^{3/2}\ln x\,dx$

10. $\int_0^1 \dfrac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

11. $\int_1^2 \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

12. $\int_{-1}^1 \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$

13. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

14. $\int \dfrac{x^2+2}{x+2}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{\sec^6\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta$

17. $\displaystyle\int x\sec x\operatorname{tg} x\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+8x-3}{x^3+3x^2}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x+1}{9x^2+6x+5}\,dx$

20. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5\theta\sec^3\theta\,d\theta$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$

22. $\displaystyle\int te^{\sqrt{t}}\,dt$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

24. $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+6x-4}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

26. $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3x\operatorname{sen}2x\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^5\sec x\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

31. $\displaystyle\int_0^{\ln 10}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+8}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x\operatorname{sen} x}{\cos^3x}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$

34. $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+x^{3/2}}}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}\,d\theta$

37. $\displaystyle\int (\cos x+\operatorname{sen} x)^2\cos 2x\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\theta}}{\operatorname{sen}2\theta}\,d\theta$

41–50 Calcule a integral ou mostre que ela é divergente.

41. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

42. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^4}\,dx$

43. $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}\,dx$

44. $\displaystyle\int_2^{6}\frac{y}{\sqrt{y-2}}\,dy$

45. $\displaystyle\int_0^{4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{2-3x}\,dx$

47. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

48. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x}$

49. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$

50. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{x^2}\,dx$

51–52 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável traçando a função e sua primitiva (tome $C = 0$).

51. $\displaystyle\int \ln(x^2+2x+2)\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

53. Desenhe a função $f(x) = \cos^2x\operatorname{sen}^3x$ e use o gráfico para conjecturar o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Então, calcule a integral para confirmar sua conjectura.

SCA **54.** (a) Como você calcularia $\int x^5e^{-2x}\,dx$ manualmente? (Não faça a integração.)

(b) Como você calcularia $\int x^5e^{-2x}\,dx$ usando tabelas? (Não faça isso de fato.)

(c) Use um SCA para calcular $\int x^5e^{-2x}\,dx$.

(d) Trace o integrando e a integral indefinida na mesma tela.

55–58 Use a Tabela de Integrais no fim do livro para calcular a integral.

55. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2-4x-3}\,dx$

56. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^5 t\,dt$

57. $\displaystyle\int \sqrt{4+\operatorname{sen}^2x}\,dx$

58. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}}\,dx$

59. Verifique a Fórmula 33 na Tabela de Integrais (a) por derivação e (b) usando uma substituição trigonométrica.

60. Verifique a Fórmula 62 da Tabela de Integrais.

61. É possível encontrar um número n tal que $\int_0^{\infty} x^n\,dx$ *seja convergente?*

62. Para quais valores de a a integral $\int_0^{\infty} e^{ax}\cos x\,dx$ é convergente? Calcule a integral para esses valores de a.

63–64 Use (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra do Ponto Médio e (c) a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar a integral dada. Arredonde seus resultados para seis casas decimais.

63. $\displaystyle\int_2^{4}\frac{1}{\ln x}\,dx$

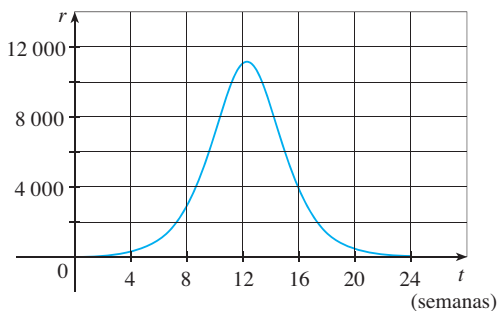
64. $\displaystyle\int_1^{4}\sqrt{x}\cos x\,dx$

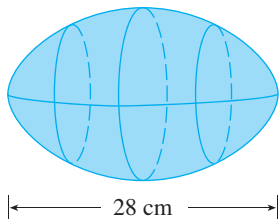
65. Estime os erros envolvidos no Exercício 63, partes (a) e (b). Quão grande deve ser n em cada caso para garantir um erro menor que 0,00001?

66. Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar a área sob a curva $y = e^x/x$ de $x = 1$ a $x = 4$.

67. A leitura do velocímetro (v) em um carro foi observada em intervalos de 1 minuto e os dados foram anotados na tabela a seguir. Use a Regra de Simpson para estimar a distância percorrida pelo carro.

t (min)	v (km/h)	t (min)	v (km/h)
0	64	6	90
1	67	7	91
2	72	8	91
3	78	9	88
4	83	10	90
5	86		

68. Uma população de abelhas cresce a uma taxa de $r(t)$ abelhas por semana (o gráfico de r é mostrado). Use a Regra de Simpson com 6 subintervalos para estimar o aumento da população de abelhas durante as primeiras 24 semanas.

SCA **69.** (a) Se $f(x) = \text{sen}(\text{sen}\, x)$, utilize um gráfico para encontrar um limitante superior para $|f^{(4)}(x)|$.
(b) Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar $\int_0^{\pi} f(x)\, dx$ e use a parte (a) para estimar o erro.
(c) Quão grande deve ser n para garantir que o tamanho do erro ao usar S_n seja menor que 0,00001?

70. Suponha que lhe peçam para estimar o volume de uma bola de futebol americano. Você mede e descobre que a bola tem 28 cm de comprimento. Você usa um barbante e mede a circunferência no ponto mais largo como 53 cm. A circunferência a 7 cm de cada extremo é 45 cm. Use a Regra de Simpson para fazer sua estimativa.

71. Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + 2}\, dx$$

é convergente ou divergente.

72. Encontre a área da região delimitada pela hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ e pela reta $y = 3$.

73. Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = \cos x$ e $y = \cos^2 x$ entre $x = 0$ e $x = \pi$.

74. Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = 1/(2 + \sqrt{x})$, $y = 1/(2 - \sqrt{x})$ e $x = 1$.

75. A região sob a curva $y = \cos^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, é girada em torno do eixo x. Calcule o volume do sólido resultante.

76. A região do Exercício 75 é girada em torno do eixo y. Calcule o volume do sólido resultante.

77. Se f' é contínua em $[0, \infty)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, mostre que

$$\int_0^{\infty} f'(x)\, dx = -f(0)$$

78. Podemos estender nossa definição de valor médio de uma função contínua a um intervalo infinito definindo o valor médio de f no intervalo $[a, \infty)$ como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t - a} \int_a^t f(x)\, dx$$

(a) Calcule o valor médio de $y = \text{tg}^{-1} x$ no intervalo $[0, \infty)$.
(b) Se $f(x) \geqslant 0$ e $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ for divergente, mostre que o valor médio de f no intervalo $[a, \infty)$ é $\lim_{x\to\infty} f(x)$, se o limite existir.
(c) Se $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente, qual o valor médio de f no intervalo $[a, \infty)$?
(d) Calcule o valor médio de $y = \text{sen}\, x$ no intervalo $[0, \infty)$.

79. Use a substituição $u = 1/x$ para mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2}\, dx = 0$$

80. A intensidade da força de repulsão entre duas cargas pontuais com o mesmo sinal, uma com carga 1 e outra com carga q, é

$$F = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

em que r é a distância entre as cargas e ε_0, uma constante. O *potencial* V no ponto P devido a carga q é definido como o trabalho realizado para trazer uma carga unitária do infinito até P ao longo da reta que liga q e P. Encontre uma fórmula para V.

■ Cubra a solução do exemplo e tente resolvê-lo sozinho.

EXEMPLO 1

(a) Demonstre que se f é uma função contínua, então

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(b) Use a parte (a) para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

para todos os números n positivos.

■ Os princípios de resolução de problemas foram discutidos na página 65.

SOLUÇÃO

(a) À primeira vista, a equação fornecida parece um tanto difícil de entender. Como é possível ligar o lado esquerdo ao lado direito? As associações, com frequência, podem ser feitas por meio de um dos princípios de resolução de problemas: *introduza alguma coisa extra*. Aqui o ingrediente extra é uma nova variável. Frequentemente pensamos na introdução de uma nova variável quando usamos a Regra de Substituição para integrar uma função específica. Mas aquela regra ainda é útil na presente circunstância, em que temos uma função geral f.

Quando pensamos em fazer uma substituição, a forma do lado direito sugere que esta deve ser $u = a - x$. Então, $du = -dx$. Quando $x = 0$, $u = a$; quando $x = a$, $u = 0$. Logo,

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$

No entanto, essa integral do lado direito é apenas outra maneira de escrever $\int_0^a f(x)\,dx$. Assim, a equação dada está demonstrada.

■ Os gráficos gerados por computador na Figura 1 tornam plausível que todas as integrais do exemplo tenham o mesmo valor. O gráfico de cada integrando está rotulado com o respectivo valor de n.

(b) Se considerarmos a integral dada como I e aplicarmos a parte (a) com $a = \pi/2$, obteremos

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x)}{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x) + \cos^n(\pi/2 - x)}\,dx$$

Uma identidade trigonométrica bem conhecida nos diz que $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$ e $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$, assim temos

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \operatorname{sen}^n x}\,dx$$

FIGURA 1

Note que as duas expressões para I são muito parecidas. De fato, os integrandos têm o mesmo denominador. Isso sugere que devemos adicionar as duas expressões. Se fizermos isso, obteremos

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, $I = \pi/4$. □

PROBLEMAS

FIGURA PARA O PROBLEMA 1

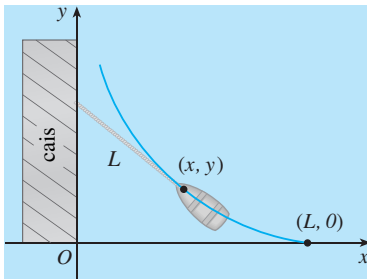



FIGURA PARA O PROBLEMA 6

1. Três estudantes de Matemática pediram uma pizza de 36 centímetros. Em vez de fatiá-la da maneira tradicional, eles decidiram fatiá-la com cortes paralelos, como mostrado na figura. Sendo estudantes de Matemática, eles foram capazes de determinar onde fatiar de maneira que a cada um coubesse a mesma quantidade de pizza. Onde foram feitos os cortes?

2. Calcule $\int \frac{1}{x^7 - x}\,dx$.

O ataque direto seria começar com frações parciais, mas isso seria brutal. Tente uma substituição.

3. Calcule $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{1 - x^7} - \sqrt[7]{1 - x^3}\right) dx$.

4. Os centros de dois discos de raio 1 estão separados de uma unidade. Encontre a área da união dos círculos.

5. Uma elipse é cortada de um círculo de raio a. O eixo maior da elipse coincide com um diâmetro do círculo e o eixo menor tem comprimento $2b$. Demonstre que a área da parte restante do círculo é a mesma que a de uma elipse com semieixos a e $a - b$.

6. Um homem inicialmente parado em um ponto O anda ao longo de um cais puxando uma canoa por uma corda de comprimento L. O homem mantém a corda reta e tensa. O caminho percorrido pela canoa é uma curva chamada *tractriz* (involuta de uma catenária) e esta tem a propriedade de que a corda é sempre tangente à curva (veja a figura).
(a) Mostre que se o caminho percorrido pela canoa é o gráfico da função $y = f(x)$, então

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{L^2 - x^2}}{x}$$

(b) Determine a função $y = f(x)$.

7. Uma função f é definida por

$$f(x) = \int_0^\pi \cos t \cos(x - t)\,dt \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

Ache o valor mínimo de f.

8. Se n é um inteiro positivo, demonstre que

$$\int_0^1 (\ln x)^n\,dx = (-1)^n n!$$

9. Mostre que

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n + 1)!}$$

Sugestão: Comece mostrando que se I_n denota a integral, então

$$I_{k+1} = \frac{2k + 2}{2k + 3} I_k$$

10. Suponha que f seja uma função positiva tal que f' é contínua.
(a) Como o gráfico de $y = f(x)$ sen nx está relacionado ao gráfico de $y = f(x)$? O que acontece quando $n \to \infty$?
(b) Faça uma conjectura para o valor do limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} nx\,dx$$

baseada em gráficos do integrando.

(c) Usando integração por partes, confirme a conjectura que você fez na parte (b). [Use o fato de que, como f' é contínua, existe uma constante M tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.]

11. Se $0 < a < b$, calcule $\lim_{t \to 0} \left\{ \int_0^1 [bx + a(1 - x)]^t \, dx \right\}^{1/t}$.

12. Trace $f(x) = \text{sen}(e^x)$ e use o gráfico para estimar o valor de t tal que $\int_t^{t+1} f(x)\, dx$ seja máximo. Então, calcule o valor exato de t que maximiza a integral.

FIGURA PARA O PROBLEMA 13

13. A circunferência de raio 1 mostrada na figura toca a curva $y = |2x|$ duas vezes. Determine a área da região que se encontra entre as duas curvas.

14. Um foguete é lançado verticalmente, consumindo combustível a uma taxa constante de b quilogramas por segundo. Seja $v = v(t)$ a velocidade do foguete no instante t e suponha que a velocidade de emissão de gases u seja constante. Considere $M = M(t)$ como a massa do foguete no tempo t e observe que M decresce a medida que o combustível é consumido. Desprezando a resistência do ar, segue da Segunda Lei de Newton que

$$F = M \frac{dv}{dt} - ub$$

em que a força $F = -Mg$. Assim

$$M \frac{dv}{dt} - ub = -Mg \qquad \boxed{1}$$

Sejam M_1 a massa do foguete sem combustível, M_2 a massa inicial de combustível e $M_0 = M_1 + M_2$. Então, até ele ficar sem combustível no tempo $t = M_2 b$, sua massa é $M = M_0 - bt$.

(a) Substitua $M = M_0 - bt$ na Equação 1 e isole v na equação resultante. Use a condição inicial $v(0) = 0$ para determinar a constante.

(b) Determine a velocidade do foguete no instante $t = M_2/b$. Esta é chamada *velocidade terminal*.

(c) Determine a altura $y = y(t)$ do foguete no tempo terminal.

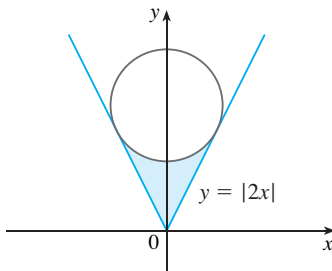
(d) Determine a altura do foguete em um instante t qualquer.

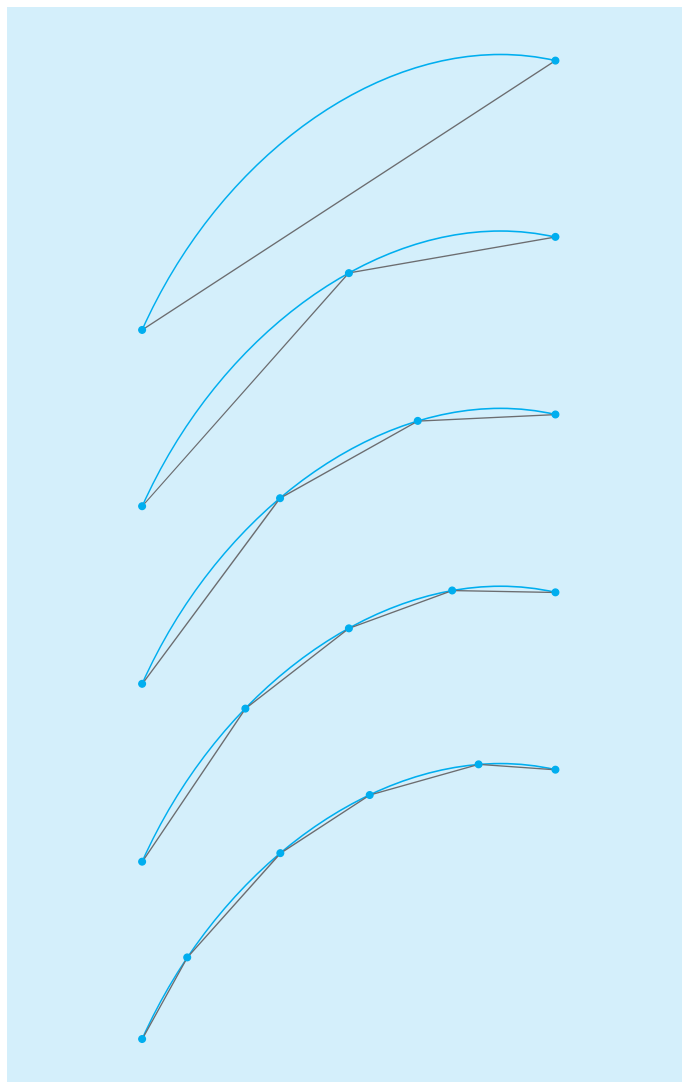
15. Use integração por partes para mostrar que, para todo $x > 0$,

$$0 < \int_0^\infty \frac{\text{sen}\, t}{\ln(1 + x + t)}\, dt < \frac{2}{\ln(1 + x)}$$

16. Suponha que $f(1) = f'(1) = 0$, f'' seja contínua em $[0, 1]$ e $|f''(x)| \leqslant 3$ para todo x. Mostre que

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leqslant \frac{1}{2}$$

8

MAIS APLICAÇÕES DE INTEGRAÇÃO

O comprimento de uma curva é o limite dos comprimentos das poligonais inscritas.

No Capítulo 6, vimos algumas aplicações de integrais, como: áreas, volumes, trabalho e valores médios. Aqui exploraremos algumas das muitas outras aplicações geométricas da integração — o comprimento de uma curva, a área de uma superfície — assim como quantidades de interesse na física, engenharia, biologia, economia e estatística. Por exemplo, investigaremos o centro de gravidade de uma placa, a força exercida pela pressão da água em uma barragem, a circulação de sangue do coração humano e o tempo médio de espera na linha durante uma chamada telefônica de auxílio ao consumidor.

8.1 COMPRIMENTO DE ARCO

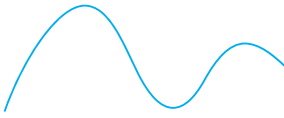



FIGURA 1

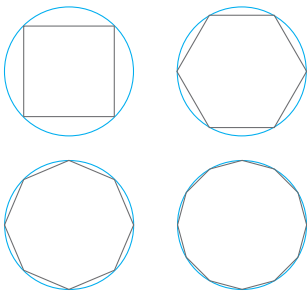
O que queremos dizer com o comprimento de uma curva? Podemos pensar em colocar um pedaço de barbante sobre a curva, como na Figura 1, e então medir o comprimento do barbante com uma régua. Mas isso pode ser difícil de fazer com muita precisão se tivermos uma curva complicada. Precisamos de uma definição exata para o comprimento de um arco de uma curva, da mesma maneira como desenvolvemos definições para os conceitos de área e volume.

Se a curva é uma poligonal, podemos facilmente encontrar seu comprimento; apenas somamos os comprimentos dos segmentos de reta que formam a poligonal. (Podemos usar a fórmula de distância para encontrar a distância entre as extremidades de cada segmento.) Definiremos o comprimento de uma curva geral primeiro aproximando-a por uma poligonal e então tomando o limite quando o número de segmentos da poligonal aumenta. Esse processo é familiar para o caso de um círculo, onde a circunferência é o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos (veja a Figura 2).

FIGURA 2

Agora, suponha que uma curva C seja definida pela equação $y = f(x)$, onde f é contínua e $a \leqslant x \leqslant b$. Obtemos uma poligonal de aproximação para C dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e com larguras iguais a Δx. Se $y_i = f(x_i)$, então o ponto $P_i(x_i, y_i)$ está em C e a poligonal com vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$, ilustrada na Figura 3, é uma aproximação para C.

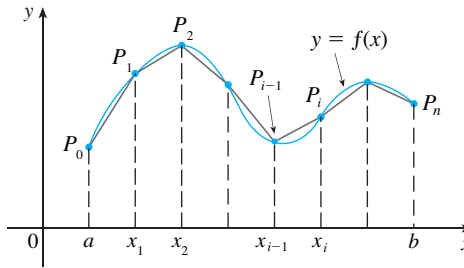



FIGURA 3

O comprimento L de C é aproximadamente o mesmo dessa poligonal e a aproximação fica melhor quando n aumenta. (Veja a Figura 4, onde o arco da curva entre P_{i-1} e P_i foi ampliado e as aproximações com sucessivos valores menores para Δx são mostradas.) Portanto, definimos o **comprimento** L da curva C com a equação $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, como o limite dos comprimentos dessas poligonais inscritas (se o limite existir):

1
$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

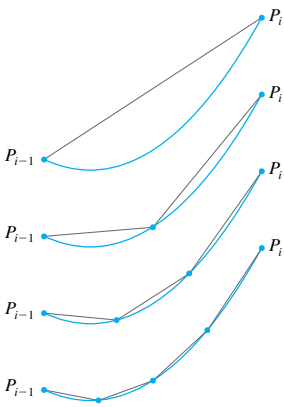



FIGURA 4

Observe que o procedimento para a definição de comprimento de arco é muito similar àquele que usamos para definir a área e o volume: dividimos a curva em um grande número de partes pequenas. Então, encontramos os comprimentos aproximados das partes pequenas e os somamos. Finalmente, tomamos o limite quando $n \to \infty$.

A definição de comprimento de arco dada pela Equação 1 não é muito conveniente para propósitos computacionais, mas podemos deduzir uma fórmula integral para L no caso em que f tem uma derivada contínua. [Essa função f é chamada **lisa**, porque uma pequena mudança em x produz uma pequena mudança em $f'(x)$.]

Se tomarmos $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, então

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, descobrimos que existe um número x_i^* entre x_{i-1} e x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

isto é,
$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\Delta x$$

Então, temos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x]^2}$$

$$= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x \quad \text{(porque } \Delta x > 0\text{)}$$

Portanto, pela Definição 1,

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

Reconhecemos essa expressão como igual a

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

pela definição de integral definida. Essa integral existe porque a função $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ é contínua. Então, demonstramos o seguinte teorema:

2 FÓRMULA DO COMPRIMENTO DE ARCO Se f' for contínua em $[a, b]$, então o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Se usarmos a notação de Leibniz para as derivadas, podemos escrever a fórmula do comprimento de arco como da seguinte forma:

3
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

FIGURA 5

■ Como uma verificação de nossa resposta no Exemplo 1, observamos a partir da Figura 5 que o comprimento de arco deve ser um pouco maior que a distância de (1, 1) a (4, 8), que é

$$\sqrt{58} \approx 7{,}615773$$

De acordo com os nossos cálculos no Exemplo 1, temos

$$L = \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right) \approx 7{,}633705$$

Seguramente, isso é um pouco maior que o comprimento do segmento de reta.

EXEMPLO 1 Calcule o comprimento de arco da parábola semicúbica $y^2 = x^3$ entre os pontos (1, 1) e (4, 8) (veja a Figura 5).

SOLUÇÃO Para a porção superior da curva, temos

$$y = x^{3/2} \qquad \frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}x^{1/2}$$

e assim a fórmula do comprimento de arco dá

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx$$

Se substituirmos $u = 1 + \frac{9}{4}x$, então $du = \frac{9}{4}\,dx$. Quando $x = 1$, $u = \frac{13}{4}$; quando $x = 4$, $u = 10$. Portanto,

$$L = \tfrac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\,du = \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{13/4}^{10}$$

$$= \tfrac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\tfrac{13}{4}\right)^{3/2}\right] = \tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right) \qquad \square$$

Se uma curva tem a equação $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ e $g'(y)$ é contínua, então, pela mudança dos papéis de x e y na Fórmula 2 ou na Equação 3, obtemos a seguinte fórmula para seu comprimento:

4
$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

EXEMPLO 2 Calcule o comprimento de arco da parábola $y^2 = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

SOLUÇÃO Como $x = y^2$, temos $dx/dy = 2y$ e a Fórmula 4 dá

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\, dy$$

Fazemos a substituição trigonométrica $y = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,\theta$, que resulta em $dy = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ e $\sqrt{1 + 4y^2} = \sqrt{1 + \text{tg}^2\theta} = \sec\theta$. Quando $y = 0$, $\text{tg}\,\theta = 0$, logo $\theta = 0$; quando $y = 1$, $\text{tg}\,\theta = 2$, assim $\theta = \text{tg}^{-1}\, 2 = \alpha$. Então

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\alpha \sec\theta \cdot \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^\alpha \sec^3\theta\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\Big[\sec\theta\,\text{tg}\,\theta + \ln|\sec\theta\,\text{tg}\,\theta|\Big]_0^\alpha \qquad \text{(do Exemplo 8 na Seção 7.2)} \\ &= \tfrac{1}{4}(\sec\alpha\,\text{tg}\,\alpha + \ln|\sec\alpha + \text{tg}\,\alpha|) \end{aligned}$$

(Poderíamos ter usado a Fórmula 21 da Tabela de Integrais.) Como $\text{tg}\,\alpha = 2$, temos $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha = 5$, assim $\sec\alpha = \sqrt{5}$ e

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln\left(\sqrt{5} + 2\right)}{4}$$

□

■ A Figura 6 mostra o arco da parábola cujo comprimento é calculado no Exemplo 2, com as aproximações poligonais tendo $n = 1$ e $n = 2$ segmentos de reta, respectivamente. Para $n = 1$, o comprimento aproximado é $L_1 = \sqrt{2}$, a diagonal de um quadrado. A tabela mostra as aproximações L_n que obtemos dividindo $[0, 1]$ em n subintervalos iguais. Observe que cada vez que duplicamos o número de lados da poligonal, nos aproximamos do comprimento exato, que é

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4} \approx 1{,}478943$$

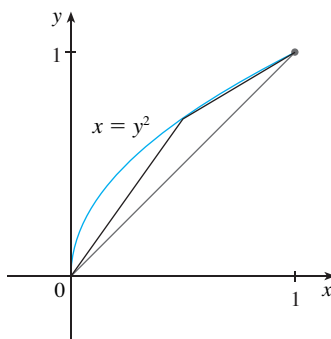



FIGURA 6

n	L_n
1	1,414
2	1,445
4	1,464
8	1,472
16	1.476
32	1.478
64	1,479

Por causa da presença da raiz quadrada nas Fórmulas 2 e 4, os cálculos de comprimento de um arco frequentemente nos levam a integrais muito difíceis ou mesmo impossíveis de calcular explicitamente. Então, algumas vezes temos de nos contentar em achar uma aproximação do comprimento da curva, como no exemplo a seguir.

EXEMPLO 3

(a) Escreva uma integral para o comprimento de arco da hipérbole $xy = 1$ do ponto $(1, 1)$ ao ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

(b) Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o comprimento de arco.

■ Verificando o valor da integral definida com uma aproximação mais exata, produzida por um sistema de computação algébrica, vemos que a aproximação usando a Regra de Simpson é precisa até quatro casas decimais.

SOLUÇÃO

(a) Temos

$$y = \frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

e assim o comprimento de arco é

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}\, dx$$

(b) Usando a Regra de Simpson (veja a Seção 7.7) com $a = 1, b = 2, n = 10, \Delta x = 0{,}1$ e $f(x) = \sqrt{1 + 1/x^4}$, obtemos

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1{,}1) + 2f(1{,}2) + 4f(1{,}3) + \cdots + 2f(1{,}8) + 4f(1{,}9) + f(2)]$$

$$\approx 1{,}1321$$

□

FUNÇÃO COMPRIMENTO DE ARCO

É útil termos uma função que meça o comprimento de arco de uma curva a partir de um ponto inicial particular até outro ponto qualquer na curva. Então, se a curva lisa C tem a equação $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, seja $s(x)$ a distância ao longo de C do ponto inicial $P_0(a, f(a))$ ao ponto $Q(x, f(x))$. Então s é uma função, chamada **função comprimento de arco**, e, pela Fórmula 2,

5 $$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

(Mudamos a variável de integração para t de modo que x não tenha dois significados.) Podemos usar a parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para derivar a Equação 5 (uma vez que o integrando é contínuo):

6 $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

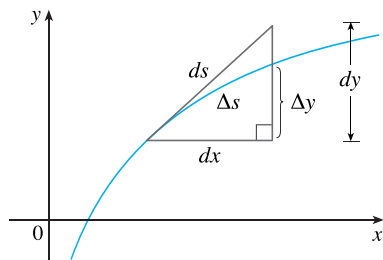
A Equação 6 mostra que a taxa de variação de s em relação a x é sempre pelo menos 1 e é igual a 1 quando $f'(x)$, a inclinação da curva, é 0. A diferencial do comprimento de arco é

7 $$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

e essa equação é escrita algumas vezes na forma simétrica

8 $$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

FIGURA 7

A interpretação geométrica da Equação 8 é mostrada na Figura 7. Isso pode ser usado como um artifício mnemônico para se lembrar das Fórmulas 3 e 4. Se escrevermos

$L = \int ds$, então, a partir da Equação 8 poderemos resolver para obter (7), o que dá (3), ou poderemos resolver para obter

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

o que dá (4).

EXEMPLO 4 Ache a função comprimento de arco para a curva $y = x^2 - \frac{1}{8} \ln x$ tomando $P_0(1, 1)$ como o ponto inicial.

SOLUÇÃO Se $f(x) = x^2 - \frac{1}{8} \ln x$, então

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2x + \frac{1}{8x}$$

Assim, a função comprimento de arco é dada por

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_1^x \left(2t + \frac{1}{8t}\right) dt = t^2 + \tfrac{1}{8} \ln t \Big]_1^x$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{8} \ln x - 1$$

Por exemplo, o comprimento de arco ao longo da curva de (1, 1) a (3, $f(3)$) é

$$s(3) = 3^2 + \tfrac{1}{8} \ln 3 - 1 = 8 + \frac{\ln 3}{8} \approx 8{,}1373$$ □

■ A Figura 8 mostra a interpretação da função comprimento de arco no Exemplo 4. A Figura 9 mostra o gráfico desta função comprimento de arco. Por que $s(x)$ é negativo quando x é menor que 1?

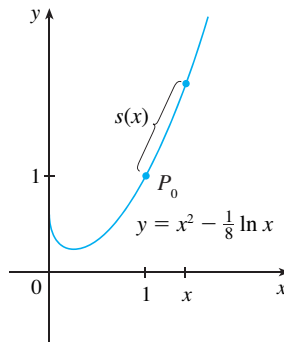



FIGURA 8

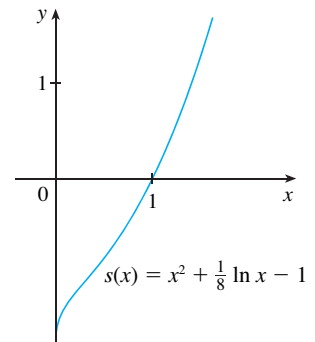



FIGURA 9

8.1 EXERCÍCIOS

1. Use a Fórmula 3 do comprimento de arco para encontrar o comprimento da curva $y = 2x - 5$, $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Verifique o seu resultado observando que a curva é um segmento de reta e calculando seu comprimento pela fórmula da distância.

2. Utilize a fórmula do comprimento de arco para achar o comprimento da curva $y = \sqrt{2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Verifique o seu resultado observando que a curva é um quarto de círculo.

3–6 Escreva, mas não calcule, uma integral para o comprimento da curva.

3. $y = x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

4. $y = xe^{-x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

5. $x = y + y^3, \quad 1 \leqslant y \leqslant 4$

6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

7–18 Ache o comprimento da curva.

7. $y = 1 + 6x^{3/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

8. $y^2 = 4(x + 4)^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad y > 0$

9. $y = \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{1}{10x^3}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

10. $x = \dfrac{y^4}{8} + \dfrac{1}{4y^2}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

11. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\,(y - 3), \quad 1 \leqslant y \leqslant 9$

12. $y = \ln(\cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

13. $y = \ln(\sec x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

14. $y = 3 + \frac{1}{2}\cosh 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

15. $y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

16. $y^2 = 4x, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2$

17. $y = e^x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

18. $y = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad a > 0$

19–20 Encontre o comprimento de arco da curva do ponto P ao ponto Q.

19. $y = \frac{1}{2}x^2, \quad P(-1, \frac{1}{2}), \quad Q(1, \frac{1}{2})$

20. $x^2 = (y - 4)^3 \quad P(1, 5), \quad Q(8, 8)$

21–22 Trace a curva e estime visualmente seu comprimento. A seguir, encontre seu comprimento exato.

21. $y = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{3/2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

22. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}, \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

23–26 Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o comprimento de arco da curva. Compare a sua resposta com o valor da integral produzido pela sua calculadora.

23. $y = xe^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 5$

24. $x = y + \sqrt{y}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

25. $x = \sec x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

26. $y = x \ln x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

27. (a) Desenhe a curva $y = x\sqrt[3]{4 - x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.
(b) Calcule os comprimentos das poligonais inscritas com $n = 1$, 2 e 4 lados. (Divida o intervalo em subintervalos iguais.) Ilustre esboçando essas poligonais (como na Figura 6).
(c) Escreva uma integral para o comprimento da curva.
(d) Use sua calculadora para encontrar o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. Compare com as aproximações na parte (b).

28. Repita o Exercício 27 para a curva

$$y = x + \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SCA **29.** Use um sistema de computação algébrica ou uma tabela de integrais para achar o comprimento de arco *exato* da curva $y = \ln x$ que está entre os pontos $(1, 0)$ e $(2, \ln 2)$.

SCA **30.** Use um sistema de computação algébrica ou uma tabela de integrais para achar o comprimento de arco *exato* da curva $y = x^{4/3}$ que está entre os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Se seu SCA tiver problemas para calcular a integral, faça uma substituição que mude a integral em uma que o SCA possa calcular.

31. Esboce a curva com a equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ e use a simetria para achar seu comprimento.

32. (a) Esboce a curva $y^3 = x^2$.
(b) Use as Fórmulas 3 e 4 para escrever duas integrais para o comprimento de arco de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Observe que uma delas é uma integral imprópria e calcule ambas as integrais.
(c) Ache o comprimento de arco dessa curva de $(-1, 1)$ a $(8, 4)$.

33. Ache a função comprimento de arco para a curva $y = 2x^{3/2}$ com o ponto inicial $P_0(1, 2)$.

34. (a) Desenhe a curva $y = \frac{1}{3}x^3 + 1/(4x)$, $x > 0$.
(b) Encontre a função comprimento de arco para essa curva com o ponto inicial $P_0(1, \frac{7}{12})$.
(c) Desenhe a função comprimento de arco.

35. Encontre a função comprimento de arco para a curva $y = \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$ com ponto inicial $(0, 1)$.

36. Um vento contínuo sopra uma pipa para oeste. A altura da pipa acima do solo a partir da posição horizontal $x = 0$ até

$x = 25$ m é dada por $y = 50 - 0{,}1(x - 15)^2$. Ache a distância percorrida pela pipa.

37. Um falcão voando a 15 m/s a uma altitude de 180 m acidentalmente derruba sua presa. A trajetória parabólica de sua presa caindo é descrita pela equação

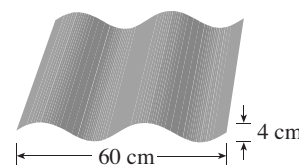
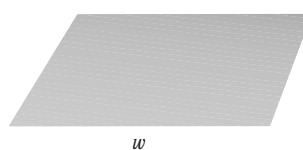
$$y = 180 - \frac{x^2}{45}$$

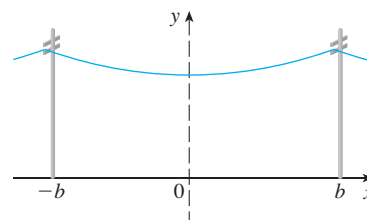
até que ela atinja o solo, onde y é a altura acima do solo e x, a distância horizontal percorrida em metros. Calcule a distância percorrida pela presa do momento em que ela é derrubada até o momento em que ela atinge o solo. Expresse sua resposta com precisão de um décimo de metro.

38. O Gateway Arch, em St. Louis, foi construído usando a equação

$$y = 211{,}49 - 20{,}96 \cosh 0{,}03291765x$$

para a curva central do arco, em que x e y estão medidos em metros e $|x| \leqslant 91{,}20$. Escreva uma integral para o comprimento de arco e use sua calculadora para estimar o comprimento com precisão de 1 metro.

39. Um fabricante de telhados metálicos corrugados quer produzir painéis que tenham 60 cm de largura e 4 cm de espessura processando folhas planas de metal como mostrado na figura. O perfil do telhado tem o formato de uma onda senoidal. Verifique que a senoide tem a equação $y = 2\,\text{sen}(\pi x/15)$ e calcule a largura w de uma folha metálica plana que é necessária para fazer um painel de 60 cm. (Use sua calculadora para calcular a integral correta até quatro algarismos significativos.)

40. (a) A figura mostra um fio de telefone pendurado entre dois postes em $x = -b$ e $x = b$. Este tem o formato de uma catenária com a equação $y = c + a \cosh(x/a)$. Calcule o comprimento do fio.

(b) Suponha que os dois postes telefônicos estejam separados a uma distância de 20 m e que o comprimento do fio entre os postes seja de 20,4 m. Se o ponto mais baixo do fio deve estar 9 m acima do solo, a qual altura o fio deve ser preso no poste?

41. Calcule o comprimento da curva

$$y = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt, \qquad 1 \leqslant x \leqslant 4.$$

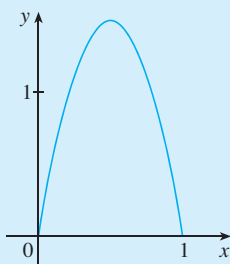
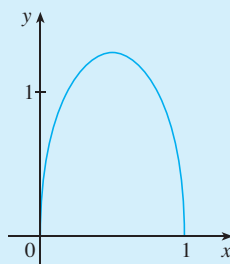
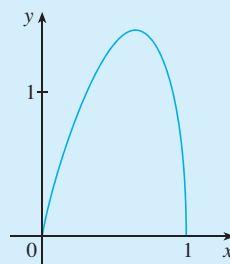
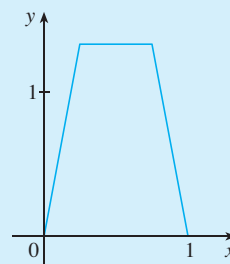
42. As curvas com as equações $x^n + y^n = 1$, $n = 4, 6, 8, \ldots$, são chamadas **círculos gordos**. Desenhe as curvas com $n = 2, 4, 6, 8$ e 10 para ver o porquê. Escreva uma integral para o comprimento L_{2k} do círculo gordo com $n = 2k$. Sem tentar calcular essa integral, determine o valor de $\lim_{k\to\infty} L_{2k}$.

PROJETO DE DESCOBERTA

TORNEIO DE COMPRIMENTO DE ARCOS

As curvas mostradas a seguir são exemplos de funções f contínuas e que têm as seguintes propriedades.

1. $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$
2. $f(x) \geqslant 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$
3. A área abaixo do gráfico de f entre 0 e 1 é igual a 1

Contudo, os comprimentos L dessas curvas são diferentes.

$L \approx 3{,}249$

$L \approx 2{,}919$

$L \approx 3{,}152$

$L \approx 3{,}213$

Tente descobrir as fórmulas de duas funções que satisfaçam as condições 1, 2 e 3. (Seus gráficos podem ser similares aos mostrados ou podem ser totalmente diferentes.) A seguir, calcule o comprimento de arco de cada gráfico. O vencedor será aquele que obtiver o menor comprimento.

8.2 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

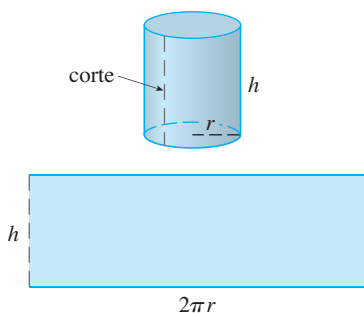



FIGURA 1

Uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada em torno de uma reta. Essa superfície é a fronteira lateral de um sólido de revolução do tipo discutido nas Seções 6.2 e 6.3.

Queremos definir a área da superfície de revolução de maneira que ela corresponda à nossa intuição. Se a área da superfície for A, podemos pensar que para pintar a superfície seria necessária a mesma quantidade de tinta que para pintar uma região plana com área A.

Vamos começar com algumas superfícies simples. A área da superfície lateral de um cilindro circular com raio r e altura h é tomada como $A = 2\pi rh$, porque podemos nos imaginar cortando o cilindro e desenrolando-o (como na Figura 1) para obter um retângulo com as dimensões $2\pi r$ e h.

Da mesma maneira, podemos tomar um cone circular com a base de raio r e a geratriz l, cortá-lo ao longo da linha pontilhada na Figura 2 e planificá-lo para formar o setor de um círculo com raio l e ângulo central $\theta = 2\pi r/l$. Sabemos que, em geral, a área do setor de um círculo com raio l e ângulo θ é $\frac{1}{2} l^2\theta$ (veja o Exercício 35 na Seção 7.3); e assim, neste caso, a área é

$$A = \frac{1}{2} l^2\theta = \frac{1}{2} l^2\left(\frac{2\pi r}{l}\right) = \pi rl$$

Portanto, definimos a área da superfície lateral de um cone como $A = \pi rl$.

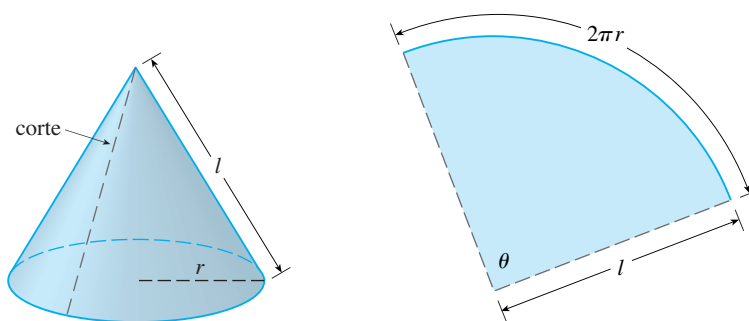
FIGURA 2

E nas superfícies de revolução mais complicadas? Se seguirmos a estratégia que usamos com o comprimento de arco, poderemos aproximar a curva original por um polígono. Quando esse polígono é girado ao redor de um eixo, ele cria uma superfície mais simples, cuja área da superfície se aproxima da área da superfície real. Tomando o limite podemos determinar a área exata da superfície.

FIGURA 3

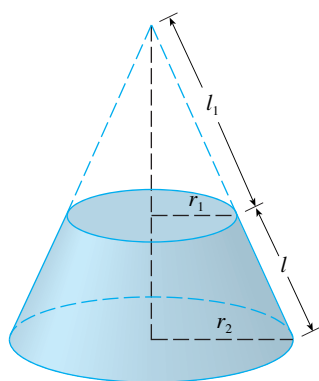
A superfície aproximadora, então, consiste em diversas *faixas*, cada qual formada pela rotação de um segmento de reta ao redor de um eixo. Para encontrar a área da superfície, cada uma dessas faixas pode ser considerada uma parte de um cone circular, como mostrado na Figura 3. A área da faixa (ou tronco de um cone) mostrada na Figura 3, com geratriz l e raios superior e inferior r_1 e r_2, respectivamente, é calculada pela subtração das áreas dos dois cones:

$$\boxed{1} \qquad A = \pi r_2(l_1 + l) - \pi r_1 l_1 = \pi[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l]$$

Pela semelhança de triângulos temos

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2}$$

o que resulta em

$$r_2 l_1 = r_1 l_1 + r_1 l \qquad \text{ou} \qquad (r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$$

Colocando isso na Equação 1 obtemos

$$A = \pi(r_1 l + r_2 l)$$

ou

2 $$\boxed{A = 2\pi r l}$$

em que $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ é o raio médio da faixa.

Agora, aplicamos essa fórmula à nossa estratégia. Considere a superfície mostrada na Figura 4, obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, ao redor do eixo x, em que f é positiva e tem uma derivada contínua. Para definir sua área de superfície, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com as extremidades $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e largura igual a Δx, como fizemos para determinar o comprimento de arco. Se $y_i = f(x_i)$, então o ponto $P_i(x_i, y_i)$ está sobre a curva. A parte da superfície entre x_{i-1} e x_i pode ser aproximada tomando-se o segmento de reta $P_{i-1}P_i$ e girando-o ao redor do eixo x. O resultado é uma faixa (um tronco de cone) com geratriz $l = |P_{i-1}P_i|$ e raio médio $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$; assim, pela Fórmula 2, a área da superfície é

(a) Superfície de revolução

(b) Faixa de aproximação

FIGURA 4

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i|$$

Como na demonstração do Teorema 8.1.2, temos

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

em que x_i^* é algum número em $[x_{i-1}, x_i]$. Quando x é pequeno, temos $y_i = f(x_i) \approx f(x_i^*)$ e também $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \approx f(x_i^*)$, uma vez que f é contínua. Portanto,

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i| \approx 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

e então uma aproximação para o que pensamos ser a área da superfície de revolução completa é

3 $$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x$$

Essa aproximação se torna melhor quando $n \to \infty$ e, reconhecendo (3) como uma soma de Riemann para a função $g(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, temos

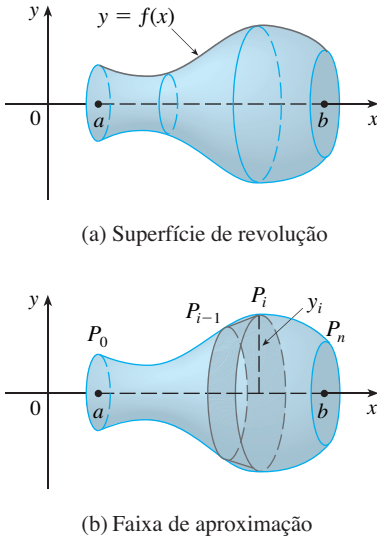
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\, \Delta x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Portanto, no caso onde f é positiva e tem uma derivada contínua, definimos a **área da superfície** obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, em torno do eixo x como

4 $$\boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

Com a notação de Leibniz para as derivadas, essa fórmula se torna

5 $$\boxed{S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

Se a curva é descrita como $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, então a fórmula para a área da superfície torna-se

6
$$S = \int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

e as Fórmulas 5 e 6 podem ser resumidas simbolicamente usando a notação para o comprimento de arco dada na Seção 8.1 como

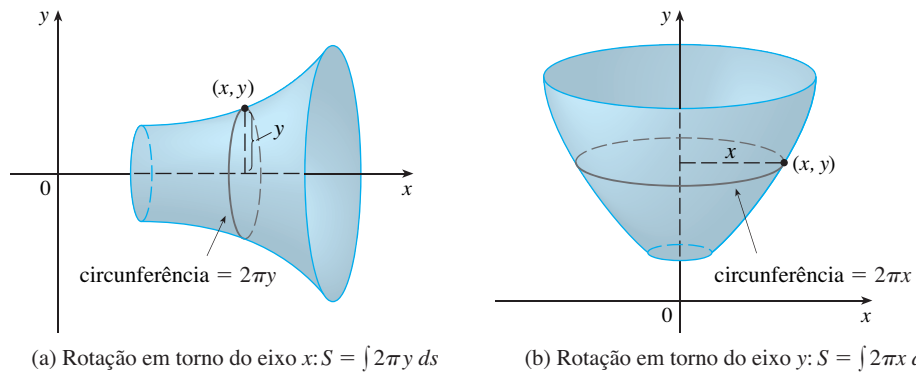
7
$$S = \int 2\pi y\, ds$$

Para a rotação em torno do eixo y, a fórmula da área da superfície se torna

8
$$S = \int 2\pi x\, ds$$

onde, como anteriormente, podemos usar

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{ou} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Essas fórmulas podem ser lembradas pensando-se em $2\pi y$ ou $2\pi x$ como a circunferência de um círculo traçada pelo ponto (x, y) na curva e girada em torno do eixo x ou eixo y, respectivamente (veja a Figura 5).

(a) Rotação em torno do eixo x: $S = \int 2\pi y\, ds$

(b) Rotação em torno do eixo y: $S = \int 2\pi x\, ds$

FIGURA 5

EXEMPLO 1 A curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, é um arco do círculo $x^2 + y^2 = 4$. Encontre a área da superfície obtida pela rotação desse arco ao redor do eixo x. (A superfície é uma porção de uma esfera de raio 2. (Veja a Figura 6.)

SOLUÇÃO Temos

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

e assim, pela Fórmula 5, a área da superfície é

$$S = \int_{-1}^{1} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\, \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 4\pi(2) = 8\pi$$ □

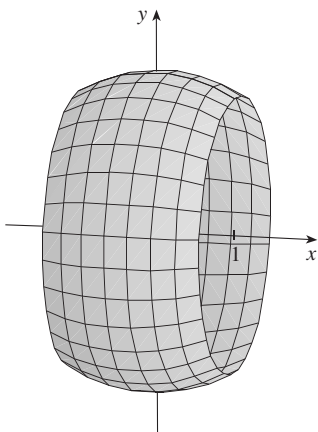



FIGURA 6

■ A Figura 6 mostra a porção da esfera cuja área é calculada no Exemplo 1.

■ A Figura 7 mostra a superfície de revolução cuja área é calculada no Exemplo 2.

FIGURA 7

EXEMPLO 2 O arco da parábola $y = x^2$ de $(1, 1)$ para $(2,4)$ é girado em torno do eixo y. Encontre a área da superfície resultante.

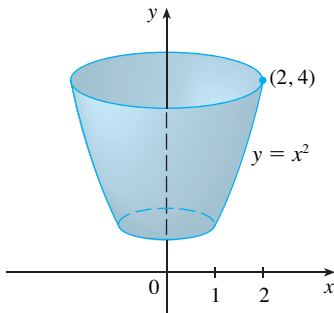
SOLUÇÃO 1 Usando

$$y = x^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

temos, da Fórmula 8,

$$S = \int 2\pi x \, ds$$
$$= \int_1^2 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$
$$= 2\pi \int_1^2 x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx$$

Substituindo $u = 1 + 4x^2$, temos $du = 8x \, dx$. Lembrando-nos de mudar os limites de integração, temos

$$S = \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u} \, du = \frac{\pi}{4} \left[\tfrac{2}{3} u^{3/2}\right]_5^{17}$$
$$= \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$$

■ Para verificar nossa resposta no Exemplo 2, veja pela Figura 7 que a área da superfície deve ser próxima à de um cilindro circular com a mesma altura e raio na metade entre o raio superior e o inferior da superfície: $2\pi(1{,}5)(3) \approx 28{,}27$. Calculamos que a área da superfície era

$$\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) \approx 30{,}85$$

o que parece razoável. Alternativamente, a área da superfície deve ser ligeiramente maior que a área do tronco de um cone com as mesmas bordas superior e inferior. Da Equação 2, isso é $2\pi(1{,}5)(\sqrt{10}) \approx 29{,}80$.

SOLUÇÃO 2 Usando

$$x = \sqrt{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

temos

$$S = \int 2\pi x \, ds = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, dy$$
$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} \, dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1} \, dy$$
$$= \frac{\pi}{4} \int_5^{17} \sqrt{u} \, du \qquad \text{(onde } u = 1 + 4y\text{)}$$
$$= \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) \qquad \text{(como na Solução 1)}$$

□

■ Outro método: Use a Fórmula 6 com $x = \ln y$.

EXEMPLO 3 Ache a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, em torno do eixo x.

SOLUÇÃO Usando a Fórmula 5 com

$$y = e^x \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx} = e^x$$

temos

$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \sqrt{1 + u^2}\, du \qquad \text{(em que } u = e^x\text{)}$$

■ Ou use a Fórmula 21, na Tabela de Integrais.

$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\alpha} \sec^3\theta\, d\theta \qquad \text{(em que } u = \text{tg}\,\theta \text{ e } \alpha = \text{tg}^{-1} e\text{)}$$

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2}\left[\sec\theta\,\text{tg}\,\theta + \ln|\sec\theta + \text{tg}\,\theta|\right]_{\pi/4}^{\alpha} \qquad \text{(pelo Exemplo 8 na Seção 7.2)}$$

$$= \pi\left[\sec\alpha\,\text{tg}\,\alpha + \ln(\sec\alpha + \text{tg}\,\alpha) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$$

Como $\text{tg}\,\alpha = e$, temos $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha = 1 + e^2$ e

$$S = \pi\left[e\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1 + e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$$ □

8.2 EXERCÍCIOS

1–4 Escreva, mas não calcule, uma integral para a área da superfície obtida pela rotação da curva em torno do (a) eixo x e (b) eixo y.

1. $y = x^4$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ **2.** $y = xe^{-x}$, $1 \leqslant x \leqslant 3$

3. $y = \text{tg}^{-1}x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ **4.** $x = \sqrt{y - y^2}$

5–12 Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva em torno do eixo x.

5. $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

6. $9x = y^2 + 18$, $2 \leqslant x \leqslant 6$

7. $y = \sqrt{1 + 4x}$, $1 \leqslant x \leqslant 5$

8. $y = \cos 2x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

9. $y = \cosh x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

10. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$, $\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

11. $x = \tfrac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$, $1 \leqslant y \leqslant 2$

12. $x = 1 + 2y^2$, $1 \leqslant y \leqslant 2$

13–16 A curva dada é girada em torno do eixo y. Calcule a área da superfície resultante.

13. $y = \sqrt[3]{x}$, $1 \leqslant y \leqslant 2$

14. $y = 1 - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

15. $y = \sqrt{a^2 - y^2}$, $0 \leqslant y \leqslant a/2$

16. $y = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}\ln x$, $1 \leqslant y \leqslant 2$

17–20 Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar a área da superfície obtida pela rotação da curva em torno do eixo x. Compare o seu resultado com o valor da integral obtido em sua calculadora.

17. $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 3$ **18.** $y = x + \sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$

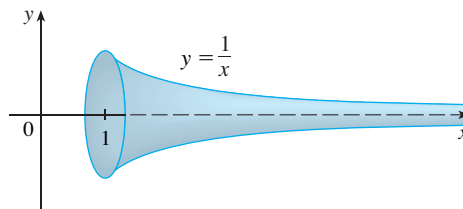
19. $y = \sec x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$ **20.** $y = e^{-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

SCA **21–22** Use um SCA ou uma tabela de integrais para encontrar a área exata da superfície obtida pela rotação da curva dada em torno do eixo x.

21. $y = 1/x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$ **22.** $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$

SCA **23–24** Use um SCA para calcular a área exata da superfície obtida pela rotação da curva em torno do eixo y. Se seu SCA tiver problemas para calcular a integral, expresse a área da superfície como uma integral na outra variável.

23. $y = x^3$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ **24.** $y = \ln(x + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

25. Se a região $\mathcal{R} = \{(x, y) | x \geqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ é girada em torno do eixo x, o volume do sólido resultante é finito (veja o Exercício 63 na Seção 7.8). Mostre que a área da superfície é infinita. (A superfície é mostrada na figura e é conhecida como **trombeta de Gabriel**.)

26. Se a curva infinita $y = e^{-x}$, $x \geqslant 0$, é girada em torno do eixo x, calcule a área da superfície resultante.

27. (a) Se $a > 0$, ache a área da superfície gerada pela rotação da curva $3ay^2 = x(a - x)^2$ em torno do eixo x.

(b) Encontre a área da superfície se a rotação for em torno do eixo y.

28. Um grupo de engenheiros está construindo uma antena parabólica cujo formato será formado pela rotação da curva $y = ax^2$

em torno do eixo y. Se a antena tiver 6 m de diâmetro e uma profundidade máxima de 1 m, encontre o valor de a e a área da superfície da antena.

29. (a) A elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

é girada em torno do eixo x para formar uma superfície chamada *elipsoide ou esferoide prolato*. Calcule a área da superfície desse elipsoide.

(b) Se a elipse da parte (a) for girada em torno de seu eixo menor (o eixo y), o elipsoide resultante é chamado um *esferoide oblato*. Encontre a área da superfície deste elipsoide.

30. Ache a área da superfície do toro no Exercício 63 na Seção 6.2.

31. Se a curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, gira em torno da reta horizontal $y = c$, onde $f(x) \leqslant c$, encontre a fórmula para a área da superfície resultante.

SCA **32.** Use o resultado do Exercício 31 para escrever uma integral para encontrar a área da superfície gerada pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, em torno da reta $y = 4$. Então, use um SCA para calcular a integral.

33. Calcule a área da superfície obtida pela rotação do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ em torno da reta $y = r$.

34. Mostre que a área da superfície de uma zona de uma esfera que está entre dois planos paralelos é $S = \pi dh$, em que d é o diâmetro da esfera e h, a distância entre os planos. (Observe que S depende apenas da distância entre os planos e não de sua localização, desde que ambos os planos interceptem a esfera.)

35. A Fórmula 4 é válida apenas quando $f(x) \geqslant 0$. Mostre que quando $f(x)$ não é necessariamente positiva, a fórmula para a área da superfície torna-se

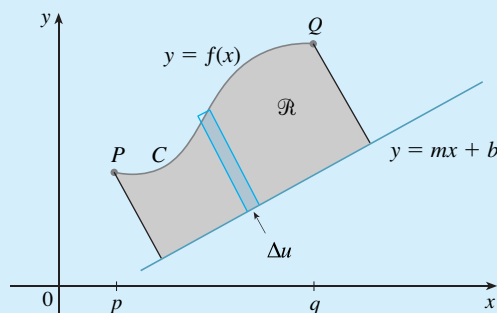
$$S = \int_a^b 2\pi\, |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

36. Seja L o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, onde f é positiva e tem uma derivada contínua. Seja S_f a área da superfície gerada pela rotação da curva em torno do eixo x. Se c é uma constante positiva, defina $g(x) = f(x) + c$ e seja S_g a área da superfície correspondente gerada pela curva $y = g(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Expresse S_g em termos de S_f e L.

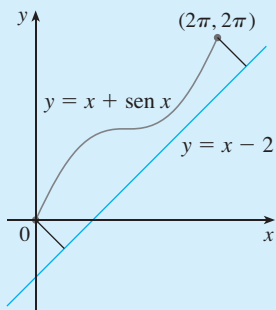
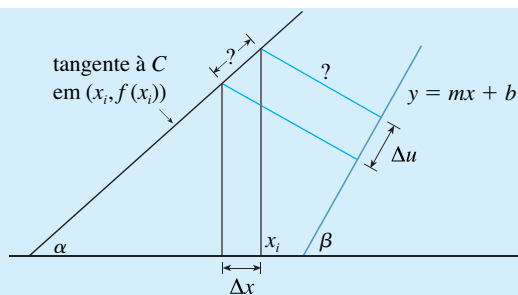
PROJETO DE DESCOBERTA

ROTAÇÃO EM TORNO DE UMA RETA INCLINADA

Sabemos como encontrar o volume de um sólido de revolução obtido pela rotação de uma região em torno de uma reta horizontal ou vertical (veja a Seção 6.2). Também sabemos como calcular a área de uma superfície de revolução se girarmos uma curva em torno de uma reta horizontal ou vertical (veja a Seção 8.2). Mas, e se girarmos em torno de uma reta inclinada, isto é, uma reta que não é nem horizontal nem vertical? Neste projeto pedimos que você descobra as fórmulas para o volume de um sólido de revolução e para a área da superfície de revolução quando o eixo de rotação é uma reta inclinada.

Seja C o arco da curva $y = f(x)$ entre os pontos $P(p, f(p))$ e $Q(q, f(q))$ e seja $\mathcal{R}$ a região limitada por C, pela reta $y = mx + b$ (que está inteiramente abaixo de C) e pelas perpendiculares à reta a partir de P e de Q.

1. Mostre que a área de $\mathcal{R}$ é

$$\frac{1}{1 + m^2} \int_p^q [f(x) - mx - b][1 + mf'(x)]\, dx$$

[*Sugestão*: Essa fórmula pode ser verificada pela subtração das áreas, mas será útil durante o projeto deduzi-la primeiro aproximando a área usando retângulos perpendiculares à reta, como mostrado na figura. Use a figura para ajudar a expressar Δu em termos de Δx.]

2. Encontre a área da região mostrada na figura à esquerda.

3. Ache uma fórmula similar àquela no Problema 1 para o volume do sólido obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = mx + b$.

4. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do Problema 2 ao redor da reta $y = x - 2$.

5. Encontre a fórmula para a área da superfície obtida pela rotação de C ao redor da reta $y = mx + b$.

SCA **6.** Use um sistema de computação algébrica para encontrar a área exata da superfície obtida pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, em torno da reta $y = \frac{1}{2}x$. Então, aproxime seu resultado para três casas decimais.

8.3 APLICAÇÕES À FÍSICA E À ENGENHARIA

Dentre as muitas aplicações de cálculo integral à física e à engenharia, consideramos duas aqui: a força decorrente da pressão da água e os centros de massa. Como em nossas aplicações anteriores à geometria (áreas, volumes e comprimentos) e ao trabalho, nossa estratégia é fragmentar a quantidade física em um grande número de pequenas partes, aproximar cada pequena parte, somar os resultados, tomar o limite e então calcular a integral resultante.

PRESSÃO E FORÇA HIDROSTÁTICA

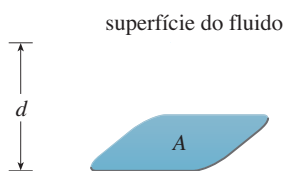



FIGURA 1

Os mergulhadores observam que a pressão da água aumenta quando eles mergulham mais fundo. Isso ocorre por causa do aumento do peso da água sobre eles.

Em geral, suponha que uma placa horizontal fina com área de A metros quadrados seja submersa em um fluido de densidade ρ quilogramas por metro cúbico a uma profundidade d metros abaixo da superfície do fluido, como na Figura 1. O fluido diretamente acima da placa tem um volume $V = Ad$, assim sua massa é $m = \rho V = \rho Ad$. A força exercida pelo fluido na placa é, portanto:

$$F = mg = \rho g A d$$

em que g é a aceleração da gravidade. A **pressão** P na placa é definida como a força por unidade de área:

$$P = \frac{F}{A} = \rho g d$$

■ Quando usamos o sistema de unidades norte-americano escrevemos $P = \rho g d = \delta d$, em que $\delta = \rho g$ é a densidade de peso (em oposição a ρ, que é a densidade de massa). Por exemplo a densidade de peso da água é $\delta = 62{,}5$ lb/pés^3.

No Sistema Internacional de Unidades, a pressão é medida em newtons por metro quadrado, que é chamada pascal (abreviação: 1 N/m^2 = 1 Pa). Como essa é uma unidade pequena, o

kilopascal (kPa) é frequentemente usado. Por exemplo, uma vez que a densidade da água é de $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$, a pressão no fundo de uma piscina de 2 m de profundidade é

$$P = \rho g d = 1\,000\ \text{kg/m}^3 \times 9{,}8\ \text{m/s}^2 \times 2\ \text{m}$$
$$= 19\,600\ \text{Pa} = 19{,}6\ \text{kPa}$$

Um princípio importante da pressão de fluidos é o fato verificado experimentalmente de que *em qualquer ponto no líquido a pressão é a mesma em todas as direções*. (Um mergulhador sente a mesma pressão no nariz e em ambas as orelhas.) Então, a pressão em *qualquer* direção a uma profundidade d em um fluido com densidade ρ é dada por

$$\boxed{1} \qquad P = \rho g d = \delta d$$

Isso nos ajuda a determinar a força hidrostática contra uma placa *vertical*, parede ou barragem em um fluido. Este não é um problema simples, porque a pressão não é constante, mas aumenta com o aumento da profundidade.

FIGURA 2

EXEMPLO 1 Uma barragem tem o formato do trapézio mostrado na Figura 2. A altura é de 20 m e a largura é de 50 m no topo e 30 m no fundo. Calcule a força na barragem decorrente da pressão hidrostática da água, se o nível de água está a 4 m do topo da barragem.

SOLUÇÃO Escolhemos um eixo vertical x com origem na superfície da água, como na Figura 3(a). A profundidade da água é de 16 m; assim, dividimos o intervalo $[0, 16]$ em subintervalos de igual comprimento com extremidades x_i e escolhemos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. A i-ésima faixa horizontal da represa é aproximada por um retângulo com altura Δx e largura w_i, na qual, pela semelhança de triângulos na Figura 3(b),

FIGURA 3

$$\frac{a}{16 - x_i^*} = \frac{10}{20} \qquad \text{ou} \qquad \frac{16 - x_i^*}{2} = 8 - \frac{x_i^*}{2}$$

e assim,
$$w_i = 2(15 + a) = 2\left(15 + 8 - \tfrac{1}{2}x_i^*\right) = 46 - x_i^*$$

Se A_i é a área da i-ésima faixa, então

$$A_i \approx w_i\,\Delta x = (46 - x_i^*)\,\Delta x$$

Se Δx é pequeno, então a pressão P_i na i-ésima faixa é praticamente constante, e podemos usar a Equação 1 para escrever

$$P_i \approx 1\,000 g x_i^*$$

A força hidrostática F_i agindo na i-ésima faixa é o produto da pressão pela área:

$$F_i = P_i A_i \approx 1\,000 g x_i^*(46 - x_i^*)\Delta x$$

Somando essas forças e tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos a força hidrostática total na barragem:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1\,000 g x_i^*(46 - x_i^*)\Delta x$$
$$= \int_0^{16} 1\,000 g x(46 - x)\,dx$$
$$= 1\,000(9{,}8)\int_0^{16} (46x - x^2)\,dx$$
$$= 9\,800\left[23x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{16}$$
$$\approx 4{,}43 \times 10^7\ \text{N}$$

□

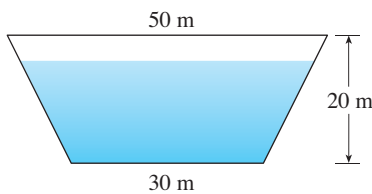
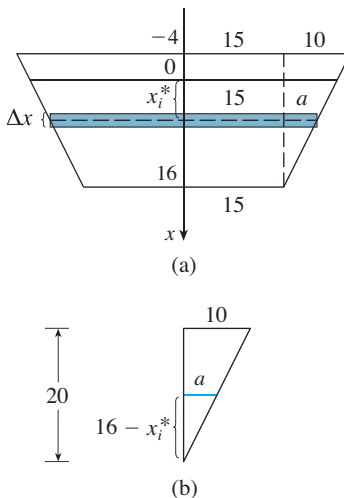
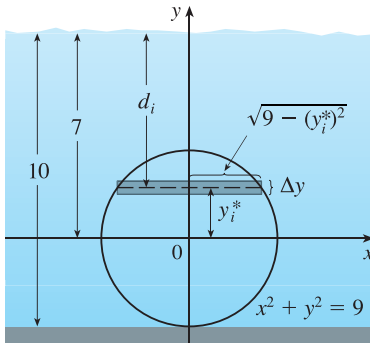



FIGURA 4

EXEMPLO 2 Calcule a força hidrostática no extremo de um tambor cilíndrico com raio de 3 pés que está submerso em água com 10 pés de profundidade.

SOLUÇÃO Neste exemplo é conveniente escolher os eixos como na Figura 4, de modo que a origem seja colocada no centro do tambor. Então o círculo tem uma equação simples, $x^2 + y^2 = 9$. Como no Exemplo 1, dividimos a região circular em faixas horizontais de larguras iguais. Da equação do círculo, vemos que o comprimento da i-ésima faixa é $2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}$ e assim sua área é

$$A_i = 2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\ \Delta y$$

A pressão nessa faixa é aproximadamente

$$\delta d_i = 62{,}5(7 - y_i^*)$$

e assim a força na faixa é aproximadamente

$$\delta d_i A_i = 62{,}5(7 - y_i^*)\ 2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\ \Delta y$$

A força total é obtida pela soma das forças em todas as faixas e tomando-se o limite

$$\begin{aligned} F &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62{,}5(7 - y_i^*)\ 2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\ \Delta y \\ &= 125 \int_{-3}^{3} (7 - y)\sqrt{9 - y^2}\, dy \\ &= 125 \cdot 7 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\, dy - 125 \int_{-3}^{3} y\sqrt{9 - y^2}\, dy \end{aligned}$$

A segunda integral é 0, porque o integrando é uma função ímpar (veja o Teorema 5.5.7). A primeira integral pode ser calculada usando a substituição trigonométrica $y = 3 \operatorname{sen} \theta$, mas é mais fácil observar que essa é a área de um disco semicircular com raio 3. Então

$$\begin{aligned} F &= 875 \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\, dy = 875 \cdot \tfrac{1}{2}\pi(3)^2 \\ &= \frac{7\,875\pi}{2} \approx 12\,370 \text{ lb} \end{aligned}$$

□

MOMENTOS E CENTROS DE MASSA

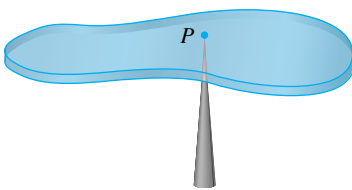



FIGURA 5

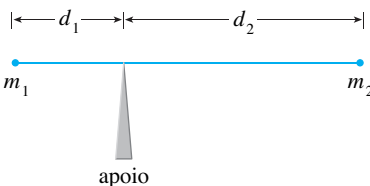
Nosso principal objetivo aqui é encontrar o ponto P no qual uma fina placa de qualquer formato se equilibra horizontalmente, como na Figura 5. Esse ponto é chamado **centro de massa** (ou centro de gravidade) da placa.

Primeiro, consideramos a situação mais simples mostrada na Figura 6, onde duas massas m_1 e m_2 são presas a um bastão de massa desprezível em lados opostos a um apoio e a distâncias d_1 e d_2 do apoio. O bastão ficará em equilíbrio se

$$\boxed{2} \qquad m_1 d_1 = m_2 d_2$$

FIGURA 6

Esse é um fato experimental descoberto por Arquimedes e chamado Lei da Alavanca. (Pense em uma pessoa mais leve equilibrando outra pessoa mais pesada em uma gangorra sentando-se mais longe do centro).

Agora suponha que o bastão esteja sobre o eixo x com m_1 em x_1 e m_2 em x_2 e o centro de massa em $\bar{x}$. Se compararmos as Figuras 6 e 7 veremos que $d_1 = \bar{x} - x_1$ e $d_2 = x_2 - \bar{x}$ e assim a Equação 2 dá

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2$$

3 $$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Os números m_1x_1 e m_2x_2 são denominados **momentos** das massas m_1 e m_2 (em relação à origem) e a Equação 3 diz que o centro de massa x é obtido pela soma dos momentos das massas e divisão pela massa total $m = m_1 + m_2$.

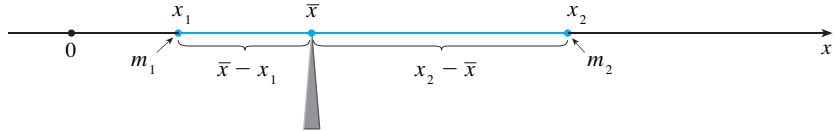



FIGURA 7

Em geral, se tivermos um sistema de n partículas com massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre o eixo x, podemos mostrar analogamente que o centro de massa do sistema está localizado em

4 $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{m}$$

em que $m = \sum m_i$ é a massa total do sistema, e a soma dos momentos individuais

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i$$

é chamada **momento do sistema em relação à origem**. Então, a Equação 4 pode ser reescrita como $m\bar{x} = M$, que diz que se a massa total fosse considerada como concentrada no centro de massa $\bar{x}$, então seu momento deveria ser o mesmo que o momento do sistema.

FIGURA 8

Agora, considere um sistema de n partículas com massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ no plano xy como mostrado na Figura 8. Por analogia com o caso unidimensional, definimos o **momento do sistema com relação ao eixo *y*** como

5 $$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i$$

e o **momento do sistema com relação ao eixo *x*** como

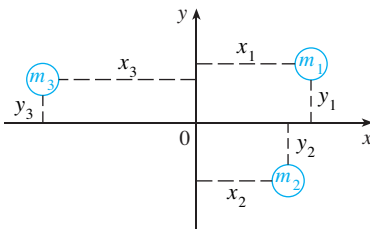
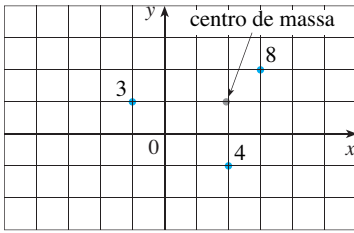
6 $$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_iy_i$$

Então M_y mede a tendência de o sistema girar em torno do eixo y e M_x mede a tendência de ele girar em torno do eixo x.

Como no caso unidimensional, as coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro de massa são dadas em termos dos momentos pelas fórmulas

7 $$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

em que $m = \sum m_i$ é a massa total. Como $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$, o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$ é o ponto em que uma partícula única de massa m teria os mesmos momentos do sistema.

EXEMPLO 3 Calcule os momentos e os centros de massa do sistema de objetos que têm massas 3, 4 e 8 nos pontos $(-1, 1)$, $(2, -1)$ e $(3, 2)$.

SOLUÇÃO Usamos as Equações 5 e 6 para calcular os momentos

$$M_y = 3(-1) + 4(2) + 8(3) = 29$$

$$M_x = 3(1) + 4(-1) + 8(2) = 15$$

Como $m = 3 + 4 + 8 = 15$, usamos as Equações 7 para obter

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{29}{15} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15}{15} = 1$$

Então o centro de massa é $(1\frac{14}{15}, 1)$ (veja a Figura 9). □

FIGURA 9

A seguir, consideramos uma placa plana (denominada *lâmina*) com densidade uniforme ρ que ocupa uma região $\mathcal{R}$ do plano. Desejamos encontrar o centro de massa da placa, chamado **centroide** (ou centro geométrico) de $\mathcal{R}$. Ao fazer isso, usamos os seguintes princípios físicos: o **princípio da simetria** diz que se $\mathcal{R}$ é simétrico em relação à reta l, então o centroide de $\mathcal{R}$ está em l. (Se $\mathcal{R}$ for refletida em relação a l, então, $\mathcal{R}$ permanece o mesmo, assim seu centroide permanece fixo. Mas os únicos pontos fixos estão em l.) Logo, o centroide de um retângulo é seu centro. Os momentos devem ser definidos de maneira que, se a massa total da região está concentrada no centro de massa, então seus momentos permanecem inalterados. Além disso, o momento da união de duas regiões sem intersecção deve ser a soma dos momentos das regiões individuais.

Suponha que a região $\mathcal{R}$ seja do tipo mostrado na Figura 10(a); isto é, $\mathcal{R}$ esteja entre as retas $x = a$ e $x = b$, acima do eixo x e abaixo do gráfico de f, em que f é uma função contínua. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e larguras iguais a Δx. Escolhemos o ponto amostral x_i^* como o ponto médio $\bar{x}_i$ do i-ésimo subintervalo, que é $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Isso determina a aproximação poligonal de $\mathcal{R}$, mostrada na Figura 10(b). O centroide do i-ésimo retângulo aproximador R_i é seu centro $C_i\left(\bar{x}_i, \frac{1}{2} f(\bar{x}_i)\right)$. Sua área é $f(\bar{x}_i)\Delta x$; assim, sua massa é

(a)

$$\rho f(\bar{x}_i)\Delta x$$

O momento de R_i em relação ao eixo y é o produto de sua massa pela distância de C_i ao eixo y, que é $\bar{x}_i$. Então

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\Delta x]\,\bar{x}_i = \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x$$

(b)

FIGURA 10

Somando esses momentos, obtemos o momento da aproximação poligonal de $\mathcal{R}$ e, então, tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos o momento do próprio $\mathcal{R}$ em relação ao eixo y:

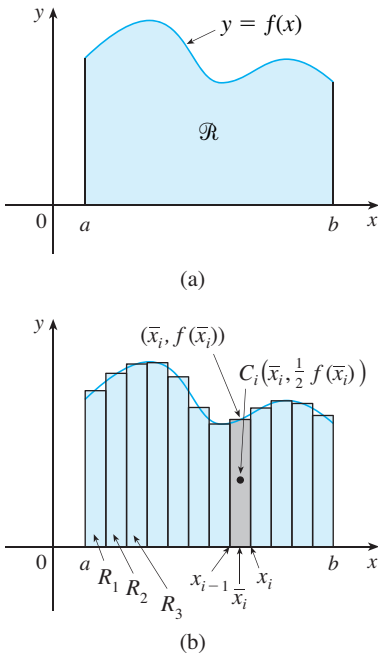
$$\boxed{M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x = \rho \int_a^b x f(x)\,dx}$$

De maneira análoga calculamos o momento de R_i em relação ao eixo x como o produto de sua massa e da distância de C_i ao eixo x:

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\Delta x]\,\tfrac{1}{2} f(\bar{x}_i) = \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x$$

Novamente somamos esses momentos e tomamos o limite para obter o momento de $\mathcal{R}$ em relação ao eixo x:

$$\boxed{M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x = \rho \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}$$

Como no caso do sistema de partículas, o centro de massa da placa é definido de maneira que $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$. Mas a massa da placa é o produto de sua densidade por sua área:

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x)\, dx$$

e assim,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x f(x)\, dx}{\rho \int_a^b f(x)\, dx} = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\, dx}{\rho \int_a^b f(x)\, dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}$$

Observe o cancelamento dos ρ's. A posição do centro de massa independe da densidade.

Em resumo, o centro de massa da placa (ou o centroide de $\mathcal{R}$) está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

8
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x f(x)\, dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\, dx$$

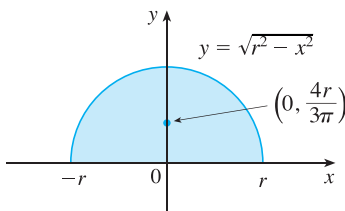



FIGURA 11

EXEMPLO 4 Calcule o centro de massa de uma placa semicircular de raio r.

SOLUÇÃO Para usarmos (8), colocamos o semicírculo como na Figura 11, de modo que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ e $a = -r$, $b = r$. Aqui não há a necessidade de usar a fórmula para calcular $\bar{x}$ porque, pelo princípio da simetria, o centro de massa deve estar sobre o eixo y, e, dessa forma, $\bar{x} = 0$. A área do semicírculo é $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, e assim

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}[f(x)]^2\, dx$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{2}\pi r^2} \cdot \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{\pi r^2}\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= \frac{2}{\pi r^2}\,\frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}$$

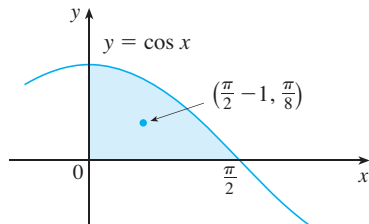
O centro de massa está localizado no ponto $(0, 4r/(3\pi))$. □

EXEMPLO 5 Encontre o centroide da região limitada pelas curvas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi/2$.

SOLUÇÃO A área da região é

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

assim, a Fórmula 8 dá

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} x f(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$$

$$= x \operatorname{sen} x \Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx \qquad \text{(pela integração por partes)}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2 \, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

$$= \tfrac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) \, dx = \tfrac{1}{4} \Big[x + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

FIGURA 12

O centroide é $\left(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{8}\pi\right)$ e está mostrado na Figura 12. □

Se a região $\mathcal{R}$ está entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geqslant g(x)$, como mostrado na Figura 13 , então o mesmo tipo de argumento que nos levou à Fórmula 8 pode ser usado para mostrar que o centroide $\mathcal{R}$ é $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

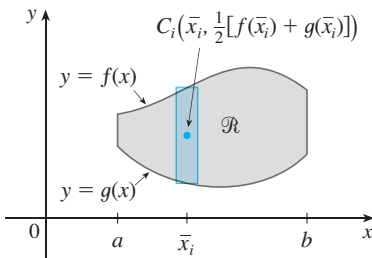



FIGURA 13

9

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x \, [f(x) - g(x)] \, dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$$

(Veja o Exercício 47.)

EXEMPLO 6 Encontre o centroide da região limitada pela reta $y = x$ e pela parábola $y = x^2$.

SOLUÇÃO A região está esboçada na Figura 14. Tomamos $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $a = 0$ e $b = 1$ na Fórmula 9. Primeiro observamos que a área da região é

$$A = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

FIGURA 14

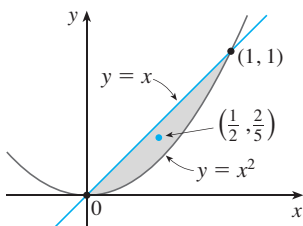
Portanto,

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^1 x[f(x) - g(x)] \, dx = \frac{1}{\frac{1}{6}} \int_0^1 x(x - x^2) \, dx$$

$$= 6 \int_0^1 (x^2 - x^3) \, dx = 6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^1 \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} \, dx = \frac{1}{\frac{1}{6}} \int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4) \, dx$$

$$= 3 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

O centroide é $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$. □

Terminaremos esta seção mostrando uma conexão surpreendente entre centroides e volumes de revolução.

■ Esse teorema tem o nome do matemático grego Pappus de Alexandria, que viveu no século IV a. C.

TEOREMA DE PAPPUS Seja $\mathcal{R}$ uma região plana que está inteiramente de um lado de uma reta l em um plano. Se $\mathcal{R}$ é girada em torno de l, então o volume do sólido resultante é o produto da área A de $\mathcal{R}$ pela distância d percorrida pelo centroide de $\mathcal{R}$.

DEMONSTRAÇÃO Demonstraremos o caso especial no qual a região está entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ como na Figura 13 e a reta l é o eixo y. Usando o método das cascas cilíndricas (veja a Seção 6.3) temos

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= 2\pi(\bar{x}A) \qquad \text{(pela Fórmula 9)} \\ &= (2\pi\bar{x})A = Ad \end{aligned}$$

onde $d = 2\pi\bar{x}$ é a distância percorrida pelo centroide durante uma rotação em torno do eixo y.

EXEMPLO 7 Um toro é formado pela rotação de um círculo de raio r em torno de uma reta no plano do círculo que está a uma distância R ($> r$) do centro do círculo. Calcule o volume do toro.

SOLUÇÃO O círculo tem a área $A = \pi r^2$. Pelo princípio de simetria, seu centroide é seu centro e, assim, a distância percorrida pelo centroide durante a rotação é $d = 2\pi R$. Portanto, pelo Teorema de Pappus, o volume do toro é

$$V = Ad = (2\pi R)(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R \qquad \square$$

O método do Exemplo 7 deve ser comparado com o do Exercício 63 na Seção 6.2.

8.3 EXERCÍCIOS

1. Um aquário de 5 pés de comprimento, 2 pés de largura e 3 pés de profundidade está cheio de água. Descubra (a) a pressão hidrostática no fundo do aquário, (b) a força hidrostática no fundo e (c) a força hidrostática em uma extremidade do aquário.

2. Um tanque tem 8 m de comprimento, 4 m de largura, 2 m de altura e contém querosene com densidade 820 kg/m^3 até uma profundidade de 1,5 m. Descubra (a) a pressão hidrostática no fundo do tanque, (b) a força hidrostática no fundo e (c) a força hidrostática em uma extremidade do tanque.

3–11 Uma placa vertical é imersa (ou parcialmente imersa) na água e tem a forma indicada nas figuras a seguir. Explique como aproximar a força hidrostática em um lado da placa usando uma soma de Riemann. Então expresse a força como uma integral e calcule-a.

3.

4.

5.

6.

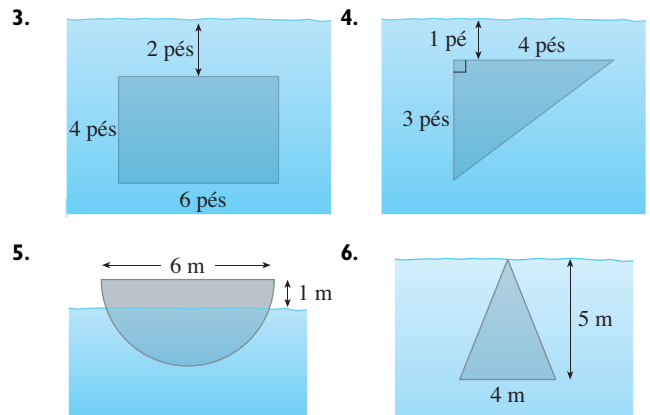
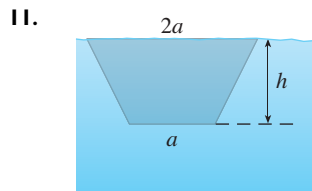
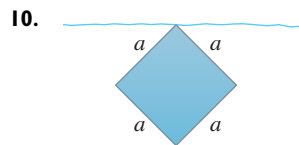
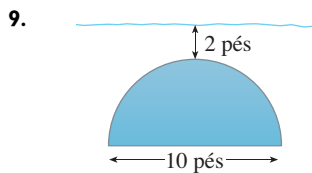
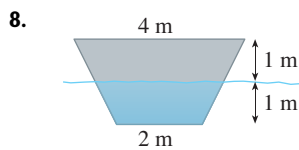
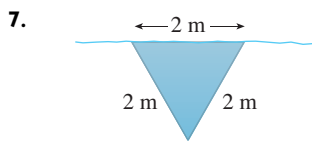
7.

8.

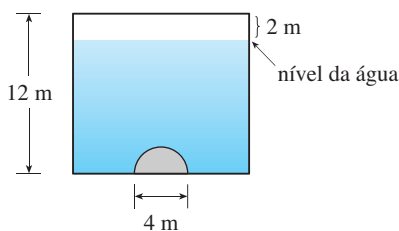
4 m
1 m
1 m
2 m

9.

10.

11.

12. Um tanque grande é projetado com as extremidades no formato da região entre as curvas $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = 12$, medidas em pés. Calcule a força hidrostática em uma extremidade do tanque se ele estiver cheio até uma profundidade de 8 pés com gasolina. (Suponha que a densidade da gasolina seja 42,0 lb/pé^3.)

13. Uma vala é preenchida com um líquido de densidade 840 kg/m^3. As extremidades da vala são triângulos equiláteros com lados de 8 m de comprimento e o vértice no fundo. Calcule a força hidrostática em uma extremidade da vala.

14. Uma barragem vertical tem um portão semicircular, como mostrado na figura. Calcule a força hidrostática contra o portão.

15. Um cubo com lados de 20 cm de comprimento está no fundo de um aquário no qual a água atinge 1m de profundidade. Calcule a força hidrostática (a) no topo do cubo e (b) em um dos lados do cubo.

16. Uma barragem está inclinada a um ângulo de 30º da vertical e tem o formato de um trapézio isósceles de 100 pés de largura no topo e 50 pés no fundo e um lado inclinado de 70 pés. Calcule a força hidrostática na barragem quando ela estiver cheia de água.

17. Uma piscina tem 10 m de largura, 20 m de comprimento e seu fundo é um plano inclinado. O extremo mais raso tem uma profundidade de 1 m e o extremo mais fundo, 3 m. Se a piscina estiver cheia de água, calcule a força hidrostática (a) na extremidade mais rasa, (b) na extremidade mais funda, (c) em um dos lados e (d) no fundo da piscina.

18. Suponha que uma placa esteja imersa verticalmente em um fluido com densidade ρ e que a largura da placa seja $w(x)$ a uma profundidade de x metros abaixo do nível da superfície do fluido. Se o topo da placa está a uma profundidade a e o fundo, a uma profundidade b, mostre que a força hidrostática sobre um lado da placa é

$$F = \int_a^b \rho g x w(x)\, dx$$

19. Uma placa vertical com forma irregular é imersa na água. A tabela mostra as medidas de suas larguras de acordo com a profundidade. Use a Regra de Simpson para estimar a força da água contra a placa.

Profundidade (m)	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
Largura da placa (m)	0	0,8	1,7	2,4	2,9	3,3	3,6

20. (a) Use a fórmula do Exercício 18 para mostrar que

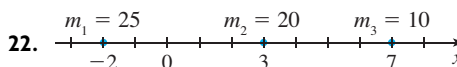
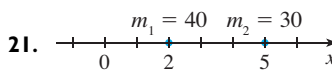
$$F = (\rho g \bar{x})A$$

em que $\bar{x}$ é a coordenada x do centroide da placa e A é sua área. Essa equação mostra que a força hidrostática contra uma região plana vertical seria a mesma se a região fosse horizontal e estivesse na mesma profundidade do centroide da região.

(b) Use o resultado da parte (a) para dar outra solução para o Exercício 10.

21–22 As massas pontuais m_i estão localizadas no eixo x conforme mostra a figura a seguir. Ache o momento M do sistema com relação à origem e o centro de massa $\bar{x}$.

21. $m_1 = 40$ $m_2 = 30$; 0, 2, 5, x

22. $m_1 = 25$ $m_2 = 20$ $m_3 = 10$; -2, 0, 3, 7, x

23–24 As massas m_i estão localizadas nos pontos P_i. Ache os momentos M_x e M_y e o centro de massa do sistema.

23. $m_1 = 6, m_2 = 5, m_3 = 10;$
$P_1(1, 5), P_2(3, -2), P_3(-2, -1)$

24. $m_1 = 6, m_2 = 5, m_3 = 1, m_4 = 4;$
$P_1(1, -2), P_2(3, 4), P_3(-3, -7), P_4(6, -1)$

25–28 Esboce a região delimitada pelas curvas, e visualmente estime a localização do centroide. A seguir, calcule as coordenadas exatas do centroide.

25. $y = 4 - x^2, \quad y = 0$

26. $3x + 2y = 6, \quad y = 0, \quad x = 0$

27. $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

28. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

29–33 Ache o centroide da região limitada pelas curvas.

29. $y = \sqrt{x}, \quad y = x$

30. $y = x + 2, \quad y = x^2$

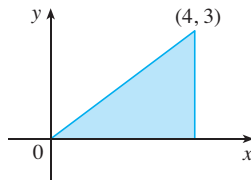
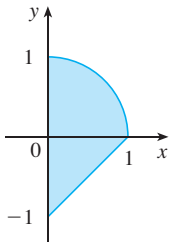
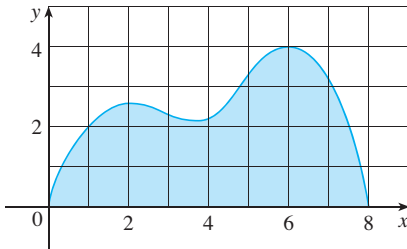
31. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \quad x = \pi/4$

32. $y = x^3, \quad x + y = 2, \quad y = 0$

33. $x = 5 - y^2, \quad x = 0$

34–35 Calcule os momentos M_x e M_y e o centro de massa de uma lâmina com a densidade e o formato dados:

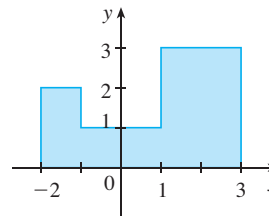
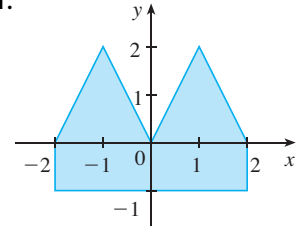
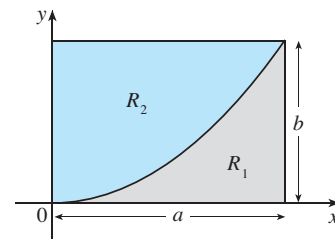
34. $\rho = 3$

35. $\rho = 10$

36. Utilize a de Regra Simpson para calcular o centroide da região dada.

37. Calcule o centroide da região limitada pelas curvas $y = 2^x$ e $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, com precisão de três casas decimais. Esboce a região e marque o centroide para ver se sua resposta é razoável.

38. Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas no eixo x dos pontos de intersecção das curvas $y = x + \ln x$ e $y = x^3 - x$. Então, encontre (aproximadamente) o centroide da região limitada por essas curvas.

39. Demonstre que o centroide de qualquer triângulo está localizado no ponto de intersecção das medianas. [*Sugestão*: Coloque os eixos de maneira que os vértices sejam $(a, 0)$, $(0, b)$ e $(c, 0)$. Lembre-se de que uma mediana é um segmento de reta ligando um vértice ao ponto médio do lado oposto. Lembre-se também de que as medianas se interceptam em um ponto a dois terços da distância de cada vértice (ao longo da mediana) ao lado oposto.]

40–41 Encontre o centroide da região mostrada, não por integração, mas por localização dos centroides dos retângulos e triângulos (do Exercício 39) e usando a aditividade dos momentos.

40.

41.

42. Um retângulo R com lados a e b foi dividido em duas partes R_1 e R_2 por um arco de parábola que tem seu vértice em um dos cantos de R e passa pelo canto oposto. Encontre os centroides de ambas as regiões R_1 e R_2.

43. Se $\bar{x}$ for a coordenada x do centroide da região que fica sob o gráfico de uma função contínua f, onde $a \leqslant x \leqslant b$, mostre que

$$\int_a^b (cx + d) f(x) dx = (c\bar{x} + d) \int_a^b f(x)\, dx$$

44–46 Use o Teorema de Pappus para encontrar o volume do sólido dado.

44. Uma esfera de raio r (use o Exemplo 4).

45. Um cone com altura h e raio da base r.

46. O sólido obtido pela rotação do triângulo com vértices $(2, 3)$, $(2, 5)$ e $(5, 4)$ ao redor do eixo x.

47. Demonstre a Fórmula 9.

48. Seja $\mathcal{R}$ a região que está entre as curvas $y = x^m$ e $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, onde m e n são inteiros com $0 \leqslant n < m$.

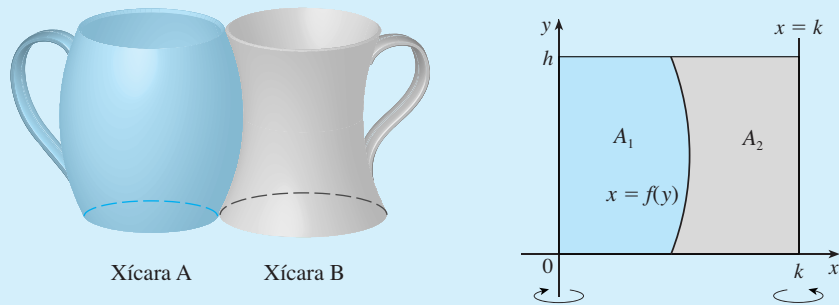
(a) Esboce a região $\mathcal{R}$.

(b) Encontre as coordenadas do centroide de $\mathcal{R}$.

(c) Tente encontrar valores de m e n tais que o centroide esteja *fora* de $\mathcal{R}$.

PROJETO DE DESCOBERTA

XÍCARAS DE CAFÉ COMPLEMENTARES

Suponha que você possa escolher entre duas xícaras de café do tipo mostrado, uma que se curva para fora e outra para dentro. Observe que elas têm a mesma altura e suas formas se encaixam perfeitamente, você se pergunta em qual xícara cabe mais café. É claro que você poderia encher uma xícara com água e derramá-la dentro da outra, mas, sendo um estudante de cálculo, você se decide por uma abordagem mais matemática. Ignorando as asas, você observa que ambas as xícaras são superfícies de revolução, se modo que você pode pensar no café como um volume de revolução.

1. Suponha que as xícaras tenham altura h, que a xícara A seja formada girando a curva $x = f(y)$ em torno do eixo y e que a xícara B seja formada girando a mesma curva em torno da reta $x = k$. Encontre o valor de k tal que caiba a mesma quantidade de café nas duas xícaras.
2. O que o seu resultado do Problema 1 diz sobre as áreas A_1 e A_2 mostradas na figura?
3. Use o Teorema de Pappus para explicar seus resultados nos Problemas 1 e 2.
4. Com base em suas próprias medidas e observações, sugira um valor para h e uma equação para $x = f(y)$ e calcule a quantidade de café que cabe em cada xícara.

8.4 APLICAÇÕES À ECONOMIA E À BIOLOGIA

Nesta seção consideraremos algumas aplicações de integração à economia (excedente do consumidor) e à biologia (circulação sanguínea, capacidade cardíaca). Outras são descritas nos exercícios.

EXCEDENTE DO CONSUMIDOR

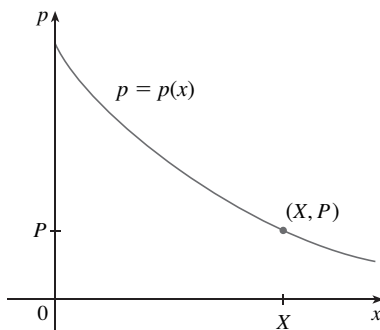



FIGURA 1
Curva típica de demanda

Lembre-se, a partir da Seção 4.7, que a função demanda $p(x)$ é o preço que uma companhia deve cobrar para conseguir vender x unidades de um produto. Geralmente, para vender maiores quantidades, é necessário baixar os preços; assim, a função demanda é uma função decrescente. O gráfico de uma típica função demanda, chamado **curva de demanda**, é mostrado na Figura 1. Se X é a quantidade disponível do produto, então $P = p(X)$ é o preço de venda corrente.

Dividimos o intervalo $[0, X]$ em n subintervalos, cada qual com o comprimento $\Delta x = X/n$, e tomamos $x_i^* = x_i$, a extremidade direita do i-ésimo subintervalo, como na Figura 2. Se após as primeiras x_{i-1} unidades terem sido vendidas, um total de apenas x_i unidades estiver disponível e o preço unitário for marcado a $p(x_i)$ dólares, então as Δx unidades adicionais poderiam ter sido vendidas (mas não mais). Os consumidores que te-

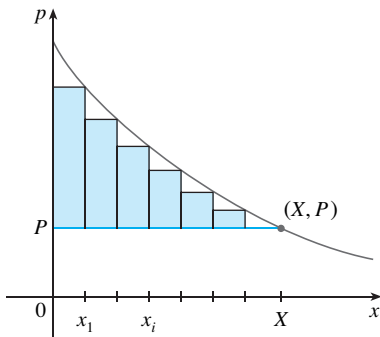



FIGURA 2

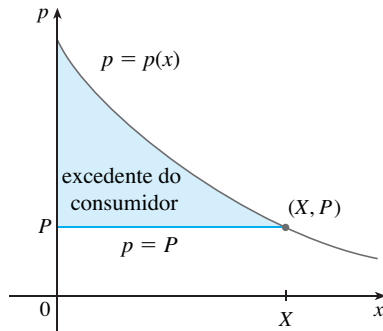



FIGURA 3

riam pago $p(x_i)$ dólares colocaram um alto valor no produto; eles teriam pago o que ele vale para eles. Assim, pagando apenas P dólares, economizariam uma quantia de

$$\text{(economia por unidade)(número de unidades)} = [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

Considerando os grupos semelhantes de possíveis consumidores para cada um dos subintervalos e adicionando as economias, temos o total de economia:

$$\sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

(Essa soma corresponde à área dos retângulos na Figura 2.) Se fizermos $n \to \infty$, então essa soma de Riemann aproxima a integral

$$\boxed{1} \qquad \int_0^X [p(x) - P]\,dx$$

que os economistas chamam **excedente do consumidor** para o produto.

O excedente do consumidor representa a quantidade de dinheiro que os consumidores economizam ao comprar um produto pelo preço P, correspondente a uma quantidade demandada de X. A Figura 3 mostra a interpretação do excedente do consumidor como a área sob a curva de demanda e acima da reta $p = P$.

EXEMPLO 1 A demanda por um produto é

$$p = 1\,200 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2$$

Calcule o excedente do consumidor quando o nível de vendas for 500.

SOLUÇÃO Como o número de produtos vendidos é $X = 500$, o preço correspondente é

$$p = 1\,200 - (0{,}2)(500) - (0{,}0001)(500)^2 = 1\,075$$

Portanto, da Definição 1, o excedente do consumidor é

$$\begin{aligned}
\int_0^{500} [p(x) - P]\,dx &= \int_0^{500} (1\,200 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2 - 1\,075)\,dx \\
&= \int_0^{500} (125 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2)\,dx \\
&= 125x - 0{,}1x^2 - (0{,}0001)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^{500} \\
&= (125)(500) - (0{,}1)(500)^2 - \frac{(0{,}0001)(500)^3}{3} \\
&= \$33\,333{,}33
\end{aligned}$$

□

CIRCULAÇÃO SANGUÍNEA

No Exemplo 7, na Seção 3.7, discutimos a lei do fluxo laminar:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

que dá a velocidade v do sangue que circula em um vaso sanguíneo com raio R e comprimento l a uma distância r do eixo central, em que P é a diferença de pressão entre as extremidades do vaso sanguíneo e η, a viscosidade do sangue. Agora, para calcular a taxa da

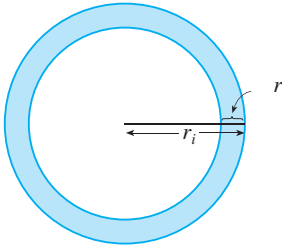



FIGURA 4

FIGURA 5

circulação sanguínea, ou *fluxo* (volume por unidade de tempo), consideramos raios menores igualmente espaçados $r_1, r_2, \ldots$. A área aproximada do anel com o raio interno r_{i-1} e o raio externo r_i é

$$2\pi r_i \, \Delta r \qquad \text{onde} \qquad \Delta r = r_i - r_{i-1}$$

(Veja a Figura 4.) Se Δr é pequeno, então a velocidade é praticamente constante no anel e pode ser aproximada por $v(r_i)$. Então, o volume de sangue por unidade de tempo que escoa pelo anel é aproximadamente

$$(2\pi r_i \, \Delta r)v(r_i) = 2\pi r_i v(r_i) \, \Delta r$$

e o volume total de sangue que escoa por uma secção transversal por unidade de tempo é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i v(r_i) \, \Delta r$$

Essa aproximação está ilustrada na Figura 5. Observe que a velocidade (e portanto o volume por unidade de tempo) aumenta em direção ao centro do vaso sanguíneo. A aproximação torna-se melhor quando n aumenta. Quando tomamos o limite, obtemos o valor exato do **fluxo** (ou *descarga*), que é o volume de sangue que passa pela secção transversal por unidade de tempo:

$$\begin{aligned}
F &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i v(r_i) \, \Delta r = \int_0^R 2\pi r v(r) \, dr \\
&= \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) \, dr \\
&= \frac{\pi P}{2\eta l} \int_0^R (R^2 r - r^3) \, dr = \frac{\pi P}{2\eta l} \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=R} \\
&= \frac{\pi P}{2\eta l} \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right] = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}
\end{aligned}$$

A equação resultante

$$F = \frac{\pi P R^4}{8\eta l} \tag{2}$$

denominada **Lei de Poiseuille**, mostra que o fluxo é proporcional à quarta potência do raio do vaso sanguíneo.

CAPACIDADE CARDÍACA

A Figura 6 mostra o sistema cardiovascular humano. O sangue retorna do corpo pelas das veias, entra no átrio direito do coração e é bombeado para os pulmões pelas artérias pulmonares para a oxigenação. Então volta para o átrio esquerdo por meio das veias pulmonares e daí circula para o resto do corpo pela aorta. A **capacidade cardíaca** do coração é o volume de sangue bombeado pelo coração por unidade de tempo, isto é, a taxa de fluxo na aorta.

O *método da diluição do contraste* é usado para medir a capacidade cardíaca. O contraste (corante) é injetado no átrio direito e escoa pelo coração para a aorta. Uma sonda in-

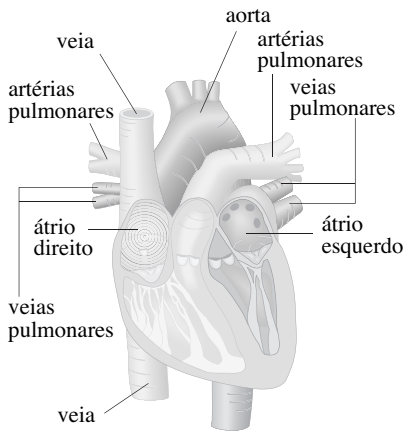



FIGURA 6

serida na aorta mede a concentração do contraste saindo do coração a intervalos regulares de tempo durante um intervalo $[0,T]$, até que o contraste tenha terminado. Seja $c(t)$ a concentração do contraste no instante t. Se dividirmos $[0,T]$ em subintervalos de igual comprimento Δt, então a quantidade de contraste que circula pelo ponto de medição durante o subintervalo de $t = t_{i-1}$ a $t = t_i$ é aproximadamente

$$(\text{concentração})(\text{volume}) = c(t_i)(F\,\Delta t)$$

em que F é a vazão (taxa de escoamento) que estamos tentando determinar. Então, a quantidade total de contraste é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} c(t_i)F\,\Delta t = F\sum_{i=1}^{n} c(t_i)\,\Delta t$$

e fazendo $n \to \infty$, calculamos que a quantidade total de contraste é

$$A = F\int_0^T c(t)\,dt$$

Então, a capacidade cardíaca é dada por

$$\boxed{3} \qquad F = \frac{A}{\int_0^T c(t)\,dt}$$

na qual a quantidade de contraste A é conhecida e a integral pode ser aproximada pelas leituras de concentração.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	6	6,1
1	0,4	7	4,0
2	2,8	8	2,3
3	6,5	9	1,1
4	9,8	10	0
5	8,9		

EXEMPLO 2 Uma quantidade de 5 mg de contraste é injetada no átrio direito. A concentração de contraste (em miligramas por litro) é medida na aorta a intervalos de 1 segundo, como mostrado na tabela. Estime a capacidade cardíaca.

SOLUÇÃO Aqui $A = 5$, $\Delta t = 1$ e $T = 10$. Usamos a Regra de Simpson para aproximar a integral da concentração:

$$\int_0^{10} c(t)\,dt \approx \tfrac{1}{3}[0 + 4(0,4) + 2(2,8) + 4(6,5) + 2(9,8) + 4(8,9) + 2(6,1) + 4(4,0) + 2(2,3) + 4(1,1) + 0]$$

$$\approx 41,87$$

Então, a Fórmula 3 dá a capacidade cardíaca como

$$F = \frac{A}{\int_0^{10} c(t)\,dt} \approx \frac{5}{41,87} \approx 0,12 \text{ L/s} = 7,2 \text{ L/min}$$

□

8.4 EXERCÍCIOS

1. A função custo marginal $C'(x)$ foi definida como a derivada da função custo. (Veja as Seções 3.7 e 4.7.) Se o custo marginal para produzir x metros de um tecido é $C'(x) = 5 - 0,008x + 0,000009x^2$ (medido em dólares por metro) e o custo fixo é $C(0) = \$\ 20\,000$, use o Teorema da Variação Total para achar o custo de produzir as primeiras 2 mil unidades.

2. A receita marginal da venda de x unidades de um produto é $12 - 0,0004x$. Se a receita da venda das primeiras mil unidades é \$ 12 400, ache a receita de venda das primeiras 5 mil unidades.

3. O custo marginal de produção de x unidades de um determinado produto é $74 + 1,1x - 0,002x^2 + 0,00004x^3$ (em dólares por unidade). Encontre o aumento no custo da produção se o nível é aumentado de 1 200 para 1 600 unidades.

4. A função demanda para um certo produto é $p = 20 - 0{,}05x$. Calcule o excedente do consumidor quando o nível de venda é 300. Ilustre desenhando a curva de demanda e identificando o excedente do consumidor como uma área.

5. A curva de demanda é dada por $p = 450/(x + 8)$. Calcule o excedente do consumidor quando o preço de venda for $ 10.

6. A **função oferta** $p_S(x)$ para um produto dá a relação entre o preço de venda e o número de unidades que os fabricantes produzirão naquele preço. Por um preço maior, os fabricantes produzirão mais unidades, de modo que p_S é uma função crescente de x. Seja X a quantidade de produto que é produzida atualmente e seja $P = p_S(X)$ o preço atual. Alguns fabricantes desejariam fazer e vender o produto a um preço mais baixo e, portanto, estão recebendo mais que seu preço mínimo. O excesso é chamado **excedente do produtor**. Um argumento semelhante ao do excedente do consumidor mostra que o excedente é dado pela integral

$$\int_0^X [P - p_S(x)]\, dx$$

Calcule o excedente do produtor para a função oferta $p_S(x) = 3 + 0{,}01x^2$ ao nível de vendas $X = 10$. Ilustre desenhando a curva de oferta e identificando o excedente do produtor como uma área.

7. Se a curva de oferta é representada pela equação $p = 200 + 0{,}2x^{3/2}$, calcule o excedente do produtor se o preço de venda for de $ 400.

8. Para um dado produto, o número de unidades produzidas e o preço por unidade é determinado pelas coordenadas do ponto de intersecção das curvas de oferta e de demanda. Dadas as curvas de demanda $p = 50 - \frac{1}{20}x$ e oferta $p = 20 + \frac{1}{10}x$, calcule os excedentes do consumidor e do produtor. Ilustre esboçando o gráfico das curvas de oferta e de demanda e identificando as áreas dos excedentes.

9. Uma companhia modelou a curva de demanda para seu produto com

$$p = \frac{800\,000e^{-x/5\,000}}{x + 20\,000}$$

Use um gráfico para estimar o nível de venda quando o preço de venda é $ 16. Então, calcule (aproximadamente) o excedente do consumidor para esse nível de venda.

10. Um cinema cobra $ 7,50 por pessoa e está vendendo aproximadamente 400 ingressos em uma noite típica de semana. Depois de pesquisar seus clientes, o cinema estima que, para cada 50 centavos de desconto, o número de frequentadores aumenta 35 por noite. Calcule a função demanda e o excedente do consumidor quando as entradas são vendidas a $ 6,00.

11. Se a quantidade de capital que uma companhia tem em um instante t é $f(t)$, então a derivada, $f'(t)$, é chamada *fluxo líquido de investimento*. Suponha que o fluxo líquido de investimento seja $\sqrt{t}$ milhões de dólares por ano (com t medido em anos). Calcule o aumento no capital (a *formação de capital*) do quarto ao oitavo anos.

12. Se a receita entra em uma companhia a uma taxa de $f(t) = 9\,000\sqrt{1 + 2t}$, em que t está medido em anos e $f(t)$ está medido em dólares por ano, encontre a receita total obtida nos primeiros quatro anos.

13. A *Lei da Renda de Pareto* afirma que o número de pessoas com renda entre $x = a$ e $x = b$ é $N = \int_a^b Ax^{-k}\, dx$, em que A e k são constantes, com $A > 0$ e $k > 1$. A renda média destas pessoas é

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\int_a^b Ax^{1-k}\, dx$$

Calcule $\bar{x}$.

14. Um verão quente e úmido está causando uma explosão da população de mosquitos em uma cidade turística. O número de mosquitos aumenta a uma taxa estimada de $2\,200 + 10e^{0{,}8t}$ por semana (com t medido em semanas). Em quanto aumenta a população de mosquitos entre a quinta e a nona semanas do verão?

15. Use a Lei de Poiseuille para calcular a vazão em uma pequena artéria humana, tomando $\eta = 0{,}027$, $R = 0{,}008$ cm, $l = 2$ cm e $P = 4\,000$ dinas/cm^2.

16. A pressão alta resulta da constrição das artérias. Para manter uma taxa normal de circulação (fluxo), o coração tem de bombear mais forte, aumentando assim a pressão sanguínea. Use a Lei de Poiseuille para mostrar que se R_0 e P_0 são valores normais para o raio e a pressão em uma artéria, e R e P, os valores para a artéria constrita, então, para o fluxo permanecer constante, P e R estão relacionados pela equação

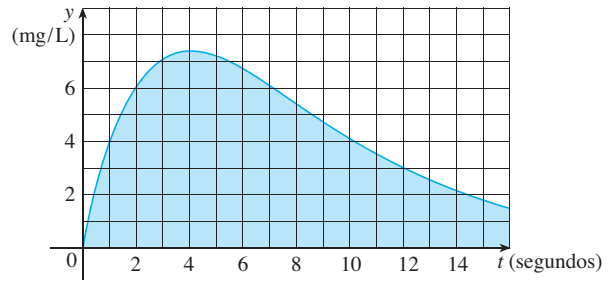
$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$$

Deduza que se o raio de uma artéria é reduzido para três quartos de seu valor normal, então a pressão é mais que triplicada.

17. O método da diluição do contraste é usado para medir a capacidade cardíaca com 6 mg de contraste. As concentrações de contraste, em mg/L, são modeladas por $c(t) = 20te^{-0{,}6t}$, $0 \leq t \leq 10$, na qual t é medido em segundos. Calcule a capacidade cardíaca.

18. Depois de uma injeção de 8 mg de contraste, as leituras de concentração do contraste, in mg/L, a intervalos de dois segundos, são mostradas na tabela. Use a Regra de Simpson para estimar a capacidade cardíaca.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	12	3,9
2	2,4	14	2,3
4	5,1	16	1,6
6	7,8	18	0,7
8	7,6	20	0
10	5,4		

19. É mostrado o gráfico da concentração $c(t)$ depois da injeção de 7 mg de contraste em um coração. Use a Regra de Simpson para estimar a capacidade cardíaca.

8.5 PROBABILIDADE

O cálculo tem um papel na análise de comportamento aleatório. Suponha que consideremos o nível de colesterol de uma pessoa escolhida aleatoriamente em um grupo de determinada idade, ou a altura de uma mulher adulta escolhida aleatoriamente, ou ainda a durabilidade de uma pilha de um certo tipo escolhida aleatoriamente. Essas quantidades são chamadas **variáveis aleatórias contínuas**, porque seus valores variam em um intervalo de números reais, embora possam ser medidos ou registrados apenas com o inteiro mais próximo. Poderíamos querer saber a probabilidade de o nível de colesterol do sangue ser maior que 250, ou a probabilidade de a altura de uma mulher adulta estar entre 60 e 70 polegadas, ou a probabilidade de uma pilha nova durar entre 100 e 200 horas. Se X representar a durabilidade daquele tipo de bateria, denotamos essa última probabilidade como segue:

$$P(100 \leqslant X \leqslant 200)$$

De acordo com a interpretação de frequência da probabilidade, esse número é a proporção, a longo prazo, de todas as pilhas do tipo especificado com durabilidade entre 100 e 200 horas. Como isso representa uma proporção, a probabilidade naturalmente está entre 0 e 1.

Cada variável aleatória contínua X tem uma **função densidade de probabilidade** f. Isso significa que a probabilidade de X estar entre a e b é encontrada pela integração de f de a até b:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

Por exemplo, a Figura 1 mostra o gráfico de um modelo da função densidade de probabilidade f para uma variável aleatória X definida como a altura em polegadas de uma mulher norte-americana adulta (de acordo com dados do National Health Survey). A probabilidade de a altura da mulher escolhida aleatoriamente estar entre 60 e 70 polegadas é igual à área sob o gráfico de f de 60 a 70.

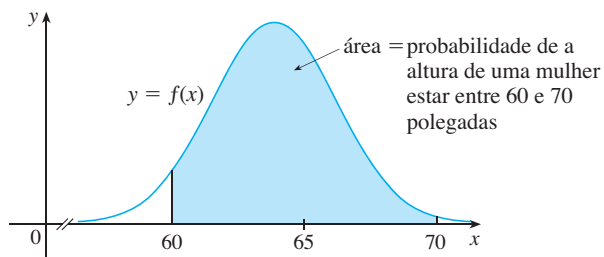



FIGURA 1
Função densidade de probabilidade para a altura de uma mulher adulta

Em geral, a função densidade de probabilidade f de uma variável aleatória X satisfaz $f(x) \geqslant 0$ para todo x. Como as probabilidades são medidas em uma escala de 0 até 1, segue que

2 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

EXEMPLO 1 Seja $f(x) = 0{,}006x(10 - x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 10$ e $f(x) = 0$ para outros valores de x.
(a) Verifique que f é uma função densidade de probabilidade.
(b) Calcule $P(4 \leqslant X \leqslant 8)$.

SOLUÇÃO
(a) Para $0 \leqslant x \leqslant 10$ temos $0{,}006x(10 - x) \geqslant 0$, assim, $f(x) \geqslant 0$ para todo x. Precisamos verificar também se a Equação 2 é satisfeita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} 0{,}006x(10 - x)\,dx = 0{,}006 \int_{0}^{10} (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0{,}006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{10} = 0{,}006\left(500 - \tfrac{1\,000}{3}\right) = 1$$

Portanto, f é uma função densidade de probabilidade.
(b) A probabilidade de que X esteja entre 4 e 8 é

$$P(4 \leqslant X \leqslant 8) = \int_4^8 f(x)\,dx = 0{,}006 \int_4^8 (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0{,}006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_4^8 = 0{,}544$$ □

EXEMPLO 2 Fenômenos como tempo de espera ou tempo de falha de um equipamento são comumente modelados por funções densidade de probabilidade exponencialmente decrescentes. Ache a forma exata de uma função desse tipo.

SOLUÇÃO Pense em uma variável aleatória como o tempo que você espera na linha antes de ser atendido por um funcionário da companhia para a qual você está ligando. Assim, em vez de x, use t para representar o tempo em minutos. Se f é a função densidade de probabilidade e você telefona no instante $t = 0$, então, pela Definição 1, $\int_0^2 f(t)\,dt$ representa a probabilidade de o funcionário responder dentro dos primeiros dois minutos, e $\int_4^5 f(t)\,dt$ é a probabilidade de sua chamada ser atendida no quinto minuto.

Está claro que $f(t) = 0$ para $t < 0$ (o funcionário não pode atender antes de você fazer a ligação). Para $t > 0$ devemos usar uma função exponencial decrescente, isto é, uma função do tipo $f(t) = Ae^{-ct}$, onde A e c são constantes positivas. Então

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ Ae^{-ct} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Usamos a Equação 2 para determinar o valor de A:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{\infty} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} Ae^{-ct}\,dt = \lim_{x \to \infty} \int_0^x Ae^{-ct}\,dt$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[-\frac{A}{c}e^{-ct}\right]_0^x = \lim_{x \to \infty} \frac{A}{c}(1 - e^{-cx})$$

$$= \frac{A}{c}$$

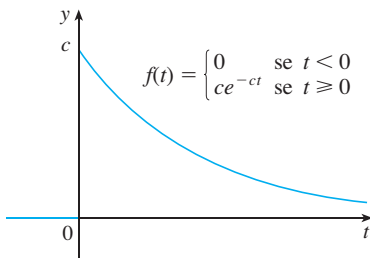



FIGURA 2
Função densidade exponencial

Portanto, $A/c = 1$ e assim $A = c$. Então, toda função densidade exponencial tem a forma

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Um gráfico típico é mostrado na Figura 2. □

VALORES MÉDIOS

Suponha que você esteja esperando que um funcionário da companhia para a qual você ligou atenda sua ligação e que esteja pensando quanto tempo, em média, terá de aguardar. Seja $f(t)$ a correspondente função densidade, na qual t é medido em minutos, e pense em uma amostra de N pessoas que ligaram para essa companhia. Provavelmente nenhuma das pessoas teve de esperar mais que uma hora; assim, vamos restringir nossa atenção ao intervalo $0 \leq t \leq 60$. Vamos dividir o intervalo em n intervalos de comprimento igual a Δt e extremidades $0, t_1, t_2, \ldots t_{60}$. (Pense em Δt com a duração de 1 minuto, 10 segundos ou mesmo 1 segundo.) A probabilidade da ligação de alguém ser atendida durante o período de tempo entre t_{i-1} e t_i é a área sob a curva $y = f(t)$ de t_{i-1} a t_i, que é aproximadamente igual a $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$. (Essa é a área de um retângulo aproximador na Figura 3, onde $\bar{t}_i$ é o ponto médio do intervalo).

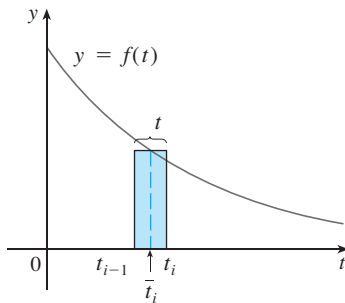



FIGURA 3

Como a proporção de chamadas em um número grande delas que são respondidas em um período de tempo de t_{i-1} a t_i é $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$, esperamos que, em nossa amostra de N pessoas que ligam, o número de chamadas respondidas nesse período de tempo seja aproximadamente $Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t$ e o tempo de cada espera seja cerca de $\bar{t}_i$. Portanto, o tempo total de espera é o produto desses números: aproximadamente $\bar{t}_i[Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t]$. Somando todos os intervalos, temos o tempo total aproximado de espera de todas as pessoas:

$$\sum_{i=1}^{n} N\,\bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Se agora dividirmos pelo número de pessoas que ligam N, obteremos o tempo *médio* de espera aproximado:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Reconhecemos isso como uma soma de Riemann para a função $t\,f(t)$. À medida que o intervalo diminui (isto é, $\Delta t \to 0$ e $n \to \infty$), essa soma de Riemann se aproxima da integral

$$\int_0^{60} t\,f(t)\,dt$$

■ Denotamos a média pela letra grega μ (mu).

Essa integral é chamada *tempo médio de espera*.

Em geral, a **média** de qualquer função densidade de probabilidade f é definida como

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

A média pode ser interpretada como o valor médio após um longo período de observação da variável aleatória X. Também pode ser interpretada como a medida de centralidade da função densidade de probabilidade.

A expressão para a média parece uma integral que vimos anteriormente. Se $\mathcal{R}$ é a região que está sob o gráfico de f, sabemos a partir da Fórmula 8 na Seção 8.3 que a coordenada x do centroide de $\mathcal{R}$ é

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \mu$$

FIGURA 4
$\mathcal{R}$ se equilibra em um ponto da reta $x = \mu$

por causa da Equação 2. Dessa forma, uma placa fina no formato de $\mathcal{R}$ se equilibra em um ponto sobre a reta vertical $x = \mu$. (Veja a Figura 4.)

EXEMPLO 3 Calcule a média da distribuição exponencial do Exemplo 2:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

SOLUÇÃO De acordo com a definição da média, temos

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\, dt = \int_0^{\infty} tce^{-ct}\, dt$$

■ O limite do primeiro termo é 0, pela Regra de L'Hôspital.

Para calcular essa integral usamos a integração por partes, com $u = t$ e $dv = ce^{-ct}\, dt$:

$$\int_0^{\infty} tce^{-ct}\, dt = \lim_{x \to \infty} \int_0^x tce^{-ct}\, dt = \lim_{x \to \infty} \left(-tce^{-ct}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-ct}\, dt \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(-xe^{-cx} + \frac{1}{c} - \frac{e^{-cx}}{c} \right) = \frac{1}{c}$$

A média é $\mu = 1/c$ e, assim, podemos reescrever a função densidade de probabilidade como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \mu^{-1} e^{-t/\mu} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

□

EXEMPLO 4 Suponha que o tempo médio de espera para um cliente ser atendido pelo funcionário da firma para a qual ele está ligando seja 5 minutos.
(a) Calcule a probabilidade de a ligação ser atendida no primeiro minuto.
(b) Calcule a probabilidade do consumidor esperar mais que cinco minutos para ser atendido.

SOLUÇÃO

(a) Foi-nos dado que a média da distribuição exponencial é $\mu = 5$ min, e assim, pelo resultado do Exemplo 3, sabemos que a função densidade de probabilidade é

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 0{,}2e^{-t/5} & \text{se } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Então a probabilidade de a ligação ser atendida no primeiro minuto é

$$P(0 \leqslant T \leqslant 1) = \int_0^1 f(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 0{,}2e^{-t/5}\, dt = 0{,}2(-5)e^{-t/5}\Big]_0^1$$

$$= 1 - e^{-1/5} \approx 0{,}1813$$

Assim, cerca de 18% das ligações dos clientes são atendidas durante o primeiro minuto.
(b) A probabilidade de o consumidor esperar mais que cinco minutos é

$$P(T > 5) = \int_5^{\infty} f(t)\, dt = \int_5^{\infty} 0{,}2e^{-t/5}\, dt$$

$$= \lim_{x \to \infty} \int_5^x 0{,}2e^{-t/5}\, dt = \lim_{x \to \infty} (e^{-1} - e^{-x/5})$$

$$= \frac{1}{e} \approx 0{,}368$$

Cerca de 37% dos consumidores esperam mais que cinco minutos antes de terem sua ligação atendida. □

Observe o resultado do Exemplo 4(b): embora o tempo médio de espera seja 5 minutos, apenas 37% dos consumidores esperam mais que 5 minutos. A razão disso é que alguns clientes têm de esperar muito mais (talvez 10 ou 15 minutos), aumentando a média.

Outra medida de centralidade da função densidade de probabilidade é a *mediana*. Esse é um número m tal que metade das chamadas tem um tempo de espera menor que m, e as outras chamadas têm um tempo de espera maior que m. Em geral, a *mediana* de uma função densidade de probabilidade é o número m, tal que

$$\int_m^\infty f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}$$

Isso significa que metade da área sob o gráfico de f está à direita de m. No Exercício 9 pedimos que você mostre que a mediana do tempo de espera para a companhia descrita no Exemplo 4 é de aproximadamente 3,5 minutos.

DISTRIBUIÇÕES NORMAIS

Muitos fenômenos aleatórios importantes — tais como os resultados de testes de aptidão, alturas e pesos de indivíduos de uma população homogênea, a precipitação de chuva anual em uma dada localidade — são modelados por uma **distribuição normal**. Isso significa que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X é um membro de uma família de funções

3
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

■ O desvio-padrão é simbolizado pela letra grega minúscula σ (sigma).

Você pode verificar que a média para essa função é μ. A constante positiva σ é denominada **desvio-padrão** e mede a dispersão dos valores de X. Dos gráficos com formato de sino dos membros da família na Figura 5, vemos que para os pequenos valores de σ, os valores de X estão agrupados em torno da média, enquanto para valores maiores de σ, os valores de X estão mais distribuídos. Os estatísticos têm métodos para usar conjuntos de dados para estimar μ e σ.

FIGURA 5
Distribuições normais

O fator $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ é necessário para fazer de f uma função densidade de probabilidade. De fato, isso pode ser verificado usando-se métodos de cálculo de várias variáveis, de forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx = 1$$

EXEMPLO 5 Os resultados do teste de Quociente de Inteligência (QI) têm distribuição normal com média 100 e desvio-padrão 15. (A Figura 6 mostra a função densidade de probabilidade correspondente.)

(a) Qual a porcentagem da população com QI entre 85 e 115?

(b) Qual a porcentagem da população com QI acima de 140?

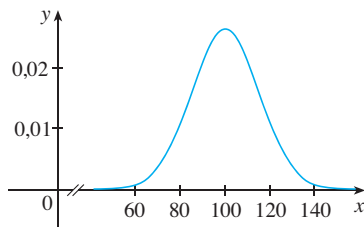



FIGURA 6
Distribuição de resultados de QI

SOLUÇÃO

(a) Como os resultados do QI têm uma distribuição normal, utilizamos a função densidade de probabilidade dada pela Equação 3 com $\mu = 100$ e $\sigma = 15$:

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) = \int_{85}^{115} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/(2\cdot 15^2)}\, dx$$

Lembre-se, a partir da Seção 7.5, que a função $y = e^{-x^2}$ não tem primitiva elementar, de modo que não podemos calcular a integral exatamente. Mas podemos usar os recursos de integração numérica de uma calculadora ou de um computador (ou a Regra do Ponto Médio ou a Regra de Simpson) para estimar sua integral. Fazendo assim, descobrimos que

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) \approx 0{,}68$$

Assim, cerca de 68% da população tem QI entre 85 e 115, isto é, dentro de um desvio-padrão da média.

(b) A probabilidade de o QI de uma pessoa escolhida aleatoriamente ser maior que 140 é

$$P(X > 140) = \int_{140}^{\infty} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/450}\, dx$$

Para evitar a integral imprópria, poderíamos aproximá-la pela integral de 140 a 200. (Podemos afirmar com segurança que é extremamente raro encontrarmos pessoas com QI maior que 200.) Então

$$P(X > 140) \approx \int_{140}^{200} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{-(x-100)^2/450}\, dx \approx 0{,}0038$$

Portanto, cerca de 0,4% da população tem QI acima de 140. □

8.5 EXERCÍCIOS

1. Seja $f(x)$ a função densidade de probabilidade da durabilidade de um pneu de alta qualidade, com x medido em milhas. Explique o significado de cada integral.

(a) $\int_{30\,000}^{40\,000} f(x)\, dx$ (b) $\int_{25\,000}^{\infty} f(x)\, dx$

2. Seja $f(t)$ a função densidade de probabilidade para o tempo que você leva para ir para a escola de manhã, com t medido em minutos. Expresse as seguintes probabilidades como integrais.

(a) A probabilidade de que você chegue na escola em menos de 15 minutos.

(b) A probabilidade de que você demore mais que meia hora para chegar à escola.

3. Seja $f(x) = \frac{3}{64} x\sqrt{16 - x^2}$ para $0 \leqslant x \leqslant 4$ e $f(x) = 0$ para todos os outros valores de x.

(a) Verifique que f é uma função densidade de probabilidade.

(b) Calcule $P(X < 2)$.

4. Seja $f(x) = xe^{-x}$ se $x \geqslant 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$.

(a) Verifique que esta é uma função densidade de probabilidade.

(b) Encontre $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

5. Seja $f(x) = c/(1 + x^2)$.

(a) Para qual valor de c esta é uma função densidade de probabilidade?

(b) Para este valor de c, encontre $P(-1 < X < 1)$.

6. Seja $f(x) = kx^2(1 - x)$ se $0 \leqslant x \leqslant 1$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$ ou $x > 1$.

(a) Para qual valor de k a função f é uma função densidade de probabilidade?

(b) Para este valor de k, calcule $P(X \geqslant \frac{1}{2})$.

(c) Calcule a média.

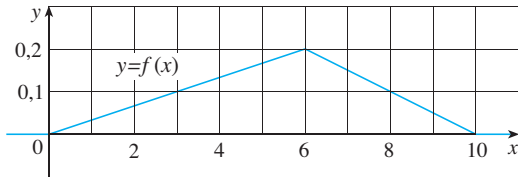
7. A roleta de um jogo de mesa indica aleatoriamente um número real entre 0 e 10. A roleta é honesta, no sentido de que indica um número em um dado intervalo com a mesma probabilidade que indica um número em qualquer outro intervalo de mesmo comprimento.

(a) Explique por que a função

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 10 \end{cases}$$

é uma função densidade de probabilidade para os valores desta roleta.

(b) O que sua intuição lhe diz sobre o valor da média? Verifique seu palpite calculando uma integral.

8. (a) Explique por que a função cujo gráfico é mostrado é uma função densidade de probabilidade.
(b) Use o gráfico para encontrar as seguintes probabilidades:
(i) $P(X < 3)$ (ii) $P(3 \leqslant X \leqslant 8)$
(c) Calcule a média.

9. Mostre que a mediana do tempo de espera para uma chamada para a companhia descrita no Exemplo 4 é de cerca de 3,5 minutos.

10. (a) O rótulo de um tipo de lâmpada indica que ela tem uma vida útil média de 1 000 horas. É razoável modelar a probabilidade de falha dessas lâmpadas por uma função densidade exponencial com média $\mu = 1\,000$. Use esse modelo para encontrar a probabilidade de uma lâmpada:
(i) queimar durante as primeiras 200 horas;
(ii) funcionar por mais de 800 horas.
(b) Qual a mediana da durabilidade dessas lâmpadas?

11. A gerente de uma lanchonete determina que o tempo médio de espera de seus clientes para serem atendidos seja de 2,5 minutos.
(a) Calcule a probabilidade de um cliente ter de esperar mais de 4 minutos.
(b) Calcule a probabilidade de um cliente ser servido dentro dos primeiros 2 minutos.
(c) A gerente quer fazer uma propaganda dizendo que se o cliente não for atendido dentro de um certo número de minutos, ele receberá um hambúrguer de graça. Mas ela não quer dar hambúrgueres grátis para mais que 2% de seus clientes. O que deve dizer a propaganda?

12. De acordo com o National Health Survey, a altura de homens adultos nos Estados Unidos tem uma distribuição normal com média de 69 polegadas e desvio-padrão de 2,8 polegadas.
(a) Qual a probabilidade de um homem adulto escolhido aleatoriamente ter entre 65 e 73 polegadas?
(b) Qual a porcentagem de homens adultos com mais de 6 pés?

13. O "Projeto Lixo", da Universidade do Arizona, relata que a quantidade de papel descartada pelas casas por semana tem uma distribuição normal com média de 4,3 kg e desvio-padrão de 1,9 kg. Qual a porcentagem de casas que jogam fora pelo menos 5 kg de papel por semana?

14. Os rótulos das caixas afirmam que elas contêm 500 g de cereal. A máquina que enche as caixas produz pesos que têm distribuição normal com desvio-padrão de 12 g.
(a) Se o peso-alvo é de 500 g, qual a probabilidade de a máquina produzir uma caixa com menos de 480 g de cereal?
(b) Suponha que uma lei estabeleça que não pode haver mais que 5% de caixas de cereal manufaturadas com menos de 500 g. A que peso-alvo deve o fabricante aferir suas máquinas?

15. As velocidades dos veículos em uma autoestrada com limite de velocidade de 100 km/h são normalmente distribuídas com média 112 km/h e desvio-padrão 8 km/h.
(a) Qual a probabilidade de que um veículo escolhido aleatoriamente esteja viajando dentro do limite de velocidade?
(b) Se a polícia for instruída a multar motoristas viajando a 125 km/h ou mais, qual percentual de motoristas poderá ser multado?

16. Mostre que a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com a distribuição normal tem pontos de inflexão em $x = \mu \pm \sigma$.

17. Para qualquer distribuição normal, calcule a probabilidade de uma variável aleatória estar dentro de dois desvios-padrão da média.

18. O desvio-padrão para uma variável aleatória com função densidade de probabilidade f e média μ é definido como

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx\right]^{1/2}$$

Calcule o desvio-padrão para uma função densidade exponencial com média μ.

19. O átomo de hidrogênio é composto por um próton no núcleo e um elétron, que se move ao redor do núcleo. Na teoria quântica de estrutura atômica supõe-se que o elétron não se mova em uma órbita bem definida. Ao contrário, ele ocupa um estado conhecido como *orbital*, que pode ser pensado como uma "nuvem" de carga negativa rodeando o núcleo. No estado de energia mais baixa, chamado *estado fundamental*, ou *orbital 1s*, é suposto que o formato do orbital seja uma esfera com centro no núcleo. Essa esfera é descrita em termos da função de densidade de probabilidade

$$p(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} \qquad r \geqslant 0$$

onde a_0 é o *raio de Bohr* ($a_0 \approx 5{,}59 \times 10^{-11}$ m). A integral

$$P(r) = \int_0^r \frac{4}{a_0^3} s^2 e^{-2s/a_0}\, ds$$

dá a probabilidade de o elétron ser encontrado dentro da esfera de raio r metros centrada no núcleo.
(a) Verifique que $p(r)$ é uma função densidade de probabilidade.
(b) Calcule $\lim_{r\to\infty} p(r)$. Para que valor de r a função $p(r)$ tem seu valor máximo?
(c) Desenhe a função densidade.
(d) Calcule a probabilidade de o elétron estar dentro da esfera de raio $4a_0$ centrada no núcleo.
(e) Calcule a distância média do elétron e do núcleo no estado fundamental do átomo de hidrogênio.

8 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) Como o comprimento de uma curva é definido?
(b) Escreva uma expressão para o comprimento de uma curva lisa dada por $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.
(c) O que acontece se x for dado como uma função de y?

2. (a) Escreva uma expressão para a área de uma superfície obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, em torno do eixo x.
(b) O que acontece se x for dado como uma função de y?
(c) O que acontece se a curva for girada em torno do eixo y?

3. Descreva como podemos calcular a força hidrostática contra uma parede vertical submersa em um fluido.

4. (a) Qual é o significado físico do centro de massa de uma placa fina?
(b) Se a placa está entre $y = f(x)$ e $y = 0$, no qual $a \leqslant x \leqslant b$, escreva expressões para as coordenadas do centro de massa.

5. O que diz o Teorema de Pappus?

6. Dada uma função demanda $p(x)$, explique o significado do excedente do consumidor quando a quantidade de produto disponível é X e o preço de venda é P. Ilustre com um esboço.

7. (a) O que é a capacidade cardíaca do coração?
(b) Explique como a capacidade cardíaca pode ser medida pelo método de diluição do contraste.

8. O que é função densidade de probabilidade? Quais as propriedades dessa função?

9. Suponha que $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade para os pesos de universitárias, onde x é medido em quilogramas.
(a) Qual o significado da integral $\int_0^{60} f(x)\,dx$?
(b) Escreva uma expressão para a média dessa função densidade.
(c) Como podemos calcular a mediana dessa função densidade?

10. O que é uma distribuição normal? Qual é o significado do desvio-padrão?

EXERCÍCIOS

1–2 Calcule o comprimento da curva.

1. $y = \frac{1}{6}(x^2 + 4)^{3/2}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 3$

2. $y = 2\ln(\operatorname{sen}\frac{1}{2}x)$, $\quad \pi/3 \leqslant x \leqslant \pi$

3. (a) Calcule o comprimento da curva.
$$y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2} \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2$$
(b) Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva descrita em (a) em torno do eixo y.

4. (a) A curva $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, é girada em torno do eixo y. Calcule a área da superfície resultante.
(b) Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva dada em (a) em torno do eixo x.

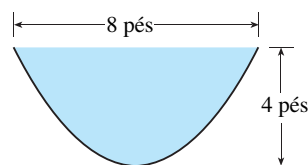
5. Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar o comprimento da curva $y = e^{-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.

6. Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar a área da superfície obtida pela rotação da curva dada no Exercício 5 em torno do eixo x.

7. Calcule o comprimento da curva
$$y = \int_1^x \sqrt{\sqrt{t} - 1}\,dt \qquad 1 \leqslant x \leqslant 16$$

8. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva do Exercício 7 em torno do eixo y.

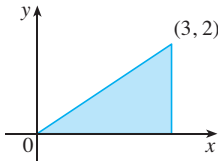
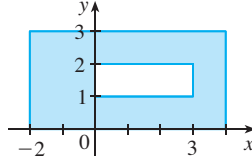
9. Um portão em um canal de irrigação é construído no formato de um trapézio com 1 m de largura na base, 2 m de largura no topo e 1 m de altura. Ele é colocado verticalmente no canal, com água até seu topo. Calcule a força hidrostática em um dos lados do portão.

10. Um canal é preenchido com água e suas extremidades verticais têm o formato da região parabólica da figura. Calcule a força hidrostática em uma extremidade do canal.

11–12 Calcule o centroide da região limitada pelas curvas dadas.

11. $y = \frac{1}{2}x$, $\quad y = \sqrt{x}$

12. $y = \text{sen}\, x, \quad y = 0, \quad x = \pi/4, \quad x = 3\pi/4$

13–14 Calcule o centroide da região mostrada.

13.

14.

15. Calcule o volume obtido quando o círculo de raio 1 com centro $(1, 0)$ é girado em torno do eixo y.

16. Use o Teorema de Pappus e o fato de que o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$ para calcular o centroide da região semicircular limitada pela curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e o eixo x.

17. A função demanda para um produto é dada por

$$p = 2\,000 - 0{,}1x - 0{,}01x^2$$

Calcule o excedente do consumidor quando o nível de vendas for 100.

18. Depois de uma injeção de 6 mg de contraste no coração, as leituras da concentração de contraste a intervalos de 2 segundos são mostradas na tabela. Use a Regra de Simpson para estimar a capacidade cardíaca.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	14	4,7
2	1,9	16	3,3
4	3,3	18	2,1
6	5,1	20	1,1
8	7,6	22	0,5
10	7,1	24	0
12	5,8		

19. (a) Explique por que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{20}\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{10}\right) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 10 \end{cases}$$

é uma função densidade de probabilidade.

(b) Calcule $P(X < 4)$.

(c) Calcule a média. É esse o valor que você esperaria?

20. A duração da gestação humana tem uma distribuição normal com média de 268 dias e desvio-padrão de 15 dias. Qual a porcentagem de gestações que duram entre 250 e 280 dias?

21. O tempo de espera na fila de um certo banco é modelado por uma função densidade exponencial com média de 8 minutos.

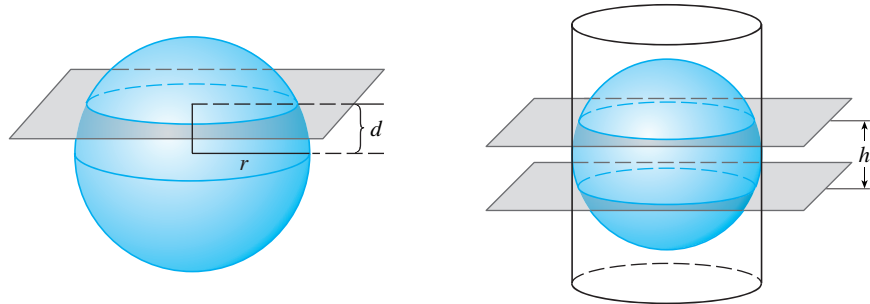
(a) Qual a probabilidade de o cliente ser atendido nos primeiros 3 minutos?

(b) Qual a probabilidade de o cliente ter de esperar mais de 10 minutos?

(c) Qual é a mediana do tempo de espera?

1. Calcule a área da região $S = \{(x, y) | x \geqslant 0, y \leqslant 1, x^2 + y^2 \leqslant 4y\}$.

2. Calcule o centroide da região limitada pelo laço da curva $y^2 = x^3 - x^4$.

3. Se uma esfera de raio r é fatiada por um plano cuja distância ao centro da esfera é d, então a esfera é dividida em dois pedaços, chamados segmentos de mesma base. As superfícies correspondentes são denominadas *zonas esféricas de mesma base*.
   (a) Determine as áreas das superfícies das duas zonas esféricas indicadas na figura.
   (b) Determine a área aproximada do oceano Ártico, supondo que ele tenha formato aproximadamente circular, com o centro no pólo norte e "circunferência" a 75º graus de latitude norte. Use $r = 6\,370$ km para o raio da Terra.
   (c) Uma esfera de raio r é inscrita em um cilindro circular reto de raio r. Dois planos perpendiculares ao eixo central do cilindro e separados a uma distância h cortam uma *zona esférica de duas bases* na esfera. Mostre que a área da superfície da zona esférica se iguala à área da superfície da região em que os dois planos cortam fora do cilindro.
   (d) A *Zona Tórrida* é uma região na superfície da Terra que está entre o Trópico de Câncer (23,45º graus de latitude norte) e o Trópico de Capricórnio (23,45º graus de latitude sul). Qual é a área da Zona Tórrida?

4. (a) Mostre que um observador a uma altura H acima do pólo norte de uma esfera de raio r pode ver uma parte da esfera que tem a área
$$\frac{2\pi r^2 H}{r + H}$$
   (b) Duas esferas com raios r e R estão colocadas de modo que a distância entre seus centros é d, onde $d > r + R$. Onde deve ser colocada uma luz na reta que liga os centros de modo a iluminar a maior área total de superfície?

5. Suponha que a densidade da água do mar, $\rho = \rho(z)$, varie com a profundidade z abaixo da superfície.
   (a) Mostre que a pressão hidrostática é regida pela equação diferencial
$$\frac{dP}{dz} = \rho(z)g$$
   onde g é a aceleração da gravidade. Seja P_0 e ρ_0 a pressão e a densidade em $z = 0$. Expresse a pressão a uma profundidade z como uma integral.
   (b) Suponha que a densidade da água do mar a uma profundidade z é dada por $\rho = \rho_0 e^{z/H}$, em que H é uma constante positiva. Calcule a força total, expressa como uma integral, exercida sobre uma janela vertical circular de raio r cujo centro está a uma distância $L > r$ abaixo da superfície.

6. A figura mostra um semicírculo de raio 1, um diâmetro horizontal PQ e as retas tangentes em P e Q. A que altura acima do diâmetro deve ser colocada a linha horizontal de modo a minimizar a área sombreada?

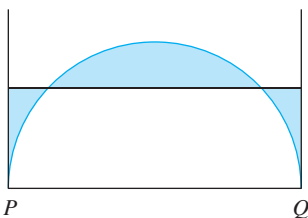



FIGURA PARA O PROBLEMA 6

7. Seja P uma pirâmide de base quadrada de lado $2b$ e suponha que S seja uma esfera com centro na base de P e tangente a todas as oito arestas de P. Calcule a altura de P. A seguir, calcule o volume da intersecção de S e P.

8. Considere uma placa metálica plana colocada verticalmente sob a água com seu topo 2 m abaixo da superfície da água. Determine um formato para a placa de maneira que, se ela for dividida em qualquer número de faixas horizontais de mesma altura, a força hidrostática em cada faixa seja a mesma.

9. Um disco uniforme de raio 1 deve ser cortado por uma reta de modo que o centro de massa do menor pedaço se encontre na metade do caminho ao longo de um raio. Quão próximo do centro do disco deve ser efetuado o corte? (Expresse sua resposta com precisão de duas casas decimais.)

FIGURA PARA O PROBLEMA 10

10. Um triângulo com área 30 cm^2 é retirado do canto de um quadrado de lado 10 cm, como mostrado na figura. Se o centroide da região restante está a 4 cm do lado direito do quadrado, quão longe ele está da base do quadrado?

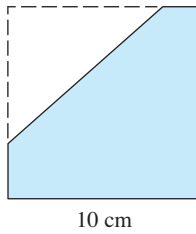
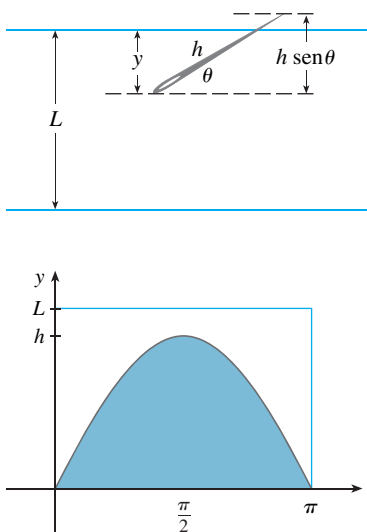



FIGURA PARA O PROBLEMA 11

11. Em um famoso problema do século XVIII, conhecido como o *problema da agulha de Buffon*, uma agulha de comprimento h é derrubada em uma superfície plana (por exemplo, uma mesa) na qual retas paralelas separadas por L unidades ($L \geqslant h$) foram desenhadas. O problema é determinar a probabilidade de a agulha interceptar uma das retas. Suponha que as retas estão na direção leste para oeste, paralelas ao eixo x em um sistema de coordenadas cartesianas (como na figura). Seja y a distância da ponta "sul" da agulha até a reta mais próxima ao norte. (Se a ponta "sul" da agulha está na reta, considere $y = 0$. Se a agulha estiver na direção leste-oeste, considere a ponta "oeste" como a ponta "sul".) Seja θ o ângulo que a agulha faz com um raio se estendendo na direção leste da ponta "sul". Então $0 \leqslant y \leqslant L$ e $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Observe que a agulha intercepta uma das retas apenas quando $y < h \operatorname{sen} \theta$. Agora, o conjunto de todas as possibilidades para a agulha pode ser identificado com a região retangular $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, e a proporção de vezes que a agulha intercepta uma reta é a razão

$$\frac{\text{área sob } y = h \operatorname{sen} \theta}{\text{área do retângulo}}$$

Essa razão é a probabilidade de a agulha interceptar uma reta. Calcule a probabilidade de a agulha interceptar uma reta se $h = L$. O que ocorre se $h = \frac{1}{2}L$?

12. Se a agulha do Problema 11 tiver o comprimento $h > L$, é possível que a agulha intercepte mais de uma reta.

(a) Se $L = 4$, calcule a probabilidade de a agulha de comprimento 7 interceptar pelo menos uma reta. [*Sugestão:* Podemos proceder como no Problema 11. Defina y como anteriormente; então o conjunto total de possibilidades para a agulha pode ser identificado com a mesma região retangular $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Qual porção do retângulo corresponde à agulha interceptando uma reta?]

(b) Se $L = 4$, calcule a probabilidade de a agulha de comprimento 7 interceptar *duas* retas.

(c) Se $2L < h \leqslant 3L$, encontre uma fórmula geral para a probabilidade de a agulha interceptar três retas.

APÊNDICES

A NÚMEROS, DESIGUALDADES E VALORES ABSOLUTOS

O cálculo baseia-se no sistema de números reais. Começamos com os **inteiros**:

$$\ldots, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots$$

Então, construímos os **números racionais**, que são as razões de inteiros. Assim, qualquer número racional r pode ser expresso como

$$r = \frac{m}{n} \qquad \text{em que } m \text{ e } n \text{ são inteiros e } n \neq 0$$

Exemplos:

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0{,}17 = \tfrac{17}{100}$$

(Lembre-se de que a divisão por 0 está sempre excluída; logo, as expressões como $\frac{3}{0}$ e $\frac{0}{0}$ não são definidas.) Alguns números reais, como $\sqrt{2}$, não podem ser expressos como a razão de números inteiros e são, portanto, chamados **números irracionais**. Pode ser mostrado, com variado grau de dificuldade, que os números a seguir são irracionais:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \text{sen } 1^\circ \qquad \log_{10} 2$$

O conjunto de todos os números reais é geralmente denotado pelo símbolo $\mathbb{R}$. Quando usarmos a palavra *número* sem qualificativo, estaremos nos referindo a um "número real".

Todo número tem uma representação decimal. Se o número for racional, então a dízima correspondente é repetida indefinidamente (periódica). Por exemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5000\ldots = 0{,}5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0{,}66666\ldots = 0{,}\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0{,}317171717\ldots = 0{,}3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1{,}285714285714\ldots = 1{,}\overline{285714}$$

(A barra indica que a sequência de dígitos se repete indefinidamente.) Caso contrário, se o número for irracional, a dízima não será repetitiva:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots \qquad \pi = 3{,}141592653589793\ldots$$

Ao pararmos a expansão decimal de qualquer número em uma certa casa decimal, obtemos uma aproximação dele. Por exemplo, podemos escrever

$$\pi \approx 3{,}14159265$$

onde o símbolo $\approx$ deve ser lido como "é aproximadamente igual a". Quanto mais casas decimais forem mantidas, melhor será a aproximação obtida.

Os números reais podem ser representados por pontos sobre uma reta, como na Figura 1. A direção positiva (à direita) é indicada por uma flecha. Escolhemos um ponto de referência arbitrário, O, denominado **origem**, que corresponde ao número real 0. Dada qualquer unidade conveniente de medida, cada número positivo x é representado pelo ponto da reta que está a x unidades de distância, à direita, da origem e cada número negativo $-x$ é representado pelo ponto sobre a reta que está x unidades de distância, à esquerda, da origem. Assim, todo número real é representado por um ponto sobre a reta, e todo ponto P sobre a reta corresponde a um único número real. O número real associado ao ponto P é chamado **coordenada** de P, e a reta é dita então **reta coordenada**, ou **reta dos números reais**, ou simplesmente **reta real**. Frequentemente, identificamos o ponto com sua coordenada e pensamos em um número como um ponto na reta real.

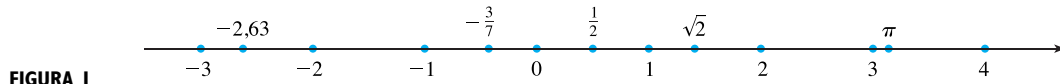



FIGURA 1

Os números reais são ordenados. Dizemos que *a é menor que b* e escrevemos $a < b$ se $b - a$ for um número positivo. Geometricamente, isso significa que a está à esquerda de b sobre a reta real. (De maneira equivalente, dizemos que *b é maior que a* e escrevemos $b > a$.) O símbolo $a \leqslant b$ (ou $b \geqslant a$) significa que $a < b$ ou $a = b$ e deve ser lido como "a é menor ou igual a b". Por exemplo, são verdadeiras as seguintes desigualdades:

$$7 < 7{,}4 < 7{,}5 \qquad -3 > -\pi \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad \sqrt{2} \leqslant 2 \qquad 2 \leqslant 2$$

A seguir, vamos precisar usar a *notação de conjunto*. Um **conjunto** é uma coleção de objetos, chamados **elementos** do conjunto. Se S for um conjunto, a notação $a \in S$ significa que a é um elemento de S, e $a \notin S$ significa que a não é um elemento de S. Por exemplo, se Z representa o conjunto dos inteiros, então $-3 \in Z$ mas $\pi \notin Z$. Se S e T forem conjuntos, então sua **união**, $S \cup T$, é o conjunto que consiste em todos os elementos que estão em S ou T (ou ambos S e T). A **intersecção** de S e T é o conjunto $S \cap T$, que consiste em todos os elementos que estão em S e em T. Em outras palavras, $S \cap T$ é a parte comum a S e a T. O conjunto vazio, denotado por $\varnothing$, é aquele que não contém nenhum elemento.

Alguns conjuntos podem ser descritos fazendo-se uma lista de seus elementos entre chaves. Por exemplo, o conjunto A consistindo em todos os inteiros positivos menores que 7 pode ser escrito como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Podemos também descrever A na *notação construtiva* de conjuntos

$$A = \{x \mid x \text{ é um inteiro e } 0 < x < 7\}$$

que deve ser lido como "A é o conjunto dos x tal que x é um inteiro e $0 < x < 7$".

INTERVALOS

Certos conjuntos de números reais, denominados **intervalos**, ocorrem frequentemente no cálculo e correspondem geometricamente a segmentos de reta. Por exemplo, se $a < b$, o **intervalo aberto** de a até b consiste em todos os números entre a e b e é denotado pelo símbolo (a, b). Usando a notação construtiva de conjuntos, podemos escrever

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

FIGURA 2
Intervalo aberto (a, b)

Observe que as extremidades do intervalo — isto é, a e b — estão excluídas. Isso é indicado pelos parênteses ( ) e pelas bolinhas vazias na Figura 2. O **intervalo fechado** de a até b é o conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

FIGURA 3
Intervalo fechado $[a, b]$

Aqui, as extremidades do intervalo estão incluídas, e isso é indicado pelos colchetes [ ] e pelas bolinhas cheias na Figura 3. Também é possível incluir somente uma extremidade em um intervalo, conforme mostrado na Tabela 1.

1 TABELA DE INTERVALOS

■ A Tabela 1 dá uma lista dos nove tipos possíveis de intervalos. Em todos os casos, supomos $a < b$.

Notação	Descrição do conjunto	Ilustração
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a ∘——∘ b
$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	a •——• b
$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	a •——∘ b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	a ∘——• b
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	a ∘——→
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	a •——→
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	——∘ b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	——• b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais)	——→

É necessário também considerar intervalos infinitos, como

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

Isso não significa que ∞ ("infinito") seja um número. A notação (a, ∞) representa o conjunto de todos os números maiores que a; dessa forma, o símbolo ∞ indica que o intervalo se estende indefinidamente na direção positiva.

DESIGUALDADES

Quando trabalhar com desigualdades, observe as seguintes regras:

2 REGRAS PARA DESIGUALDADES

1. Se $a < b$, então $a + c < b + c$.
2. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.
3. Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.
4. Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.
5. Se $0 < a < b$, então $1/a > 1/b$.

A Regra 1 diz que podemos adicionar qualquer número a ambos os lados de uma desigualdade e a Regra 2 diz que duas desigualdades podem ser adicionadas. Porém, devemos ter cuidado com a multiplicação. A Regra 3 diz que podemos multiplicar ambos os lados de uma desigualdade por um número *positivo*, mas a Regra 4 diz que se multiplicarmos ambos os lados de uma desigualdade por um número negativo, então inverteremos o sentido da desigualdade. Por exemplo, se considerarmos a desigualdade $3 < 5$ e a multiplicarmos por 2, obteremos $6 < 10$, mas se a multiplicarmos por -2, obteremos $-6 > -10$. Finalmente, a Regra 5 diz que se tomarmos recíprocos, então inverteremos o sentido de uma desigualdade (desde que os números sejam positivos).

EXEMPLO 1 Resolva a inequação $1 + x < 7x + 5$.

SOLUÇÃO A desigualdade dada é satisfeita por alguns valores de x, mas não por outros. *Resolver* uma inequação significa determinar o conjunto dos números x para os quais a desigualdade é verdadeira. Isto é conhecido como *conjunto solução*.

Primeiro, subtraímos 1 de cada lado da desigualdade (usando a Regra 1 com $c = -1$):

$$x < 7x + 4$$

Então subtraímos $7x$ de ambos os lados (Regra 1 com $c = -7x$):

$$-6x < 4$$

Vamos dividir agora ambos os lados por -6 $\left(\text{Regra 4 com } c = -\frac{1}{6}\right)$:

$$x > -\tfrac{4}{6} = -\tfrac{2}{3}$$

Esses passos podem ser todos invertidos; dessa forma, o conjunto solução consiste em todos os números maiores que $-\frac{2}{3}$. Em outras palavras, a solução da inequação é o intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$. □

EXEMPLO 2 Resolva as inequações $4 \leqslant 3x - 2 < 13$.

SOLUÇÃO Aqui o conjunto solução consiste em todos os valores de x que satisfazem a ambas as desigualdades. Usando as regras dadas em (2), vemos que as seguintes desigualdades são equivalentes:

$$4 \leqslant 3x - 2 < 13$$

$$6 \leqslant 3x < 15 \qquad \text{(adicionando 2)}$$

$$2 \leqslant x < 5 \qquad \text{(dividindo por 3)}$$

Portanto, o conjunto solução é $[2, 5)$. □

■ O método visual de se resolver o Exemplo 3 é usar uma ferramenta gráfica para esboçar a parábola $y = x^2 - 5x + 6$ (como na Figura 4) e observar se a curva está sobre ou abaixo do eixo x quando $2 \leqslant x \leqslant 3$.

EXEMPLO 3 Resolva a inequação $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos fatorar o lado esquerdo:

$$(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$$

Sabemos que a equação correspondente $(x - 2)(x - 3) = 0$ tem as soluções 2 e 3. Os números 2 e 3 dividem o eixo real em três intervalos:

$$(-\infty, 2) \qquad (2, 3) \qquad (3, \infty)$$

FIGURA 4

Em cada um desses intervalos, determinamos os sinais dos fatores. Por exemplo,

$$x \in (-\infty, 2) \quad \Rightarrow \quad x < 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 < 0$$

Vamos então registrar esses sinais na seguinte tabela:

Intervalo	$x - 2$	$x - 3$	$(x - 2)(x - 3)$
$x < 2$	$-$	$-$	$+$
$2 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

Outro método para obter a informação da tabela é usar *valores-teste*. Por exemplo, se usarmos o valor-teste $x = 1$ para o intervalo $(-\infty, 2)$ então, substituindo em $x^2 - 5x + 6$, obteremos

$$1^2 - 5(1) + 6 = 2$$

O polinômio $x^2 - 5x + 6$ não muda de sinal dentro de cada um dos três intervalos; logo, concluímos que é positivo em $(-\infty, 2)$.

Então, concluímos da tabela que $(x - 2)(x - 3)$ é negativo quando $2 < x < 3$. Logo, a solução da inequação $(x - 2)(x - 3) \leqslant 0$ é

$$\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [2, 3]$$

FIGURA 5

Observe que incluímos as extremidades 2 e 3, pois estávamos procurando os valores de x tais que o produto fosse negativo ou zero. A solução está ilustrada na Figura 5. □

EXEMPLO 4 Resolva $x^3 + 3x^2 > 4x$.

SOLUÇÃO Primeiro deixamos todos os termos não nulos de um lado do sinal de desigualdade e então fatoramos a expressão resultante:

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0 \qquad \text{ou} \qquad x(x-1)(x+4) > 0$$

Como no Exemplo 3, vamos resolver a equação correspondente $x(x-1)(x+4) = 0$ e usar as soluções $x = -4$, $x = 0$ e $x = 1$ para dividir o eixo real em quatro intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 0)$, $(0, 1)$, e $(1, \infty)$. Em cada intervalo o produto mantém um sinal constante, conforme mostra a tabela:

Intervalo	x	$x-1$	$x+4$	$x(x-1)(x+4)$
$x < -4$	−	−	−	−
$-4 < x < 0$	−	−	+	+
$0 < x < 1$	+	−	+	−
$x > 1$	+	+	+	+

Vemos a partir da tabela que o conjunto solução é

$$\{x \mid -4 < x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 1\} = (-4, 0) \cup (1, \infty)$$

A solução está ilustrada na Figura 6. □

FIGURA 6

VALOR ABSOLUTO

O **valor absoluto** de um número a, denotado por $|a|$, é a distância de a até 0 na reta real. Como as distâncias são sempre positivas ou 0, então temos

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por exemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

Em geral, temos

■ Lembre-se de que se a for negativo, então $-a$ é positivo.

3

$$\begin{aligned} |a| &= a && \text{se } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a && \text{se } a < 0 \end{aligned}$$

EXEMPLO 5 Expresse $|3x - 2|$ sem usar o símbolo de valor absoluto.

SOLUÇÃO

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } 3x - 2 \geqslant 0 \\ -(3x - 2) & \text{se } 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{se } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

□

Lembre-se de que o símbolo $\sqrt{\ }$ significa "raiz quadrada positiva de". Logo, $\sqrt{r} = s$ significa $s^2 = r$ e $s \geqslant 0$. Portanto, a equação $\sqrt{a^2} = a$ não é sempre verdadeira. Só é verdadeira quando $a \geqslant 0$. Se $a < 0$, então $-a > 0$; portanto, temos $\sqrt{a^2} = -a$. Em vista de (3), temos então a equação

4 $$\sqrt{a^2} = |a|$$

que é verdadeira para todos os valores a.

As sugestões para as demonstrações das propriedades a seguir serão dadas nos exercícios.

5 PROPRIEDADES DOS VALORES ABSOLUTOS Suponhamos que a e b sejam números reais quaisquer e n um inteiro. Então

1. $|ab| = |a||b|$ **2.** $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$ **3.** $|a^n| = |a|^n$

Para resolver as equações e as inequações envolvendo valores absolutos, é frequentemente muito útil usar as seguintes afirmações.

6 Suponhamos $a > 0$. Então:

4. $|x| = a$ se e somente se $x = \pm a$

5. $|x| < a$ se e somente se $-a < x < a$

6. $|x| > a$ se e somente se $x > a$ ou $x < -a$

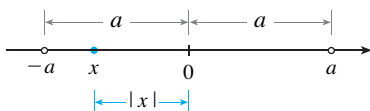



FIGURA 7

Por exemplo, a desigualdade $|x| < a$ diz que a distância de x à origem é menor que a, e você pode ver a partir da Figura 7 que isso é verdadeiro se e somente se x estiver entre $-a$ e a.

Se a e b forem números reais quaisquer, então a distância entre a e b é o valor absoluto da diferença, isto é, $|a - b|$, que também é igual a $|b - a|$ (veja a Figura 8).

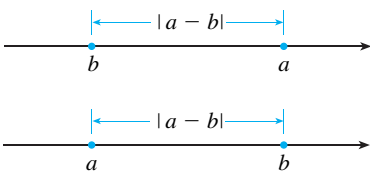



FIGURA 8
Comprimento de um segmento de reta = $|a - b|$

EXEMPLO 6 Resolva $|2x - 5| = 3$.

SOLUÇÃO Pela Propriedade 4 de (6), $|2x - 5| = 3$ é equivalente a

$$2x - 5 = 3 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = -3$$

Logo, $2x = 8$ ou $2x = 2$. Portanto, $x = 4$ ou $x = 1$. □

EXEMPLO 7 Resolva $|x - 5| < 2$.

SOLUÇÃO 1 Pela Propriedade 5 de (6), $|x - 5| < 2$ é equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2$$

Assim, adicionando 5 a cada lado, temos

$$3 < x < 7$$

e o conjunto solução é o intervalo $(3, 7)$.

FIGURA 9

SOLUÇÃO 2 Geometricamente, o conjunto solução consiste em todos os números x cuja distância de 5 é menor que 2. Da Figura 9 vemos que esse intervalo é $(3, 7)$. □

EXEMPLO 8 Resolva $|3x + 2| \geqslant 4$.

SOLUÇÃO Pelas Propriedades 4 e 6 de (6), $|3x + 2| \geqslant 4$ é equivalente a

$$3x + 2 \geqslant 4 \qquad \text{ou} \qquad 3x + 2 \leqslant -4$$

No primeiro caso $3x \geqslant 2$, o que resulta em $x \geqslant \frac{2}{3}$. No segundo caso $3x \leqslant -6$, o que resulta em $x \leqslant -2$. Logo, o conjunto solução é

$$\left\{x \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant \tfrac{2}{3}\right\} = (-\infty, -2] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \infty\right)$$ □

Outra propriedade importante do valor absoluto, denominada Desigualdade Triangular, é frequentemente usada não apenas no cálculo, mas em geral em toda a matemática.

7 **A DESIGUALDADE TRIANGULAR** Se a e b forem quaisquer números reais, então

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

Observe que se os números a e b forem ambos positivos ou negativos, então os dois lados na Desigualdade Triangular serão realmente iguais. Mas se a e b tiverem sinais opostos, o lado esquerdo envolve uma subtração, ao passo que o lado direito, não. Isso faz com que a Desigualdade Triangular pareça razoável, mas podemos demonstrá-la da forma a seguir.

Observe que

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

é sempre verdadeira, pois a é igual a $|a|$ ou $-|a|$. A afirmação correspondente a b é

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

Somando-se essas desigualdades obtemos

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Se aplicarmos agora as Propriedades 4 e 5 (com x substituído por $a + b$ e a por $|a| + |b|$), obteremos

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

que é o que queríamos mostrar.

EXEMPLO 9 Se $|x - 4| < 0{,}1$ e $|y - 7| < 0{,}2$, use a Desigualdade Triangular para estimar $|(x + y) - 11|$.

SOLUÇÃO A fim de usar a informação fornecida, utilizamos a Desigualdade Triangular com $a = x - 4$ e $b = y - 7$:

$$\begin{aligned} |(x + y) - 11| &= |(x - 4) + (y - 7)| \\ &\leqslant |x - 4| + |y - 7| \\ &< 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3 \end{aligned}$$

Logo, $$|(x + y) - 11| < 0{,}3$$ □

A EXERCÍCIOS

1–12 Reescreva a expressão sem usar o símbolo de valor absoluto.

1. $|5 - 23|$

2. $|5| - |-23|$

3. $|-\pi|$

4. $|\pi - 2|$

5. $|\sqrt{5} - 5|$

6. $||-2| - |-3||$

7. $|x - 2|$ se $x < 2$

8. $|x - 2|$ se $x > 2$

9. $|x + 1|$

10. $|2x - 1|$

11. $|x^2 + 1|$

12. $|1 - 2x^2|$

13–38 Resolva a inequação em termos de intervalos e represente o conjunto solução na reta real.

13. $2x + 7 > 3$

14. $3x - 11 < 4$

15. $1 - x \leqslant 2$

16. $4 - 3x \geqslant 6$

17. $2x + 1 < 5x - 8$

18. $1 + 5x > 5 - 3x$

19. $-1 < 2x - 5 < 7$

20. $1 < 3x + 4 \leqslant 16$

21. $0 \leqslant 1 - x < 1$

22. $-5 \leqslant 3 - 2x \leqslant 9$

23. $4x < 2x + 1 \leqslant 3x + 2$

24. $2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$

25. $(x - 1)(x - 2) > 0$

26. $(2x + 3)(x - 1) \leqslant 0$

27. $2x^2 + x \leqslant 1$

28. $x^2 < 2x + 8$

29. $x^2 + x + 1 > 0$

30. $x^2 + x > 1$

31. $x^2 < 3$

32. $x^2 \geqslant 5$

33. $x^3 - x^2 \leqslant 0$

34. $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geqslant 0$

35. $x^3 > x$

36. $x^3 + 3x < 4x^2$

37. $\dfrac{1}{x} < 4$

38. $-3 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

39. A relação entre as escalas de temperatura Celsius e Fahrenheit é dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde C é a temperatura em graus Celsius e F é a temperatura em graus Fahrenheit. Qual é o intervalo sobre a escala Celsius correspondente à temperatura no intervalo $50 \leqslant F \leqslant 95$?

40. Use a relação entre C e F dada no Exercício 39 para determinar o intervalo na escala Fahrenheit correspondente à temperatura no intervalo $20 \leqslant C \leqslant 30$.

41. À medida que sobe, o ar seco se expande, e ao fazer isso se resfria a uma taxa de cerca de 1 °C para cada 100 m de subida, até cerca de 12 km.

(a) Se a temperatura do solo for de 20 °C, escreva uma fórmula para a temperatura a uma altura h.

(b) Que variação de temperatura você pode esperar se um avião decola e atinge uma altura máxima de 5 km?

42. Se uma bola for atirada para cima do topo de um edifício com 30 m de altura com velocidade inicial de 10 m/s, então a altura h acima do solo t segundos mais tarde será

$$h = 30 + 10t - 5t^2$$

Durante que intervalo de tempo a bola estará no mínimo a 15 m acima do solo?

43–46 Resolva a equação para x.

43. $|2x| = 3$

44. $|3x + 5| = 1$

45. $|x + 3| = |2x + 1|$

46. $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 1}\right| = 3$

47–56 Resolva a inequação.

47. $|x| < 3$

48. $|x| \geqslant 3$

49. $|x - 4| < 1$

50. $|x - 6| < 0{,}1$

51. $|x + 5| \geqslant 2$

52. $|x + 1| \geqslant 3$

53. $|2x - 3| \leqslant 0{,}4$

54. $|5x - 2| < 6$

55. $1 \leqslant |x| \leqslant 4$

56. $0 < |x - 5| < \frac{1}{2}$

57–58 Isole x, supondo que a, b e c sejam constantes positivas.

57. $a(bx - c) \geqslant bc$

58. $a \leqslant bx + c < 2a$

59–60 Isole x, supondo que a, b e c sejam constantes negativas.

59. $ax + b < c$

60. $\dfrac{ax + b}{c} \leqslant b$

61. Suponha que $|x - 2| < 0{,}01$ e $|y - 3| < 0{,}04$. Use a Desigualdade Triangular para mostrar que $|(x + y) - 5| < 0{,}05$.

62. Mostre que se $|x + 3| < \frac{1}{2}$, então $|4x + 13| < 3$.

63. Mostre que se $a < b$, então $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

64. Use a Regra 3 para demonstrar a Regra 5 de (2).

65. Demonstre que $|ab| = |a||b|$. (*Sugestão*: Use a Equação 4.)

66. Demonstre que $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

67. Mostre que se $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.

68. Demonstre que $|x - y| \geqslant |x| - |y|$. (*Sugestão*: Use a Desigualdade Triangular com $a = x - y$ e $b = y$.)

69. Mostre que a soma, a diferença e o produto de números racionais resultam em um número racional.

70. (a) A soma de dois números irracionais é sempre irracional?

(b) O produto de dois números irracionais é sempre irracional?

B GEOMETRIA ANALÍTICA E RETAS

Da mesma forma que os pontos sobre uma reta podem ser identificados com números reais, atribuindo-se a eles coordenadas, conforme descrito no Apêndice A, também os pontos no plano podem ser identificados com pares ordenados de números reais. Vamos começar desenhando duas retas coordenadas perpendiculares que se interceptam na origem O de cada reta. Geralmente uma reta é horizontal com direção positiva para a direita e é chamada reta x; a outra reta é vertical com direção positiva para cima e é denominada reta y.

Qualquer ponto P no plano pode ser localizado por um único par ordenado de números, traçando pelo ponto P as retas perpendiculares aos eixos x e y. Essas retas interceptam os eixos em pontos com as coordenadas a e b, conforme mostra a Figura 1. Então, ao ponto P é atribuído o par ordenado (a, b). O primeiro número a é chamado **coordenada *x*** (ou **abscissa**) de P; o segundo número b é conhecido como **coordenada *y*** (ou **ordenada**) de P. Dizemos que P é um ponto com coordenadas (a, b) e denotamos o ponto pelo símbolo $P(a, b)$. Na Figura 2 estão vários pontos com suas coordenadas.

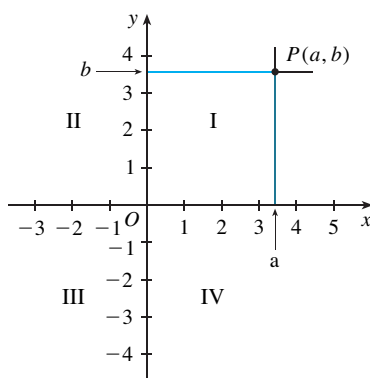
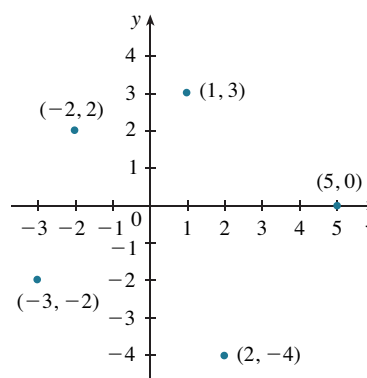



FIGURA 1 **FIGURA 2**

Revertendo o processo anterior, podemos começar por um par ordenado (a, b) e chegar até o ponto P correspondente. Frequentemente, identificamos o ponto P com o par ordenado (a, b) e nos referimos a ele como "ponto (a, b)". [Embora a notação usada para um intervalo aberto (a, b) seja a mesma usada para o ponto (a, b), você será capaz de distinguir pelo contexto qual o significado desejado.]

Esse sistema de coordenadas é dito **sistema coordenado retangular** ou **sistema de coordenadas cartesianas**, em homenagem ao matemático René Descartes (1596-1650), embora outro francês, Pierre Fermat (1601-1665), tenha inventado os princípios da geometria analítica ao mesmo tempo que Descartes. O plano fornecido por esse sistema de coordenadas, denominado **plano coordenado** ou **cartesiano**, é denotado por $\mathbb{R}^2$.

Os eixos x e y são chamados **eixos coordenados** e dividem o plano cartesiano em quatro quadrantes, denotados por I, II, III e IV na Figura 1. Observe que o primeiro quadrante consiste nos pontos com coordenadas x e y positivas.

EXEMPLO 1 Descreva e esboce as regiões dadas pelos seguintes conjuntos:

(a) $\{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ (b) $\{(x, y) \mid y = 1\}$ (c) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

SOLUÇÃO

(a) Os pontos cujas coordenadas x são 0 ou são positivas estão situados no eixo y ou à direita dele, como indicado pela região sombreada da Figura 3(a).

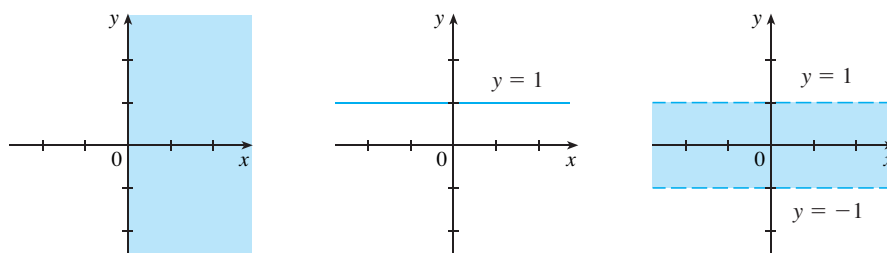



FIGURA 3 (a) $x \geqslant 0$ (b) $y = 1$ (c) $|y| < 1$

(b) O conjunto de todos os pontos com coordenada y igual a 1 é uma reta horizontal uma unidade acima do eixo x [veja a Figura 3(b)].
(c) Lembre-se do Apêndice A que

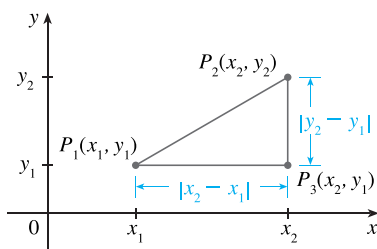
$$|y| < 1 \qquad \text{se e somente se} \qquad -1 < y < 1$$

A região dada consiste naqueles pontos do plano cuja coordenada y está entre -1 e 1. Assim, a região consiste em todos os pontos que estão entre (mas não sobre) as retas horizontais $y = 1$ e $y = -1$. [Essas retas estão mostradas como retas tracejadas na Figura 3(c) para indicar que os pontos sobre essas retas não estão no conjunto.] □

Lembre-se, a partir do Apêndice A, que a distância entre os pontos a e b sobre o eixo real é $|a - b| = |b - a|$. Assim, a distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_3(x_2, y_1)$ sobre uma reta horizontal deve ser $|x_2 - x_1|$ e a distância entre $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_2, y_1)$ sobre uma reta vertical deve ser $|y_2 - y_1|$ (veja a Figura 4).

FIGURA 4

Para encontrar a distância $|P_1P_2|$ entre dois pontos quaisquer $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, observamos que o triângulo $P_1P_2P_3$ na Figura 4 é retângulo e, portanto, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} |P_1P_2| &= \sqrt{|P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

1 FÓRMULA DA DISTÂNCIA A distância entre os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EXEMPLO 2 A distância entre $(1, -2)$ e $(5, 3)$ é

$$\sqrt{(5 - 1)^2 + [3 - (-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$ □

RETAS

Queremos encontrar uma equação para uma dada reta L; essa equação é satisfeita pelas coordenadas dos pontos sobre L e por nenhum outro ponto. Para encontrar a equação de L usamos sua *inclinação*, que é uma medida do grau de declividade da reta.

2 DEFINIÇÃO A **inclinação** (ou coeficiente angular) de uma reta não vertical que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A inclinação de uma reta vertical não está definida.

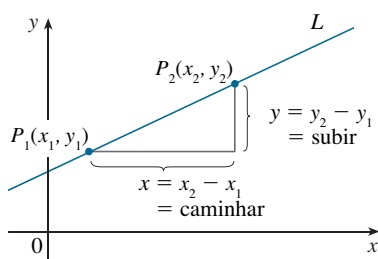
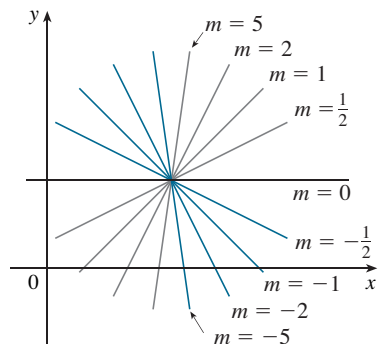



FIGURA 5

Assim, a inclinação de uma reta é a razão da variação em y, Δy, e da variação em x, Δx (veja a Figura 5). A inclinação é, portanto, a taxa de variação de y em relação a x: o fato de tratar-se de uma reta significa que a taxa de variação é constante.

A Figura 6 mostra várias retas acompanhadas de suas inclinações. Observe que as retas com inclinação positiva inclinam-se para cima à direita, enquanto as retas com inclinação negativa inclinam-se para baixo à direita. Observe também que as retas mais íngremes são aquelas para as quais o valor absoluto da inclinação é maior, e que uma reta horizontal tem inclinação zero.

FIGURA 6

Vamos encontrar agora uma equação da reta que passa por um ponto dado $P_1(x_1, y_1)$ e tem inclinação m. Um ponto $P(x, y)$ com $x \neq x_1$ está sobre essa reta se e somente se a inclinação da reta que passa por P_1 e P é igual a m; isto é,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Essa equação pode ser reescrita na forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

e observamos que essa equação também é satisfeita quando $x = x_1$ e $y = y_1$. Portanto, ela é uma equação da reta dada.

3 EQUAÇÃO DE UMA RETA NA FORMA PONTO-INCLINAÇÃO Uma equação da reta passando pelo ponto $P_1(x_1, y_1)$ com inclinação m é

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

EXEMPLO 3 Ache uma equação da reta por $(1, -7)$ com inclinação $-\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO Usando (3) com $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ e $y_1 = -7$, obtemos uma equação da reta como

$$y + 7 = -\tfrac{1}{2}(x - 1)$$

que pode ser reescrita como

$$2y + 14 = -x + 1 \qquad \text{ou} \qquad x + 2y + 13 = 0$$ □

EXEMPLO 4 Encontre uma equação da reta que passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(3, -4)$.

SOLUÇÃO Pela Definição 2 a inclinação da reta é

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{3}{2}$$

Usando a forma ponto-inclinação com $x_1 = -1$ e $y_1 = 2$, obteremos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1)$$

que pode ser simplificada para $\qquad 3x + 2y = 1$ □

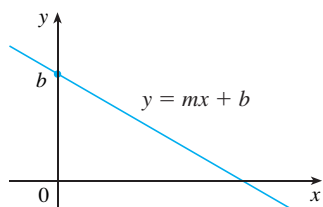



FIGURA 7

Suponha que uma reta não vertical tenha inclinação m e intersecção com o eixo y igual a b (veja a Figura 7). Isso significa que ela intercepta o eixo y em um ponto $(0, b)$, logo a equação da reta na forma ponto-inclinação, com $x_1 = 0$ e $y_1 = b$, torna-se

$$y - b = m(x - 0)$$

Isso pode ser simplificado como a seguir.

4 EQUAÇÃO DE UMA RETA NA FORMA INCLINAÇÃO–INTERSECÇÃO COM O EIXO Uma equação da reta com inclinação m e intersecção com o eixo y igual a b é

$$y = mx + b$$

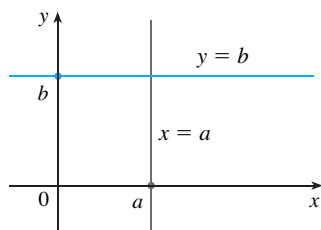



FIGURA 8

Em particular, se a reta for horizontal, sua inclinação é $m = 0$, logo sua equação é $y = b$, onde b é a intersecção com o eixo y (veja a Figura 8). Uma reta vertical não tem uma inclinação, mas podemos escrever sua equação como $x = a$, onde a é a intersecção com o eixo x, pois a coordenada x de todo ponto sobre a reta é a.

Observe que a equação de toda reta pode ser escrita na forma

$$\boxed{5} \qquad Ax + By + C = 0$$

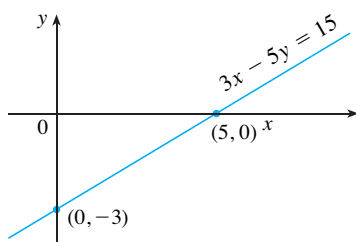
porque a reta vertical tem a equação da forma $x = a$ ou $x - a = 0$ ($A = 1, B = 0, C = -a$) e uma reta não vertical tem a equação $y = mx + b$ ou $-mx + y - b = 0$ ($A = -m, B = 1, C = -b$). Reciprocamente, se começarmos com uma equação geral de primeiro grau, isto é, uma equação da forma (5), onde A, B e C são constantes e A e B não são ambos 0, então podemos mostrar que ela é a equação de uma reta. Se $B = 0$, isso torna-se $Ax + C = 0$ ou $x = -C/A$, que representa uma reta vertical com intersecção com o eixo x igual a $-C/A$. Se $B \neq 0$, a equação pode ser reescrita isolando-se y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

e reconhecemos isso como a equação de uma reta na forma inclinação–intersecção com o eixo ($m = -A/B, b = -C/B$). Portanto, uma equação da forma (5) é chamada **equação linear** ou **equação geral de uma reta**. Resumindo, nos referimos frequentemente à "reta $Ax + By + C = 0$" em lugar de à "reta cuja equação é $Ax + By + C = 0$".

FIGURA 9

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico da equação $3x - 5y = 15$.

SOLUÇÃO Uma vez que a equação é linear, seu gráfico é uma reta. Para desenhar o gráfico, podemos simplesmente determinar dois pontos sobre a reta. É fácil determinar as intersecções com os eixos. Substituindo $y = 0$ (equação do eixo x) na equação dada, obtemos $3x = 15$, logo $x = 5$ é a intersecção com o eixo x. Substituindo $x = 0$ na equação, vemos que a intersecção com o eixo y é -3. Isso permite-nos esboçar o gráfico como na Figura 9. □

EXEMPLO 6 Represente graficamente a inequação $x + 2y > 5$.

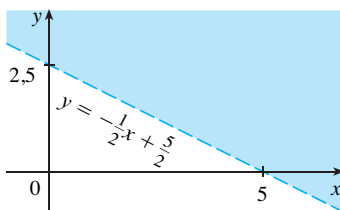
SOLUÇÃO Para esboçar o gráfico do conjunto $\{(x, y) | x + 2y > 5\}$ isolaremos y na desigualdade:

$$x + 2y > 5$$

$$2y > -x + 5$$

$$y > -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}$$

FIGURA 10

Compare essa desigualdade com a equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, que representa uma reta com inclinação $-\frac{1}{2}$ e intersecção com o eixo y igual a $\frac{5}{2}$. Vemos que o gráfico dado consiste nos pontos com coordenada y *maior* que aquela sobre a reta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Assim, o gráfico é a região que se situa *acima* da reta, conforme ilustrado na Figura 10. □

RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES

As inclinações podem ser usadas para mostrar que as retas são paralelas ou perpendiculares. Os seguintes fatos são demonstrados, por exemplo, em *Precalculus: Mathematics for Calculus*, 5. ed., de Stewart, Redlin e Watson. Brooks Thomson/Cole Publishing Co.: Belmont, CA, 2006.

6 RETAS PARALELAS E PERPENDICULARES

1. Duas retas não verticais são paralelas se e somente se tiverem a mesma inclinação.
2. Duas retas com inclinação m_1 e m_2 são perpendiculares se e somente se $m_1m_2 = -1$; isto é, suas inclinações são recíprocas opostas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

EXEMPLO 7 Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $(5, 2)$ e que é paralela à reta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUÇÃO A reta dada pode ser escrita na forma

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6}$$

que está na forma inclinação-intersecção com o eixo com $m = -\tfrac{2}{3}$. As retas paralelas têm a mesma inclinação, logo a reta pedida tem a inclinação $-\tfrac{2}{3}$, e sua equação na forma ponto-inclinação é

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5)$$

Podemos escrever essa equação como $2x + 3y = 16$. □

EXEMPLO 8 Mostre que as retas $2x + 3y = 1$ e $6x - 4y - 1 = 0$ são perpendiculares.

SOLUÇÃO As equações podem ser escritas como

$$y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

de onde vemos que as inclinações são

$$m_1 = -\tfrac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad m_2 = \tfrac{3}{2}$$

Como $m_1m_2 = -1$, as retas são perpendiculares. □

B EXERCÍCIOS

1–6 Determine a distância entre os dois pontos.

1. $(1, 1)$, $(4, 5)$

2. $(1, -3)$, $(5, 7)$

3. $(6, -2)$, $(-1, 3)$

4. $(1, -6)$, $(-1, -3)$

5. $(2, 5)$, $(4, -7)$

6. (a, b), (b, a)

7–10 Determine a inclinação da reta que passa por P e Q.

7. $P(1, 5)$, $Q(4, 11)$

8. $P(-1, 6)$, $Q(4, -3)$

9. $P(-3, 3)$, $Q(-1, -6)$

10. $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

11. Mostre que o triângulo com vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(-4, 3)$ é isósceles.

12. (a) Mostre que o triângulo com vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ e $C(2, -2)$ é um triângulo retângulo usando a recíproca do Teorema de Pitágoras.
(b) Use as inclinações para mostrar que ABC é um triângulo retângulo.
(c) Determine a área do triângulo.

13. Mostre que os pontos $(-2, 9)$, $(4, 6)$, $(1, 0)$ e $(-5, 3)$ são os vértices de um quadrado.

14. (a) Mostre que os pontos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ e $C(5, 15)$ são colineares (pertencem à mesma reta) mostrando que

$$|AB| + |BC| = |AC|.$$

(b) Use as inclinações para mostrar que A, B e C são colineares.

15. Mostre que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ e $D(-1, 7)$ são vértices de um paralelogramo.

16. Mostre que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ e $D(0, 6)$ são vértices de um retângulo.

17–20 Esboce o gráfico da equação.

17. $x = 3$

18. $y = -2$

19. $xy = 0$

20. $|y| = 1$

21–36 Ache uma equação da reta que satisfaça as condições dadas.

21. Que passa pelo ponto $(2, -3)$, inclinação 6

22. Que passa pelo ponto $(-1, 4)$, inclinação -3

23. Que passa pelo ponto $(1, 7)$, inclinação $\frac{2}{3}$

24. Que passa pelo ponto $(-3, -5)$, inclinação $-\frac{7}{2}$

25. Por $(2, 1)$ e $(1, 6)$

26. Por $(-1, -2)$ e $(4, 3)$

27. Inclinação 3, e intersecção com o eixo y igual a -2

28. Inclinação $\frac{2}{5}$, e intersecção com o eixo y igual a 4

29. Intersecção com o eixo x igual a 1, e intersecção com o eixo y igual a -3

30. Intersecção com o eixo x igual a -8, e intersecção com o eixo y igual a 6

31. Que passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo x

32. Que passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo y

33. Que passa pelo ponto $(1, -6)$, paralela à reta $x + 2y = 6$

34. Com intercepto y igual a 6, paralela à reta $2x + 3y + 4 = 0$

35. Que passa pelo ponto $(-1, -2)$, perpendicular à reta $2x + 5y + 8 = 0$

36. Que passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$, perpendicular à reta $4x - 8y = 1$

37–42 Ache a inclinação e a intersecção com o eixo y da reta e faça o esboço de seu gráfico.

37. $x + 3y = 0$

38. $2x - 5y = 0$

39. $y = -2$

40. $2x - 3y + 6 = 0$

41. $3x - 4y = 12$

42. $4x + 5y = 10$

43–52 Esboce a região no plano xy.

43. $\{(x, y) \mid x < 0\}$

44. $\{(x, y) \mid y > 0\}$

45. $\{(x, y) \mid xy < 0\}$

46. $\{(x, y) \mid x \geqslant 1 \text{ e } y < 3\}$

47. $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 2\}$

48. $\{(x, y) \mid |x| < 3 \text{ e } |y| < 2\}$

49. $\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4 \text{ e } x \leqslant 2\}$

50. $\{(x, y) \mid y > 2x - 1\}$

51. $\{(x, y) \mid 1 + x \leqslant y \leqslant 1 - 2x\}$

52. $\left\{(x, y) \mid -x \leqslant y < \frac{1}{2}(x + 3)\right\}$

53. Ache um ponto sobre o eixo y que seja equidistante de $(5, -5)$ e $(1, 1)$.

54. Mostre que o ponto médio do segmento de reta de $P_1(x_1, y_1)$ até $P_2(x_2, y_2)$ é

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

55. Encontre o ponto médio do segmento de reta que une os pontos dados.

(a) $(1, 3)$ e $(7, 15)$ (b) $(-1, 6)$ e $(8, -12)$

56. Ache os comprimentos das medianas do triângulo com vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ e $C(8, 2)$. (A mediana é um segmento de reta de um vértice até o ponto médio do lado oposto.)

57. Mostre que as retas $2x - y = 4$ e $6x - 2y = 10$ não são paralelas e ache a sua intersecção.

58. Mostre que as retas $3x - 5y + 19 = 0$ e $10x + 6y - 50 = 0$ são perpendiculares e ache sua intersecção.

59. Ache uma equação da mediatriz do segmento de reta com extremidades nos pontos $A(1, 4)$ e $B(7, -2)$.

60. (a) Encontre as equações dos lados do triângulo com vértices $P(1, 0)$, $Q(3, 4)$ e $R(-1, 6)$.

(b) Ache equações para as medianas desse triângulo. Onde elas se interceptam?

61. (a) Mostre que se as intersecções com os eixos x e y de uma reta são os números a e b diferentes de zero, e então a equação da reta pode ser colocada na forma

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$$

Essa equação é chamada **forma a partir das duas intersecções** da equação da reta.

(b) Use a parte (a) para encontrar a equação da reta cuja intersecção com o eixo x é 6 e cuja intersecção com o eixo y é -8.

62. Kelly parte de Winnipeg as 14 h e dirige a velocidade constante pela autoestrada Trans-Canada. Ela passa por Brandon a, a 210 km de Winnipeg, às 16 h.

(a) Expresse a distância percorrida em termos de tempo decorrido.

(b) Trace o gráfico da equação na parte (a).

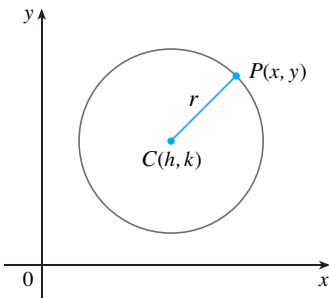
(c) Qual a inclinação desta reta? O que ela representa?

C CÔNICAS: GRÁFICOS DAS EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU

No Apêndice B vimos que uma equação $Ax + By + C = 0$, de primeiro grau ou linear representa uma reta. Nesta seção vamos discutir as equações do segundo grau, tais como

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad y = x^2 + 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad x^2 - y^2 = 1$$

que representam um círculo, uma parábola, uma elipse e uma hipérbole, respectivamente.

O gráfico de tais equações em x e y é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem aquela equação; ele dá uma representação visual da equação. Reciprocamente, dada uma curva no plano xy, podemos encontrar uma equação que a represente, isto é, uma equação satisfeita pelas coordenadas dos pontos sobre a curva e por nenhum outro ponto. Esta é a outra metade dos princípios básicos da geometria analítica conforme formulada por Descartes e Fermat. A ideia é que se uma curva geométrica pode ser representada por uma equação algébrica, então as regras da álgebra podem ser usadas para analisar o problema geométrico.

CÍRCULOS

Como um exemplo desse tipo de problema, vamos determinar uma equação do círculo com raio r e centro (h, k). Pela definição, o círculo é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ cuja distância ao centro $C(h, k)$ é r (veja a Figura 1). Assim, P está sobre o círculo se e somente se $|PC| = r$. Da fórmula da distância, temos

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

y
P(x, y)
r
C(h, k)
0
x

FIGURA 1

ou, de maneira equivalente, elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta é a equação desejada.

> **1** **Equação do Círculo** Uma equação do círculo com centro (h, k) e raio r é
>
> $$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
>
> Em particular, se o centro for a origem $(0, 0)$, a equação será
>
> $$x^2 + y^2 = r^2$$

EXEMPLO 1 Ache uma equação do círculo com raio 3 e centro $(2, -5)$.

SOLUÇÃO Da Equação 1 com $r = 3$, $h = 2$ e $k = -5$, obtemos

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$ □

EXEMPLO 2 Esboce o gráfico da equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ mostrando primeiro que ela representa um círculo e então encontrando seu centro e raio.

SOLUÇÃO Vamos agrupar primeiro os termos em x e y da seguinte forma:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) = -7$$

Então, completando o quadrado dentro de cada parêntese e somando as constantes apropriadas a ambos os lados da equação, temos:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9$$

ou
$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 3$$

Comparando essa equação com a equação-padrão do círculo (1), vemos que $h = -1$, $k = 3$ e $r = \sqrt{3}$; assim, a equação dada representa um círculo com centro $(-1, 3)$ e raio $\sqrt{3}$. Ele está esboçado na Figura 2.

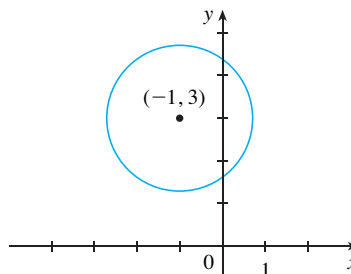



FIGURA 2
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

PARÁBOLAS

As propriedades geométricas das parábolas serão revisadas na Seção 10.5, no Volume II. Aqui, consideraremos uma parábola como um gráfico de uma equação da forma $y = ax^2 + bx + c$.

EXEMPLO 3 Esboce o gráfico da parábola $y = x^2$.

SOLUÇÃO Vamos fazer uma tabela de valores, marcar os pontos e depois juntá-los por uma curva suave, de modo a obter o gráfico da Figura 3.

x	$y = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

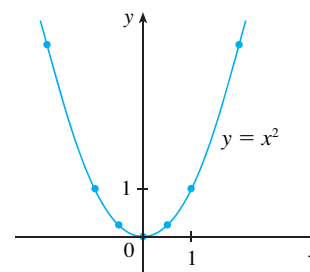



FIGURA 3 □

A Figura 4 mostra o gráfico de várias parábolas com as equações da forma $y = ax^2$ para diversos valores do número a. Em cada caso o *vértice*, o ponto onde a parábola muda de direção, é a origem. Vemos que a parábola $y = ax^2$ abre-se para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$ (como na Figura 5).

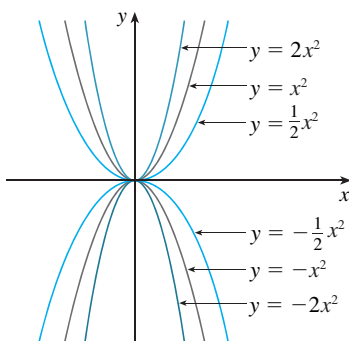



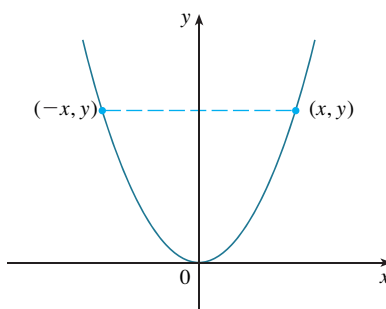
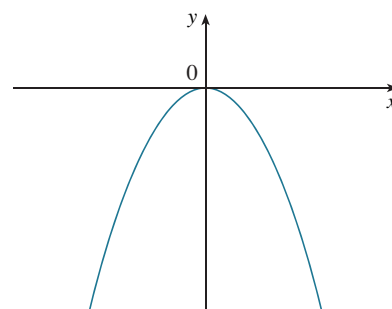
FIGURA 4

(a) $y = ax^2,\ a > 0$

(b) $y = ax^2,\ a < 0$

FIGURA 5

Observe que se (x, y) satisfizer a equação $y = ax^2$, então o mesmo acontece com $(-x, y)$. Isso corresponde ao fato geométrico de que, se a metade direita do gráfico for refletida em torno do eixo y, obteremos a metade esquerda do gráfico. Dizemos que o gráfico é **simétrico em relação ao eixo *y***.

> O gráfico de uma equação é simétrico em relação ao eixo y se a equação ficar invariante quando substituirmos x por $-x$.

Se trocarmos x e y na equação $y = ax^2$, teremos $x = ay^2$, que também representa uma parábola. (Trocar x e y significa fazer uma reflexão em torno da reta bissetriz $y = x$.) A parábola $x = ay^2$ se abre para a direita se $a > 0$ e para esquerda se $a < 0$. (Veja a Figura 6.) Dessa vez a parábola é simétrica em relação ao eixo x, pois se (x, y) satisfizer a equação $x = ay^2$, então o mesmo acontece com $(x, -y)$.

(a) $x = ay^2$, $a > 0$

(b) $x = ay^2$, $a < 0$

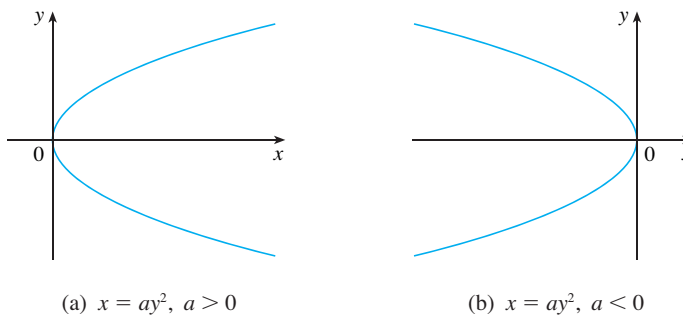



FIGURA 6

> O gráfico de uma equação é simétrico em relação ao eixo x se a equação ficar invariante quando trocarmos y por $-y$.

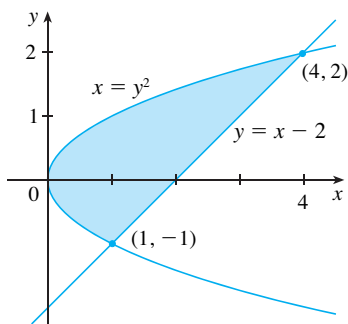



FIGURA 7

EXEMPLO 4 Esboce a região limitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $y = x - 2$.

SOLUÇÃO Vamos encontrar primeiro os pontos de intersecção resolvendo as duas equações. Substituindo $x = y + 2$ na equação $x = y^2$, vamos obter $y + 2 = y^2$, o que resulta em

$$0 = y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1)$$

de modo que $y = 2$ ou -1. Assim, os pontos de intersecção são $(4, 2)$ e $(1, -1)$ e, passando por esses dois pontos, traçamos a reta $y = x - 2$. Esboçamos então a parábola $x = y^2$ lembrando-nos da Figura 6(a) e fazendo com que a parábola passe pelos pontos $(4, 2)$ e $(1, -1)$. A região delimitada por $x = y^2$ e $y = x - 2$ significa a região finita cuja fronteira é formada por essas curvas. Ela está esboçada na Figura 7. □

ELIPSES

A curva com a equação

$$\boxed{2} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

onde a e b são números positivos é chamada **elipse** na posição-padrão. (As propriedades geométricas das elipses serão discutidas na Seção 10.5, no Volume II.) Observe que a Equação 2 fica invariante se x for substituído por $-x$ ou y por $-y$; dessa forma, a elipse é simétrica em relação aos eixos. Como uma ajuda no esboço da elipse, vamos determinar suas intersecções com os eixos.

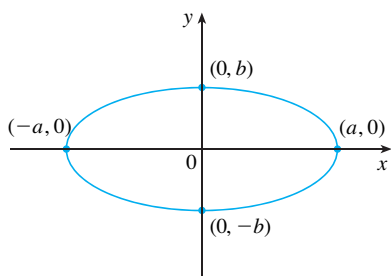



FIGURA 8
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

> As **intersecções com o eixo *x*** de um gráfico são as coordenadas x dos pontos onde ele intercepta o eixo x. Eles são encontrados fazendo-se $y = 0$ na equação do gráfico.
>
> Os **intersecções com o eixo *y*** de um gráfico são as coordenadas y dos pontos onde ele intercepta o eixo y. Eles são encontrados fazendo-se $x = 0$ na equação do gráfico.

Se fizermos $y = 0$ na Equação 2, obteremos $x^2 = a^2$ e, dessa forma, as intersecções com o eixo x são $\pm a$. Fazendo $x = 0$, obteremos $y^2 = b^2$; assim, as intersecções com o eixo y são $\pm b$. Usando essa informação, junto com a simetria, fazemos o esboço da elipse na Figura 8. Se $a = b$, a elipse é um círculo com raio a.

EXEMPLO 5 Esboce o gráfico de $9x^2 + 16y^2 = 144$.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados da equação por 144 obtemos:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

A equação está agora na forma-padrão de uma equação da elipse (2); assim, temos $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ e $b = 3$. As intersecções com o eixo x são ± 4; as intersecções com o eixo y são ± 3. O gráfico está esboçado na Figura 9.

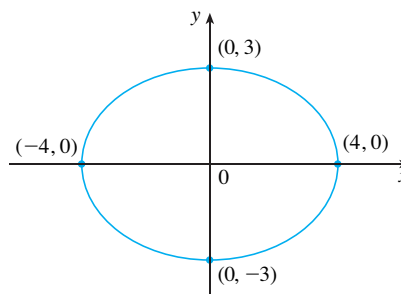



FIGURA 9
$9x^2 + 16y^2 = 144$

□

HIPÉRBOLES

A curva com a equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

é denominada **hipérbole** na posição-padrão. Novamente, a Equação 3 fica invariante quando x é substituído por $-x$ ou y é substituído por $-y$, dessa forma, a hipérbole é simétrica em relação aos eixos. Para encontrar as intersecções com o eixo x, fazemos $y = 0$ e obtemos $x^2 = a^2$ e $x = \pm a$. Porém, se fizermos $x = 0$ na Equação 3, obteremos $y^2 = -b^2$, o que é impossível; assim, não há intersecção com o eixo y. De fato, da Equação 3 obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

o que mostra que $x^2 \geqslant a^2$ e, portanto, $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Assim, temos $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$. Isso significa que a hipérbole consiste em duas partes, cada uma delas chamada *ramo*. Ela está esboçada na Figura 10.

FIGURA 10
A hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Para esboçar uma hipérbole é útil primeiro traçar suas *assíntotas*, que são as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ mostradas na Figura 10. Ambos os ramos da hipérbole tendem para

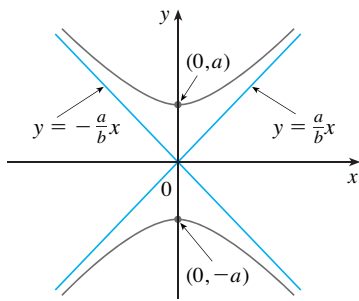



FIGURA 11
A hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

as assíntotas; isto é, ficam arbitrariamente próximos das assíntotas. Isso envolve a ideia de limite, como discutido no Capítulo 2 (veja também o Exercício 67 na Seção 4.5).

Trocando os papéis de x e y, obtemos uma equação da forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

que também representa uma hipérbole e está esboçada na Figura 11.

EXEMPLO 6 Esboce a curva $9x^2 - 4y^2 = 36$.

SOLUÇÃO Dividindo ambos os lados por 36, obtemos

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que é a equação de uma hipérbole na forma padrão (Equação 3). Visto que $a^2 = 4$, as intersecções com o eixo x são ± 2. Uma vez que $b^2 = 9$, temos $b = 3$, e as assíntotas são $y = \pm(\frac{3}{2})x$. A hipérbole está esboçada na Figura 12.

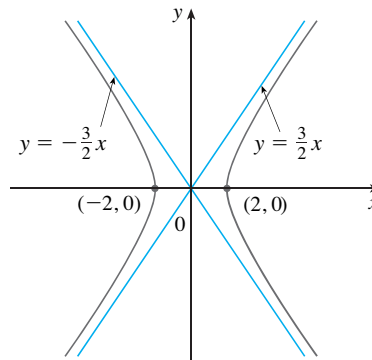



FIGURA 12
A hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$

□

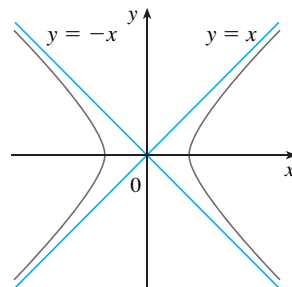
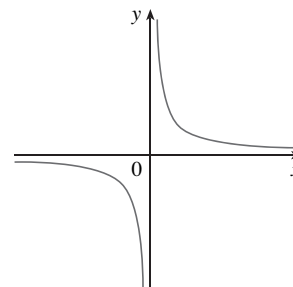
Se $b = a$, a hipérbole tem a equação $x^2 - y^2 = a^2$ (ou $y^2 - x^2 = a^2$) e é chamada *hipérbole equilátera* [veja a Figura 13(a)]. Suas assíntotas são $y = \pm x$, que são perpendiculares. Girando-se uma hipérbole equilátera em 45°, as assíntotas tornam-se os eixos x e y, e pode-se mostrar que a nova equação da hipérbole é $xy = k$, onde k é uma constante [veja a Figura 13(b)].

(b) $xy = k \quad (k > 0)$

FIGURA 13
Hipérboles equiláteras

CÔNICAS DESLOCADAS

Lembre-se de que uma equação do círculo com centro na origem e raio r é $x^2 + y^2 = r^2$, mas se o centro for o ponto (h, k), então a equação do círculo fica

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Analogamente, se tomarmos a elipse com a equação

4 $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e a transladarmos de forma que se seu centro esteja no ponto (h, k), então sua equação fica

5 $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

(Veja a Figura 14.)

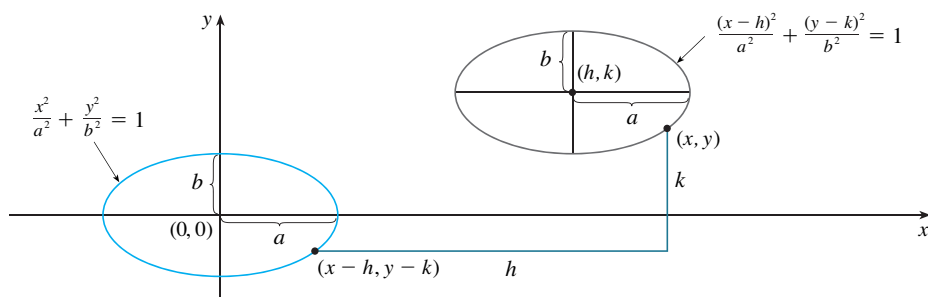



FIGURA 14

Observe que ao transladarmos a elipse, substituímos x por $x - h$ e y por $y - k$ na Equação 4 para obter a Equação 5. Usando o mesmo procedimento, deslocamos a parábola $y = ax^2$ de forma que seu vértice (a origem) torna-se o ponto (h, k), como na Figura 15. Substituindo x por $x - h$ e y por $y - k$, vemos que a nova equação é

$$y - k = a(x - h)^2 \qquad \text{ou} \qquad y = a(x - h)^2 + k$$

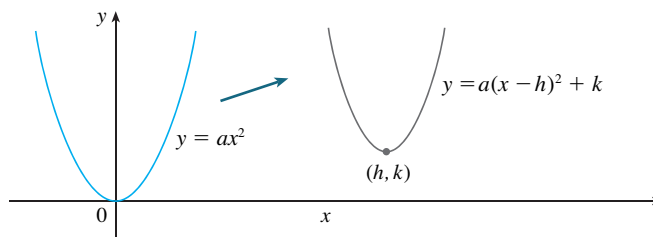



FIGURA 15

EXEMPLO 7 Esboce o gráfico da equação $y = 2x^2 - 4x + 1$.

SOLUÇÃO Primeiro vamos completar os quadrados:

$$y = 2(x^2 - 2x) + 1 = 2(x - 1)^2 - 1$$

Nessa forma vemos que a equação representa a parábola obtida deslocando-se $y = 2x^2$ tal que seu vértice seja o ponto $(1, -1)$. O gráfico está esboçado na Figura 16.

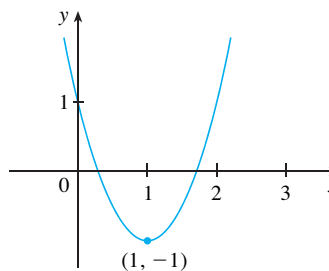
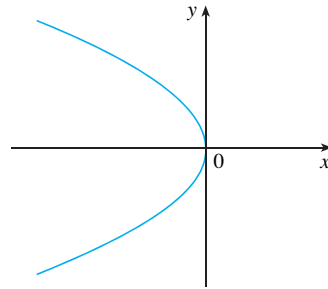
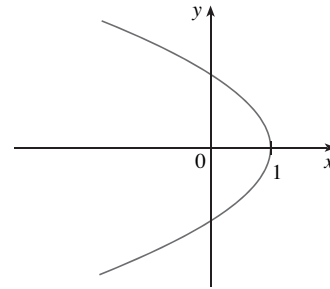



FIGURA 16
$y = 2x^2 - 4x + 1$

□

EXEMPLO 8 Esboce a curva $x = 1 - y^2$.

SOLUÇÃO Dessa vez começamos com a parábola $x = -y^2$ (como na Figura 6 com $a = -1$) e deslocamos uma unidade para a direita para obter o gráfico de $x = 1 - y^2$ (veja a Figura 17).

(a) $x = -y^2$

(b) $x = 1 - y^2$

□

C EXERCÍCIOS

1–4 Determine uma equação de um círculo que satisfaça as condições dadas.

1. Centro $(3, -1)$, raio 5

2. Centro $(-2, -8)$, raio 10

3. Centro na origem, passa em $(4, 7)$

4. Centro $(-1, 5)$, passa em $(-4, -6)$

5–9 Mostre que a equação representa um círculo e determine o centro e o raio.

5. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

6. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

7. $x^2 + y^2 + x = 0$

8. $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 1 = 0$

9. $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

10. Que condições nos coeficientes a, b e c fazem com que a equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ represente um círculo? Quando a condição for satisfeita, determine o centro e o raio do círculo.

11–32 Identifique o tipo de curva e esboce o gráfico. Não marque os pontos. Somente use os gráficos-padrão dados nas Figuras 5, 6, 8, 10 e 11 e desloque se for necessário.

11. $y = -x^2$

12. $y^2 - x^2 = 1$

13. $x^2 + 4y^2 = 16$

14. $x = -2y^2$

15. $16x^2 - 25y^2 = 400$

16. $25x^2 + 4y^2 = 100$

17. $4x^2 + y^2 = 1$

18. $y = x^2 + 2$

19. $x = y^2 - 1$

20. $9x^2 - 25y^2 = 225$

21. $9y^2 - x^2 = 9$

22. $2x^2 + 5y^2 = 10$

23. $xy = 4$

24. $y = x^2 + 2x$

25. $9(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$

26. $16x^2 + 9y^2 - 36y = 108$

27. $y = x^2 - 6x + 13$

28. $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$

29. $x = 4 - y^2$

30. $y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$

31. $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$

32. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

33–34 Esboce a região limitada pelas curvas.

33. $y = 3x$, $y = x^2$

34. $y = 4 - x^2$, $x - 2y = 2$

35. Determine uma equação da parábola com vértice $(1, -1)$ que passe pelos pontos $(-1, 3)$ e $(3, 3)$.

36. Determine uma equação da elipse com centro na origem que passe pelos pontos $(1, -10\sqrt{2}/3)$ e $(-2, 5\sqrt{5}/3)$.

37–40 Esboce o gráfico do conjunto.

37. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

38. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

39. $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2 - 1\}$

40. $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leqslant 4\}$

D TRIGONOMETRIA

ÂNGULOS

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos (abreviado por rad). O ângulo dado por uma revolução completa tem 360º, que é o mesmo que 2π rad. Portanto,

1 $$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

e

2 $$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57{,}3^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}017 \text{ rad}$$

EXEMPLO 1

(a) Determine a medida em radianos de 60º. (b) Expresse $5\pi/4$ em graus.

SOLUÇÃO

(a) Da Equação 1 ou 2 vemos que, para converter de graus para radianos, multiplicamos por $\pi/180$. Portanto,

$$60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

(b) Para converter de radianos para graus multiplicamos por $180/\pi$. Assim

$$\frac{5\pi}{4} \text{rad} = \frac{5\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 225^\circ$$ □

Em cálculo, usamos o radiano como medida dos ângulos, exceto quando explicitamente indicado. A tabela a seguir fornece a correspondência entre medidas em graus e em radianos de alguns ângulos comuns.

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

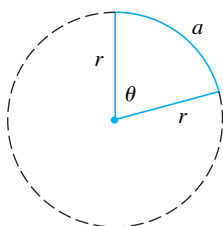



FIGURA 1

A Figura 1 mostra um setor de um círculo com ângulo central θ e raio r subtendendo um arco com comprimento a. Visto que o comprimento de arco é proporcional ao tamanho do ângulo, e uma vez que o círculo inteiro tem uma circunferência $2\pi r$ e ângulo central 2π, temos

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}$$

Isolando θ e a nesta equação, obtemos

3 $$\theta = \frac{a}{r} \qquad\qquad a = r\theta$$

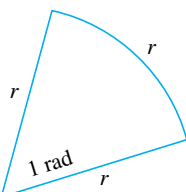



FIGURA 2

Lembre-se de que a Equação 3 é válida apenas quando θ for medido em radianos.

Em particular, fazendo $a = r$ na Equação 3, vemos que um ângulo de 1 rad é um ângulo subtendido no centro de um círculo por um arco com comprimento igual ao raio do círculo (veja a Figura 2).

EXEMPLO 2

(a) Se o raio de um círculo for 5 cm, qual o ângulo subtendido por um arco de 6 cm?

(b) Se um círculo tem raio 3 cm, qual é o comprimento de um arco subtendido por um ângulo central de $3\pi/8$ rad?

SOLUÇÃO

(a) Usando a Equação 3 com $a = 6$ e $r = 5$, vemos que o ângulo é

$$\theta = \tfrac{6}{5} = 1{,}2 \text{ rad}$$

(b) Com $r = 3$ cm e $\theta = 3\pi/8$ rad, o comprimento de arco é

$$a = r\theta = 3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{8}\text{cm}$$ □

A **posição-padrão** de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo x positivo, como na Figura 3. Um ângulo **positivo** é obtido girando-se o lado inicial no sentido anti-horário até que ele coincida com o lado final; da mesma forma, ângulos **negativos** são obtidos girando-se no sentido horário, como na Figura 4.

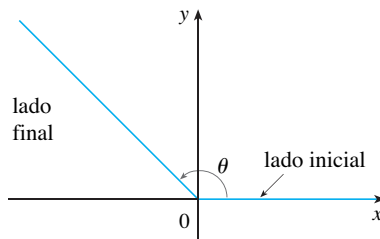



FIGURA 3 $\theta \geqslant 0$

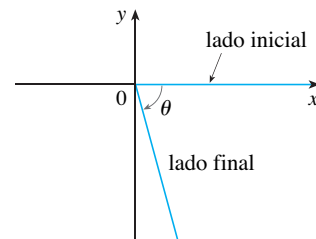



FIGURA 4 $\theta < 0$

A Figura 5 mostra vários exemplos de ângulos em posição-padrão. Observe que ângulos diferentes podem ter o mesmo lado final. Por exemplo, os ângulos $3\pi/4$, $-5\pi/4$ e $11\pi/4$ têm os mesmos lados inicial e final, pois

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$

e 2π rad representa uma revolução completa.

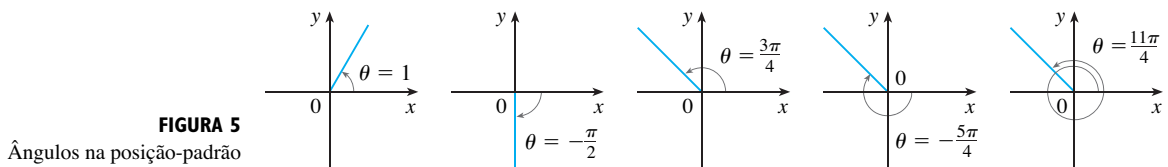
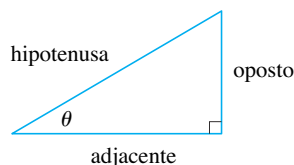



FIGURA 5
Ângulos na posição-padrão

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para um ângulo agudo θ as seis funções trigonométricas são definidas como razões entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo como a seguir (veja a Figura 6).

FIGURA 6

4

$$\text{sen}\ \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \text{cossec}\ \theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{adj}}$$

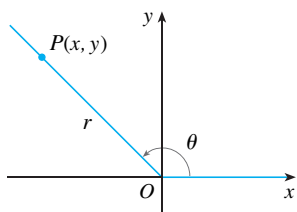
$$\text{tg}\ \theta = \frac{\text{op}}{\text{adj}} \qquad \text{cotg}\ \theta = \frac{\text{adj}}{\text{op}}$$

FIGURA 7

Essa definição não se aplica aos ângulos obtusos ou negativos, de modo que, para um ângulo geral θ na posição-padrão, tomamos $P(x, y)$ como um ponto qualquer sobre o lado final de θ e r como a distância $|OP|$, como na Figura 7. Então, definimos

5

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} \qquad \text{cossec}\ \theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\text{tg}\ \theta = \frac{y}{x} \qquad \text{cotg}\ \theta = \frac{x}{y}$$

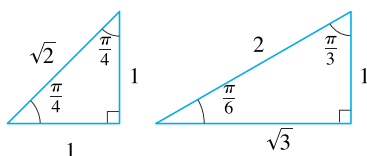
Como divisão por 0 não está definida, tg θ e sec θ não estão definidas quando $x = 0$, e cossec θ e cotg θ não estão definidas quando $y = 0$. Observe que as definições em (4) e (5) são consistentes quando θ é um ângulo agudo.

Se θ for um número, a convenção é que sen θ significa o seno do ângulo, cuja medida em *radianos* é θ. Por exemplo, a expressão sen 3 implica que estamos tratando com um ângulo de 3 rad. Ao determinar uma aproximação na calculadora para esse número, devemos nos lembrar de colocar a calculadora no modo radiano, e então obteremos

$$\text{sen}\ 3 \approx 0{,}14112$$

Para conhecer o seno do ângulo 3º, escrevemos sen 3º e, com nossa calculadora no modo grau, encontramos que

$$\text{sen}\ 3^\circ \approx 0{,}05234$$

As razões trigonométricas exatas para certos ângulos podem ser lidas dos triângulos da Figura 8. Por exemplo,

$$\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\ \frac{\pi}{4} = 1 \qquad \text{tg}\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{tg}\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

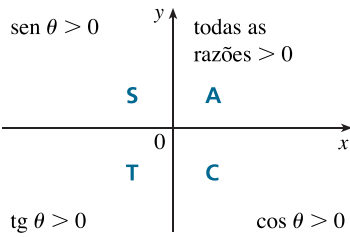
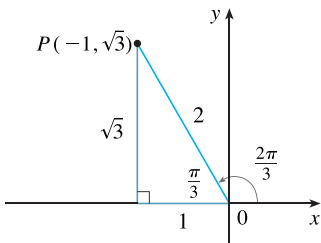



FIGURA 8

FIGURA 9

FIGURA 10

Os sinais das funções trigonométricas para ângulos em cada um dos quatro quadrantes podem ser lembrados pela regra mostrada na Figura 9 "**A**ll **S**tudents **T**ake **C**alculus".

EXEMPLO 3 Determine as razões trigonométricas para $\theta = 2\pi/3$.

SOLUÇÃO Da Figura 10 vemos que um ponto sobre a reta final para $\theta = 2\pi/3$ é $P(-1, \sqrt{3})$. Portanto, tomando

$$x = -1 \qquad y = \sqrt{3} \qquad r = 2$$

nas definições das razões trigonométricas, temos

$$\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \text{tg}\,\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\text{cossec}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\frac{2\pi}{3} = -2 \qquad \text{tg}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$ □

A tabela a seguir fornece alguns valores de sen θ e cos θ encontrados pelo método do Exemplo 3.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

FIGURA 11

EXEMPLO 4 Se $\cos\theta = \frac{2}{5}$ e $0 < \theta < \pi/2$, determine as outras cinco funções trigonométricas de θ.

SOLUÇÃO Uma vez que $\cos\theta = \frac{2}{5}$, podemos tomar a hipotenusa como tendo o comprimento igual a 5 e o lado adjacente, o comprimento igual a 2 na Figura 11. Se o lado oposto tem comprimento x, então o Teorema de Pitágoras fornece $x^2 + 4 = 25$; logo, $x^2 = 21$, $x = \sqrt{21}$. Podemos agora usar o diagrama para escrever as outras cinco funções trigonométricas:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{21}}{5} \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{cossec}\,\theta = \frac{5}{\sqrt{21}} \qquad \sec\theta = \frac{5}{2} \qquad \text{cotg}\,\theta = \frac{2}{\sqrt{21}}$$ □

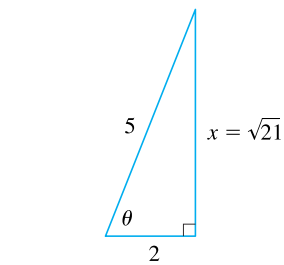



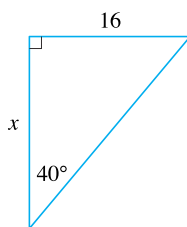
FIGURA 12

EXEMPLO 5 Use uma calculadora para aproximar o valor de x da Figura 12.

SOLUÇÃO Do diagrama vemos que

$$\text{tg}\,40° = \frac{16}{x}$$

Portanto,

$$x = \frac{16}{\text{tg}\,40°} \approx 19{,}07$$ □

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Uma identidade trigonométrica é uma relação entre as funções trigonométricas. As mais elementares são dadas a seguir, e são consequências imediatas das definições das funções trigonométricas.

6

$$\text{cossec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \text{cotg}\,\theta = \frac{1}{\text{tg}\,\theta}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \text{cotg}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

Para a próxima identidade, voltemos à Figura 7. A fórmula da distância (ou, de maneira equivalente, o Teorema de Pitágoras) nos diz que $x^2 + y^2 = r^2$. Portanto

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Demonstramos, portanto, uma das mais úteis identidades da trigonometria:

7

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$$

Se agora dividirmos ambos os lados da Equação 7 por $\cos^2\theta$ e usarmos a Equação 6, obteremos

8

$$\text{tg}^2\,\theta + 1 = \sec^2\theta$$

Analogamente, se dividirmos ambos os lados da Equação 7 por $\text{sen}^2\,\theta$, obteremos

9

$$1 + \text{cotg}^2\,\theta = \text{cossec}^2\,\theta$$

As identidades

10a

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$$

10b

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

indicam que sen e cos são funções, respectivamente, ímpar e par. Elas são facilmente demonstradas desenhando um diagrama mostrando θ e $-\theta$ na posição-padrão (veja o Exercício 39).

Uma vez que os ângulos θ e $\theta + 2\pi$ têm o mesmo lado final, temos

11

$$\text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen}\,\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Essas identidades revelam que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π.

As identidades trigonométricas restantes são todas consequências de duas identidades básicas chamadas **fórmulas da adição**:

12a

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen}\,x\cos y + \cos x\,\text{sen}\,y$$

12b

$$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y$$

As demonstrações dessas fórmulas de adição estão resumidas nos Exercícios 85, 86 e 87.

Substituindo y por $-y$ nas Equações 12a e 12b e usando as Equações 10a e 10b, obtemos as seguintes **fórmulas de subtração**:

13a $$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

13b $$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Então, dividindo as fórmulas nas Equações 12 ou 13, obtemos as fórmulas correspondentes para $\operatorname{tg}(x \pm y)$:

14a $$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

14b $$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Se fizermos $y = x$ nas fórmulas de adição (12), obteremos as **fórmulas dos ângulos duplos**:

15a $$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

15b $$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Então, usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos a seguinte forma alternativa das fórmulas dos ângulos duplos para $\cos 2x$:

16a $$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

16b $$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Se agora isolarmos $\cos^2 x$ e $\operatorname{sen}^2 x$ nestas equações, obteremos as seguintes **fórmulas do ângulo-metade**, que são úteis em cálculo integral:

17a $$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

17b $$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Finalmente, enunciamos as **fórmulas do produto**, que podem ser deduzidas das Equações 12 e 13:

18a $$\operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$$

18b $$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

18c $$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

Há muitas outras identidades trigonométricas, mas as aqui enunciadas são algumas das mais usadas no cálculo. Se você se esquecer de qualquer uma delas, lembre-se de que elas podem ser deduzidas das Equações 12a e 12b.

EXEMPLO 6 Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ tal que sen x = sen $2x$.

SOLUÇÃO Usando a fórmula do ângulo duplo (15a), reescrevemos a equação dada como

$$\text{sen}\, x = 2\,\text{sen}\, x \cos x \qquad \text{ou} \qquad \text{sen}\, x\,(1 - 2\cos x) = 0$$

Portanto, há duas possibilidades:

$$\text{sen}\, x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 - 2\cos x = 0$$

$$x = 0, \pi, 2\pi \qquad\qquad \cos x = \tfrac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

A equação dada tem cinco soluções: $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$ e 2π. □

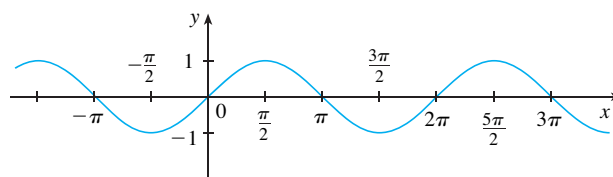
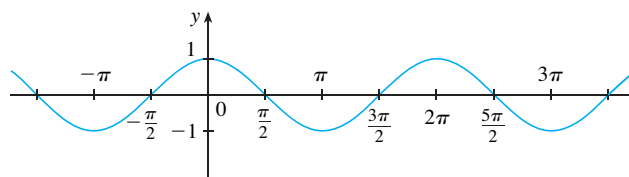
GRÁFICOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O gráfico da função $f(x)$ = sen x, mostrado na Figura 13(a), é obtido desenhando-se os pontos para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e então usando-se a periodicidade da função (da Equação 11) para completar o gráfico. Observe que os zeros da função seno ocorrem em múltiplos inteiros de π, isto é,

$$\text{sen}\, x = 0 \qquad \text{sempre que } x = n\pi, \qquad n \text{ um inteiro}$$

(a) $f(x)$ = sen x

FIGURA 13

(b) $g(x) = \cos x$

Em virtude da identidade

$$\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

(que pode ser verificada usando-se a Equação 12a), o gráfico do cosseno é obtido deslocando-se em $\pi/2$ para a esquerda o gráfico do seno [veja a Figura 13(b)]. Observe que para ambas as funções, seno e cosseno, o domínio é $(-\infty, \infty)$, e a imagem é o conjunto fechado $[-1, 1]$. Assim, para todos os valores de x, temos

$$-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

Os gráficos das quatro funções trigonométricas restantes estão mostrados na Figura 14, e seus domínios estão indicados lá. Observe que a tangente e a cotangente têm a mesma imagem $(-\infty, \infty)$, enquanto a cossecante e a secante têm a imagem $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Todas as quatro funções são periódicas: tangente e cotangente têm período π, ao passo que cossecante e secante possuem período 2π.

(a) $y = \text{tg } x$

(b) $y = \text{cotg } x$

(c) $y = \text{cossec } x$

(d) $y = \sec x$

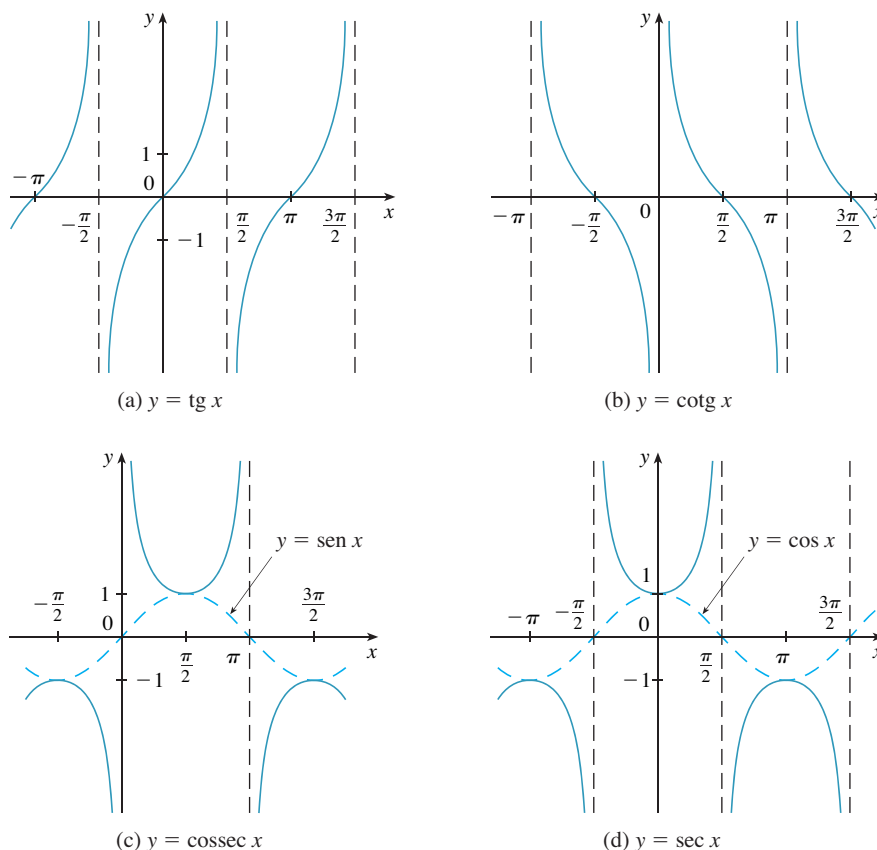



FIGURA 14

D EXERCÍCIOS

1–6 Converta de graus para radianos.

1. 210° **2.** 300° **3.** 9°

4. −315° **5.** 900° **6.** 36°

7–12 Converta de radianos para graus.

7. 4π **8.** $-\frac{7\pi}{2}$ **9.** $\frac{5\pi}{12}$

10. $\frac{8\pi}{3}$ **11.** $-\frac{3\pi}{8}$ **12.** 5

13. Determine o comprimento de um arco circular subtendido pelo ângulo de $\pi/12$ rad se o raio do círculo for de 36 cm.

14. Se um círculo tem raio de 10 cm, qual é o comprimento de arco subtendido pelo ângulo central de 72°?

15. Um círculo tem raio de 1,5 m. Qual o ângulo subtendido no centro do círculo por um arco de 1 m de comprimento?

16. Determine o raio de um setor circular com ângulo $3\pi/4$ e comprimento de arco 6 cm.

17–22 Desenhe, na posição-padrão, o ângulo cuja medida é dada.

17. 315° **18.** −150° **19.** $-\frac{3\pi}{4}$ rad

20. $\frac{7\pi}{3}$ rad **21.** 2 rad **22.** −3 rad

23–28 Determine as razões trigonométricas exatas para o ângulo cuja medida em radianos é dada.

23. $\frac{3\pi}{4}$ **24.** $\frac{4\pi}{3}$ **25.** $\frac{9\pi}{2}$

26. -5π **27.** $\dfrac{5\pi}{6}$ **28.** $\dfrac{11\pi}{4}$

29–34 Determine as razões trigonométricas restantes.

29. $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

30. $\text{tg}\,\alpha = 2, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

31. $\sec\phi = -1{,}5, \quad \frac{\pi}{2} < \phi < \pi$

32. $\cos x = -\frac{1}{3}, \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

33. $\text{cotg}\,\beta = 3, \quad \pi < \beta < 2\pi$

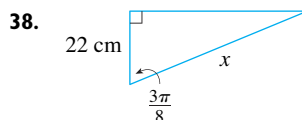
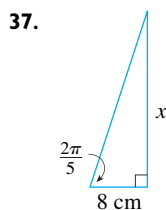
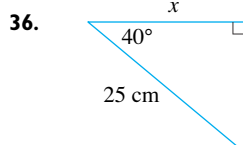
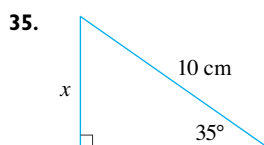
34. $\text{cossec}\,\theta = -\frac{4}{3}, \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

35–38 Determine, com cinco casas decimais corretas, o comprimento do lado chamado de x.

35.

36.

37.

38.

39–41 Demonstre cada equação.

39. (a) Equação 10a (b) Equação 10b

40. (a) Equação 14a (b) Equação 14b

41. (a) Equação 18a (b) Equação 18b
(c) Equação 18c

42–58 Demonstre a identidade.

42. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\,x$

43. $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

44. $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\,x$

45. $\text{sen}\,\theta\,\text{cotg}\,\theta = \cos\theta$

46. $(\text{sen}\,x + \cos x)^2 = 1 + \text{sen}\,2x$

47. $\sec y - \cos y = \text{tg}\,y\,\text{sen}\,y$

48. $\text{tg}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \text{tg}^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha$

49. $\text{cotg}^2\theta + \sec^2\theta = \text{tg}^2\theta + \text{cossec}^2\theta$

50. $2\,\text{cossec}\,2t = \sec t\,\text{cossec}\,t$

51. $\text{tg}\,2\theta = \dfrac{2\,\text{tg}\,\theta}{1 - \text{tg}^2\theta}$

52. $\dfrac{1}{1 - \text{sen}\,\theta} + \dfrac{1}{1 + \text{sen}\,\theta} = 2\sec^2\theta$

53. $\text{sen}\,x\,\text{sen}\,2x + \cos x\cos 2x = \cos x$

54. $\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y = \text{sen}(x + y)\,\text{sen}(x - y)$

55. $\dfrac{\text{sen}\,\phi}{1 - \cos\phi} = \text{cossec}\,\phi + \text{cotg}\,\phi$

56. $\text{tg}\,x + \text{tg}\,y = \dfrac{\text{sen}(x + y)}{\cos x\cos y}$

57. $\text{sen}\,3\theta + \text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,2\theta\cos\theta$

58. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

59–64 Se $\text{sen}\,x = \frac{1}{3}$ e $\sec y = \frac{5}{4}$, onde x e y estão entre 0 e $\pi/2$, calcule a expressão.

59. $\text{sen}(x + y)$ **60.** $\cos(x + y)$

61. $\cos(x - y)$ **62.** $\text{sen}(x - y)$

63. $\text{sen}\,2y$ **64.** $\cos 2y$

65–72 Encontre todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a equação.

65. $2\cos x - 1 = 0$ **66.** $3\,\text{cotg}^2 x = 1$

67. $2\,\text{sen}^2 x = 1$ **68.** $|\text{tg}\,x| = 1$

69. $\text{sen}\,2x = \cos x$ **70.** $2\cos x + \text{sen}\,2x = 0$

71. $\text{sen}\,x = \text{tg}\,x$ **72.** $2 + \cos 2x = 3\cos x$

73–76 Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfaçam a desigualdade.

73. $\text{sen}\,x \leqslant \frac{1}{2}$ **74.** $2\cos x + 1 > 0$

75. $-1 < \text{tg}\,x < 1$ **76.** $\text{sen}\,x > \cos x$

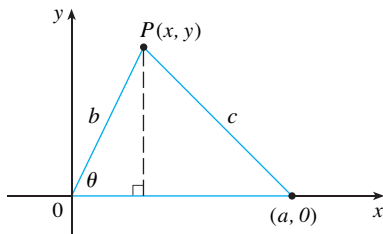
77–82 Faça o gráfico da função começando com o gráfico das Figuras 13 e 14 e aplicando as transformações da Seção 1.3 quando apropriado.

77. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **78.** $y = \text{tg}\,2x$

79. $y = \frac{1}{3}\,\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **80.** $y = 1 + \sec x$

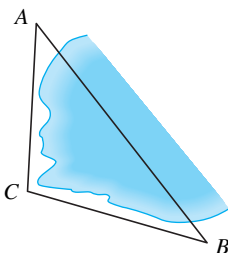
81. $y = |\text{sen}\,x|$ **82.** $y = 2 + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

83. Demonstre a **Lei dos Cossenos**: se um triângulo tiver lados com comprimentos a, b e c, e θ for um ângulo entre os lados com comprimentos a e b, então

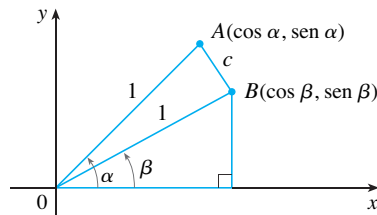
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

[*Sugestão*: introduza um sistema de coordenadas tal que θ esteja na posição-padrão, como na figura. Expresse x e y em termos de θ e use a fórmula da distância para calcular c.]

84. Para determinar a distância $|AB|$ sobre uma pequena enseada, um ponto C é colocado como na figura, e as seguintes medidas são registradas:

$\angle C = 103°$ $\quad |AC| = 820$ m $\quad |BC| = 910$ m

Use a Lei dos Cossenos do Exercício 83 para determinar a distância pedida.

85. Use a figura para demonstrar a fórmula da subtração.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

[*Sugestão*: Calcule c^2 de duas maneiras (usando a Lei dos Cossenos do Exercício 83 e também a fórmula da distância) e compare as duas expressões.]

86. Use a fórmula do Exercício 85 para demonstrar a fórmula da subtração para cosseno (12b).

87. Use a fórmula da adição para cosseno e as identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

para demonstrar a fórmula da subtração para a função seno.

88. Mostre que a área de um triângulo com lados de comprimentos a e b e com o ângulo entre eles sendo θ é

$$A = \tfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$$

89. Determine a área do triângulo ABC, correta até cinco casas decimais, se

$|AB| = 10$ cm $\quad |BC| = 3$ cm $\quad \angle ABC = 107°$

E NOTAÇÃO DE SOMATÓRIA (OU NOTAÇÃO SIGMA)

Uma maneira conveniente de escrever as somas usa a letra grega $\sum$ (sigma maiúsculo, correspondente à nossa letra S) e é chamada **notação sigma**, ou de **notação de somatória**.

Isso nos diz para terminar em $i = n$.
Isso nos diz para somar. $\quad \sum_{i=m}^{n} a_i$
Isso nos diz para iniciar em $i = m$.

1 DEFINIÇÃO Se $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ forem números reais e m e n, inteiros tal que $m \leqslant n$, então

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Com a notação de função, a Definição 1 pode ser escrita como

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

Assim, o símbolo $\sum_{i=m}^{n}$ indica uma soma na qual a letra i (denominada **índice da somatória**) assume valores inteiros consecutivos começando em m e terminando em n, isto é, m, $m + 1, \ldots, n$. Outras letras também podem ser usadas como índice da somatória.

EXEMPLO 1

(a) $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

(b) $\sum_{i=3}^{n} i = 3 + 4 + 5 + \cdots + (n-1) + n$

(c) $\sum_{j=0}^{5} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$

(d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

(e) $\sum_{i=1}^{3} \frac{i-1}{i^2+3} = \frac{1-1}{1^2+3} + \frac{2-1}{2^2+3} + \frac{3-1}{3^2+3} = 0 + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{13}{42}$

(f) $\sum_{i=1}^{4} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$ □

EXEMPLO 2 Escreva a soma $2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ na notação de somatória.

SOLUÇÃO Não há uma maneira única de se escrever uma soma na notação de somatória. Poderíamos escrever

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=2}^{n} i^3$$

ou

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^3$$

ou

$$2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)^3$$ □

O teorema a seguir apresenta três regras simples para se trabalhar com a notação sigma.

2 TEOREMA Se c for uma constante qualquer (isto é, não depender de i), então

(a) $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$

(b) $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

(c) $\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$

DEMONSTRAÇÃO Para ver por que essas regras são verdadeiras, devemos escrever ambos os lados na forma expandida. A regra (a) é tão-somente a propriedade distributiva dos números reais:

$$ca_m + ca_{m+1} + \cdots + ca_n = c(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

A regra (b) segue das propriedades associativa e comutativa:

$$(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \cdots + (a_n + b_n)$$
$$= (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n)$$

A regra (c) é demonstrada de modo análogo. □

EXEMPLO 3 Determine $\sum_{i=1}^{n} 1$.

SOLUÇÃO

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termos}} = n$$

□

EXEMPLO 4 Demonstre a fórmula para a soma dos n primeiros inteiros positivos.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUÇÃO Essa fórmula pode ser demonstrada por indução matemática (veja a página 81) ou pelo método a seguir, usado pelo matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855) quando ele tinha 10 anos de idade, para escrever a soma S duas vezes, uma na ordem usual e a outra na ordem invertida:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$$

Somando-se verticalmente todas as colunas, obtemos

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

Do lado direito existem n termos, cada um dos quais é $n + 1$; portanto,

$$2S = n(n+1) \qquad \text{ou} \qquad S = \frac{n(n+1)}{2}$$ □

EXEMPLO 5 Demonstre a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

SOLUÇÃO 1 Seja S a soma desejada. Começamos com a *soma telescópica*:

A maioria dos termos se cancela em pares

$$\sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] = (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \cdots + [(n+1)^3 - n^3]$$

$$= (n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^3 + 3n$$

Por outro lado, usando o Teorema 2 e os Exemplos 3 e 4, temos

$$\sum_{i=1}^{n} [(1+i)^3 - i^3] = \sum_{i=1}^{n} [3i^2 + 3i + 1] = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 3S + 3\frac{n(n+1)}{2} + n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Assim, temos

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Isolando S nessa equação, obtemos

$$3S = n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

ou

$$S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

■ PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Seja S_n uma afirmativa envolvendo o inteiro positivo n. Suponha que

1. S_1 é verdadeira.
2. Se S_k for verdadeira, então S_{k+1} é verdadeira.

Então S_n é verdadeira para todo inteiro positivo n.

■ Veja as páginas 66 e 68 para uma discussão mais completa da indução matemática.

SOLUÇÃO 2 Seja S_n a fórmula dada.

1. S_1 é verdadeira, pois $\quad 1^2 = \dfrac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$

2. Suponha que S_k seja verdadeira; isto é,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Então,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\,\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6}$$

$$= (k+1)\,\frac{2k^2 + 7k + 6}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

Logo S_{k+1} é verdadeira.

Pelo Princípio da Indução Matemática, S_n é verdadeira para todo n. □

Vamos agrupar os resultados dos Exemplos 3, 4 e 5 com um resultado similar para cubos (veja os Exercícios 37-40) como o Teorema 3. Essas fórmulas são necessárias para encontrar áreas e calcular integrais no Capítulo 5.

3 TEOREMA Seja c uma constante e n um inteiro positivo. Então,

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = nc$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

EXEMPLO 6 Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3)$.

SOLUÇÃO Usando os Teoremas 2 e 3, temos

$$\sum_{i=1}^{n} i(4i^2 - 3) = \sum_{i=1}^{n} (4i^3 - 3i) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 3\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)[2n(n+1) - 3]}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 3)}{2}$$ □

■ O tipo de cálculo do Exemplo 7 ocorre no Capítulo 5, quando calculamos áreas.

EXEMPLO 7 Ache $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right]$.

SOLUÇÃO

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{3}{n^3} i^2 + \frac{3}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n} \cdot n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) + 3\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 3\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 = 4$$ □

E EXERCÍCIOS

1–10 Escreva a soma na forma expandida.

1. $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{i}$

2. $\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$

3. $\sum_{i=4}^{6} 3^i$

4. $\sum_{i=4}^{6} i^3$

5. $\sum_{k=0}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$

6. $\sum_{k=5}^{8} x^k$

7. $\sum_{i=1}^{n} i^{10}$

8. $\sum_{j=n}^{n+3} j^2$

9. $\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j$

10. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$

11–20 Escreva a soma na notação sigma.

11. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10$

12. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$

13. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{19}{20}$

14. $\frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} + \frac{6}{10} + \cdots + \frac{23}{27}$

15. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

16. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$

17. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

18. $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$

19. $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

20. $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$

21–35 Determine o valor da soma.

21. $\sum_{i=4}^{8} (3i - 2)$

22. $\sum_{i=3}^{6} i(i + 2)$

23. $\sum_{j=1}^{6} 3^{j+1}$

24. $\sum_{k=0}^{8} \cos k\pi$

25. $\sum_{n=1}^{20} (-1)^n$

26. $\sum_{i=1}^{100} 4$

27. $\sum_{i=0}^{4} (2^i + i^2)$

28. $\sum_{i=-2}^{4} 2^{3-i}$

29. $\sum_{i=1}^{n} 2i$

30. $\sum_{i=1}^{n} (2 - 5i)$

31. $\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 3i + 4)$

32. $\sum_{i=1}^{n} (3 + 2i)^2$

33. $\sum_{i=1}^{n} (i + 1)(i + 2)$

34. $\sum_{i=1}^{n} i(i + 1)(i + 2)$

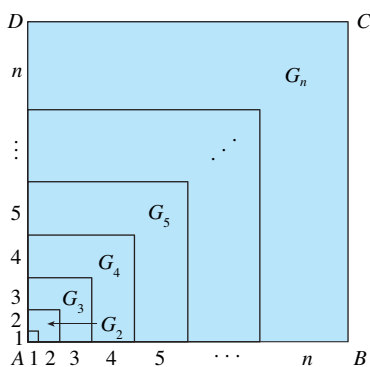
35. $\sum_{i=1}^{n} (i^3 - i - 2)$

36. Determine o número n tal que $\sum_{i=1}^{n} i = 78$.

37. Demonstre a fórmula (b) do Teorema 3.

38. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando indução matemática.

39. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando um método similar àquele do Exemplo 5, Solução 1 [comece com $(1+i)^4 - i^4$].

40. Demonstre a fórmula (e) do Teorema 3 usando o método a seguir, publicado por Abu Bekr Mohammed ibn Alhusain Alkarchi por volta do ano 1010. A figura mostra um quadrado $ABCD$ nos quais os lados AB e AD foram divididos em segmentos de comprimento $1, 2, 3, \ldots, n$. Assim, o lado do quadrado tem comprimento $n(n+1)/2$; logo, a área é $[n(n+1)/2]^2$. Mas a área é também a soma das áreas dos n "gnomons" $G_1, G_2, \ldots, G_n$ mostrados na figura. Demonstre que a área de G_i é i^3 e conclua que a fórmula (e) é verdadeira.

41. Calcule cada soma telescópica.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} [i^4 - (i-1)^4]$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} (5^i - 5^{i-1})$

(c) $\displaystyle\sum_{i=3}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})$

42. Demonstre a desigualdade triangular generalizada.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

43–46 Determine cada limite.

43. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$

44. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 1\right]$

45. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 5\left(\frac{2i}{n}\right)\right]$

46. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}\left[\left(1+\frac{3i}{n}\right)^3 - 2\left(1+\frac{3i}{n}\right)\right]$

47. Demonstre a fórmula para a soma de uma série geométrica finita com o primeiro termo a e razão $r \neq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$

48. Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{2^{i-1}}$.

49. Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i + 2^i)$.

50. Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} (i+j)\right]$.

F DEMONSTRAÇÕES DOS TEOREMAS

Neste apêndice apresentamos as demonstrações de vários teoremas que estão enunciados na parte principal do texto. As seções nas quais eles ocorrem estão indicadas na margem.

SEÇÃO 2.3

PROPRIEDADES DOS LIMITES Suponha que c seja uma constante e que os limites

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

existam. Então

1. $\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$

2. $\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = L - M$

3. $\displaystyle\lim_{x\to a} [cf(x)] = cL$

4. $\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = LM$

5. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ se $M \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 4 Dado $\varepsilon > 0$, queremos determinar $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$$

A fim de obter termos que contenham $|f(x) - L|$ e $|g(x) - M|$, adicionamos e subtraímos $Lg(x)$ como segue:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\
&= |[f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M]| \\
&\leqslant |[f(x) - L]g(x)| + |L[g(x) - M]| \qquad \text{(Desigualdade Triangular)} \\
&= |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M|
\end{aligned}$$

Queremos fazer cada um desses termos menores que $\varepsilon/2$.

Uma vez que $\lim_{x\to a} g(x) = M$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)}$$

Também, há um número $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então

$$|g(x) - M| < 1$$

e, portanto,

$$|g(x)| = |g(x) - M + M| \leqslant |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|$$

Uma vez que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, há um número $\delta_3 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_3 \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Se $0 < |x - a| < \delta$, então temos $0 < |x - a| < \delta_1$, $0 < |x - a| < \delta_2$ e $0 < |x - a| < \delta_3$; logo, podemos combinar as desigualdades para obter

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| &\leqslant |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(1 + |M|)}(1 + |M|) + |L|\frac{\varepsilon}{2(1 + |L|)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$. □

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 3 Se tomarmos $g(x) = c$ na Propriedade 4, obteremos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} [cf(x)] = \lim_{x\to a} [g(x)f(x)] &= \lim_{x\to a} g(x) \cdot \lim_{x\to a} f(x) \\
&= \lim_{x\to a} c \cdot \lim_{x\to a} f(x) \\
&= c \lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{(pela Propriedade 7)}
\end{aligned}$$

□

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 2 Usando as Propriedades 1 e 3 com $c = -1$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x\to a} [f(x) + (-1)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a}(-1)g(x) \\
&= \lim_{x\to a} f(x) + (-1)\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)
\end{aligned}$$

□

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 5 Primeiro vamos mostrar que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

Para fazer isso devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon$$

Observe que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|}$$

Sabemos que podemos tornar o numerador pequeno. Mas também precisamos saber que o denominador não é pequeno quando x está próximo de a. Uma vez que $\lim_{x \to a} g(x) = M$, existe um número $\delta_1 > 0$ tal que, se $0 < |x - a| < \delta_1$, teremos

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |M| &= |M - g(x) + g(x)| \leqslant |M - g(x)| + |g(x)| \\ &< \frac{|M|}{2} + |g(x)| \end{aligned}$$

Isso mostra que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |g(x)| > \frac{|M|}{2}$$

Então, para esses valores de x,

$$\frac{1}{|Mg(x)|} = \frac{1}{|M|\,|g(x)|} < \frac{1}{|M|} \cdot \frac{2}{|M|} = \frac{2}{M^2}$$

Além disso, há $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad \text{então} \qquad |g(x) - M| < \frac{M^2}{2}\varepsilon$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, para $0 < |x - a| < \delta$, temos

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|Mg(x)|} < \frac{2}{M^2} \frac{M^2}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

Segue que $\lim_{x \to a} 1/g(x) = 1/M$. Finalmente, usando a Propriedade 4, obtemos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$ □

2 TEOREMA Se $f(x) \leqslant g(x)$ para todo x em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

então $L \leqslant M$.

DEMONSTRAÇÃO Usamos o método de demonstração por contradição. Suponha, se possível, que $L > M$. A Propriedade 2 dos limites nos diz que

$$\lim_{x \to a} [g(x) - f(x)] = M - L$$

Portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < \varepsilon$$

Em particular, tomando $\varepsilon = L - M$ (observando que $L - M > 0$ por hipótese), temos um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |[g(x) - f(x)] - (M - L)| < L - M$$

Uma vez que $a \leqslant |a|$ para qualquer número a, temos

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad [g(x) - f(x)] - (M - L) < L - M$$

que se simplifica para

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad g(x) < f(x)$$

Mas isso contradiz o fato de que $f(x) \leqslant g(x)$. Assim, a desigualdade $L > M$ deve ser falsa. Portanto, $L \leqslant M$. □

3 O TEOREMA DO CONFRONTO Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo x que esteja em um intervalo aberto que contenha a (exceto possivelmente em a) e se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então
$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $\varepsilon > 0$ dado. Uma vez que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, há um número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon$$

isto é,

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad \text{então} \qquad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} h(x) = L$, há um número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad \text{então} \qquad |h(x) - L| < \varepsilon$$

isto é,

$$\text{se} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad \text{então} \qquad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $0 < |x - a| < \delta$, então $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x - a| < \delta_2$, de modo que

$$L - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon$$

Em particular,
$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

de modo que $|g(x) - L| < \varepsilon$. Assim, $\lim_{x \to a} g(x) = L$. □

SEÇÃO 2.5

TEOREMA Se f for uma função contínua injetora definida em um intervalo (a, b), então sua função inversa f^{-1} também é contínua.

DEMONSTRAÇÃO Primeiro, mostramos que se f for tanto injetora quanto contínua em (a, b), então ela precisa ser ou crescente ou decrescente em (a, b). Se ela não fosse nem crescente nem decrescente, então existiriam números x_1, x_2, e x_3 em (a, b) com $x_1 < x_2 < x_3$ tal que $f(x_2)$ não está entre $f(x_1)$ e $f(x_3)$. Existem duas possibilidades: (1) $f(x_3)$ está entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ ou (2) $f(x_1)$ está entre $f(x_2)$ e $f(x_3)$. (Desenhe uma figura.) No caso (1), aplicamos o Teorema do Valor Intermediário à função contínua f para obter um número c entre x_1 e x_2 tal que $f(c) = f(x_3)$. No caso (2), o Teorema do Valor Intermediário dá um número c entre x_2 e x_3 tal que $f(c) = f(x_1)$. Em ambos os casos, contradissemos o fato de f ser injetora.

Vamos supor, para fixarmos uma situação, que f seja crescente em (a, b). Tomamos qualquer número y_0 no domínio de f^{-1} e fazemos $f^{-1}(y_0) = x_0$; ou seja, x_0 é o número em (a, b) tal que $f(x_0) = y_0$. Para mostrar que f^{-1} é contínua em y_0 tomamos qualquer $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ esteja contido no intervalo (a, b). Como f é crescente, ela leva os números no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ nos números no intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ e f^{-1} inverte a correspondência. Se denotarmos por δ o menor dos números $\delta_1 = y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$ e $\delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - y_0$, então o intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ está contido no intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$ e assim é levado no intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ por f^{-1}. (Veja o diagrama de flechas na Figura 1.) Portanto, encontramos um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad |y - y_0| < \delta \quad \text{então} \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

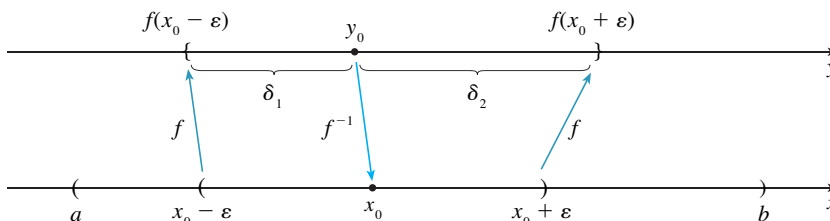



FIGURA 1

Isto mostra que $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$ e assim f^{-1} é contínua em seu domínio. □

8 **TEOREMA** Se f for contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $\varepsilon > 0$ dado. Queremos encontrar um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$$

Uma vez que f é contínua em b, temos

$$\lim_{y \to b} f(y) = f(b)$$

logo existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |y - b| < \delta_1 \quad \text{então} \quad |f(y) - f(b)| < \varepsilon$$

Uma vez que $\lim_{x \to a} g(x) = b$, há $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |g(x) - b| < \delta_1$$

Combinando essas duas afirmações, vemos que sempre que $0 < |x - a| < \delta$, temos $|g(x) - b| < \delta_1$, que implica que $|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon$. Desta forma, demonstramos que $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. □

SEÇÃO 3.3

A demonstração do resultado a seguir foi prometida ao demonstrarmos que $\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$.

> **TEOREMA** Se $0 < \theta < \pi/2$, então $\theta \leqslant \text{tg}\,\theta$.

DEMONSTRAÇÃO A Figura 2 mostra um setor de um círculo com centro O, ângulo central θ e raio $r = 1$. Então,

$$|AD| = |OA|\,\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,\theta$$

FIGURA 2

Aproximamos o arco AB por um polígono inscrito que consiste em n segmentos de reta iguais e tomamos um segmento típico PQ. Prolongamos os segmentos OP e OQ para encontrar sobre a reta AD os pontos R e S. Traçamos, então, $RT \| PQ$ como na Figura 2. Observe que

$$\angle RTO = \angle PQO < 90^\circ$$

e, dessa forma, $\angle RTS > 90^\circ$. Portanto, temos

$$|PQ| < |RT| < |RS|$$

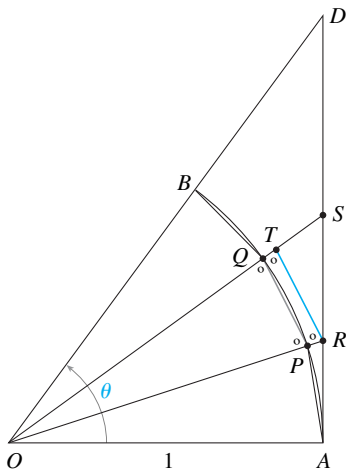
Se adicionarmos as n desigualdades semelhantes a essa, obteremos

$$L_n < |AD| = \text{tg}\,\theta$$

onde L_n é o comprimento do polígono inscrito. Assim, pelo Teorema 2.3.2, temos

$$\lim_{n \to \infty} L_n \leqslant \text{tg}\,\theta$$

Mas o comprimento do arco foi definido na Equação 8.1.1 como o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos, de modo que

$$\theta = \lim_{n \to \infty} L_n \leqslant \text{tg}\,\theta$$

SEÇÃO 4.3

> **TESTE DA CONCAVIDADE**
> (a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para cima em I
> (b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.

DEMONSTRAÇÃO (a) Seja a um número qualquer em I. Precisamos mostrar que a curva $y = f(x)$ fica acima da reta tangente no ponto $(a, f(a))$. A equação dessa tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

FIGURA 3

Assim, devemos mostrar que

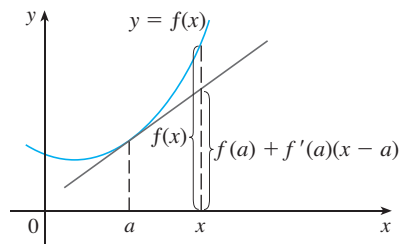
$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

qualquer que seja $x \in I$ $(x \neq a)$ (veja a Figura 3).

Vamos considerar primeiro o caso onde $x > a$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f no intervalo $[a, x]$, obteremos um número c onde $a < c < x$, tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

Uma vez que $f'' > 0$ em I sabemos do Teste Crescente/Decrescente que f' é crescente em I. Assim, uma vez que $a < c$, temos

$$f'(a) < f'(c)$$

de modo que, multiplicando essa desigualdade pelo número positivo $x - a$, obtemos

2 $$f'(a)(x - a) < f'(c)(x - a)$$

Somando agora $f(a)$ a ambos os lados dessa desigualdade, obtemos:

$$f(a) + f'(a)(x - a) < f(a) + f'(c)(x - a)$$

Mas, da Equação 1, temos $f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$. Dessa forma, essa desigualdade fica

3 $$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

que é o que queríamos demonstrar.

Para o caso onde $x < a$, temos $f'(c) < f'(a)$, mas a multiplicação pelo número negativo $x - a$ inverte o sinal da desigualdade; assim, obtemos (2) e (3) como anteriormente. □

SEÇÃO 4.4

A fim de dar a demonstração da Regra de L'Hôspital prometida precisamos, primeiro, de uma generalização do Teorema do Valor Médio. O nome do teorema a seguir é uma homenagem ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

1 **TEOREMA DE VALOR MÉDIO DE CAUCHY** Suponhamos que as funções f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), sendo $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a, b). Então existe um número c em (a, b) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Observe que se considerarmos o caso especial no qual $g(x) = x$, então $g'(c) = 1$ e o Teorema 1 é exatamente o Teorema do Valor Médio Comum. Além disso, o Teorema 1 pode ser demonstrado de forma similar. Perceba que tudo o que devemos fazer é mudar a função h dada pela Equação 4.2.4 para a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,[g(x) - g(a)]$$

e então aplicar o Teorema de Rolle como anteriormente.

REGRA DE L'HÔSPITAL Suponhamos que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponhamos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que $$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.) Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞, ou $-\infty$).

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DE L'HÔSPITAL Estamos supondo que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Seja

$$L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Devemos mostrar que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. Definimos

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$

Então F é contínua em I, uma vez que f é contínua em $\{x \in I \mid x \neq a\}$ e

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 = F(a)$$

Da mesma maneira, G é contínua em I. Seja $x \in I$ e $x > a$. Então F e G são contínuas em $[a, x]$ e deriváveis em (a, x), e $G' \neq 0$ ali (uma vez que $F' = f'$ e $G' = g'$). Portanto, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe um número y tal que $a < y < x$ e

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Aqui usamos o fato de que, por definição, $F(a) = 0$ e $G(a) = 0$. Agora, se fizermos $x \to a^+$, então $y \to a^+$ (uma vez que $a < y < x$). Portanto

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

Um argumento análogo mostra que o limite lateral à esquerda é também L. Logo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Isso demonstra a Regra de L'Hôspital quando a é finito.

Se a for infinito, vamos fazer $t = 1/x$. Então $t \to 0^+$ quando $x \to \infty$; assim temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} \qquad \text{(pela Regra de L'Hôspital para } a \text{ finito)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \square$$

Para demonstrar o Teorema 11.8.3, precisamos primeiro dos seguintes resultados.

TEOREMA

1. Se uma série de potências $\sum c_n x^n$ converge quando $x = b$ (onde $b \neq 0$), então ela converge sempre que $|x| < |b|$.

2. Se uma série de potências $\sum c_n x^n$ diverge quando $x = d$ (onde $d \neq 0$), então ela diverge sempre que $|x| > |d|$.

DEMONSTRAÇÃO DE 1 Suponha que $\sum c_n b^n$ convirja. Então, pelo Teorema 11.2.6, temos $\lim_{n\to\infty} c_n b^n = 0$. De acordo com a Definição 11.2.2 com $\varepsilon = 1$, existe um inteiro positivo N tal que $|c_n b^n| < 1$ sempre que $n \geq N$. Assim, para $n \geq N$, temos

$$|c_n x^n| = \left| \frac{c_n b^n x^n}{b^n} \right| = |c_n b^n| \left| \frac{x}{b} \right|^n < \left| \frac{x}{b} \right|^n$$

Se $|x| < |b|$, então $|x/b| < 1$, de modo que $\sum |x/b|^n$ é uma série geométrica convergente. Portanto, pelo Teste da Comparação, a série $\sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n|$ é convergente. Assim, a série $\sum c_n x^n$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente. □

DEMONSTRAÇÃO DE 2 Suponha que $\sum c_n d^n$ divirja. Se x for qualquer número real tal que $|x| > |d|$, então $\sum c_n x^n$ não pode convergir, pois, pela parte 1, a convergência de $\sum c_n x^n$ implicaria a convergência de $\sum c_n d^n$. Portanto, $\sum c_n x^n$ diverge sempre que $|x| > |d|$. □

TEOREMA Para uma série de potências $\sum c_n x^n$ ocorre uma das três possibilidades:

1. A série converge apenas quando $x = 0$.

2. A série converge para todo x.

3. Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$.

DEMONSTRAÇÃO Suponha que nem o caso 1 nem o caso 2 sejam verdade. Então, existem números b e d tais que $\sum c_n x^n$ converge para $x = b$ e diverge para $x = d$. Portanto, o conjunto $S = \{x \mid \sum c_n x^n \text{ converge}\}$ não é vazio. Pelo teorema precedente, a série diverge se $|x| > |d|$, de modo que $|x| \leqslant |d|$ para todo $x \in S$. Isto quer dizer que $|d|$ é um limitante superior para o conjunto S. Logo, pelo Axioma da Completude (veja a Seção 11.1), S tem um menor limitante superior R. Se $|x| > R$, então $x \notin S$, de modo que $\sum c_n x^n$ diverge. Se $|x| < R$, então $|x|$não é um limitante superior de S e assim existe $b \in S$ tal que $b > |x|$. Como $b \in S$, $\sum c_n b^n$ converge, de modo que pelo teorema precedente $\sum c_n x^n$ converge. □

3 **TEOREMA** Para uma série de potências $\sum c_n (x - a)^n$, ocorre uma das três possibilidades:

1. A série converge apenas quando $x = a$.

2. A série converge para todo x.

3. Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x - a| < R$ e diverge se $|x - a| > R$.

DEMONSTRAÇÃO Se fizermos a mudança de variáveis $u = x - a$, então a série de potências se torna $\sum c_n u^n$ e podemos aplicar o teorema anterior a esta série. No caso 3, temos a convergência para $|u| < R$ e a divergência para $|u| > R$. Assim, temos convergência para $|x - a| < R$ e divergência para $|x - a| > R$. □

SEÇÃO 14.3

TEOREMA DE CLAIRAUT Suponha que f esteja definida em um disco D que contém o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem ambas contínuas em D, então $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

DEMONSTRAÇÃO Para pequenos valores de h, $h \neq 0$, considere a diferença

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a + h, b)] - [f(a, b + h) - f(a, b)]$$

Observe que se fizermos $g(x) = f(x, b + h) - f(x, b)$, então

$$\Delta(h) = g(a + h) - g(a)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre a e $a + h$ tal que

$$g(a + h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b + h) - f_x(c, b)]$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio de novo, desta vez para f_x, obtemos um número d entre b e $b + h$ tal que

$$f_x(c, b + h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Combinando estas equações, obtemos

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

Se $h \to 0$, então $(c, d) \to (a, b)$, de modo que a continuidade de f_{xy} em (a, b) dá

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c, d) \to (a, b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Analogamente, escrevendo

$$\Delta(h) = [f(a + h, b + h) - f(a, b + h)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]$$

e usando o Teorema do Valor Médio duas vezes e a continuidade de f_{yx} em (a, b), obtemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

Segue que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. □

8 TEOREMA Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto de (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é derivável em (a, b).

DEMONSTRAÇÃO Seja

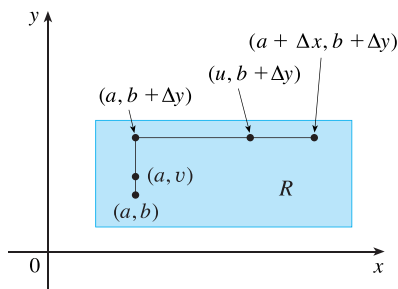
$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

De acordo com (14.4.7), para demonstrar que f é derivável em (a, b) devemos mostrar que podemos escrever Δz na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\, \Delta x + f_y(a, b)\, \Delta y + \varepsilon_1\, \Delta x + \varepsilon_2\, \Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.
Observando a Figura 4, escrevemos

$$\boxed{1} \quad \Delta z = [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)]$$

FIGURA 4

Observe que a função de uma única variável

$$g(x) = f(x, b + \Delta y)$$

está definida no intervalo $[a, a + \Delta x]$ e $g'(x) = f_x(x, b + \Delta y)$. Se aplicarmos o Teorema do Valor Médio a g, obtemos

$$g(a + \Delta x) - g(a) = g'(u)\, \Delta x$$

onde u é algum número entre a e $a + \Delta x$. Em termos de f, esta equação se torna

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) = f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x$$

Isto nos dá uma expressão para a primeira parte do lado direito da Equação 1. Para a segunda parte, tomamos $h(y) = f(a, y)$. Então h é uma função de uma única variável definida no intervalo $[b, b + \Delta y]$ e $h'(y) = f_y(a, y)$. Uma segunda aplicação do Teorema do Valor Médio então dá

$$h(b + \Delta y) - h(b) = h'(v)\,\Delta y$$

em que v é algum número entre b e $b + \Delta y$. Em termos de f, isto se torna

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f_y(a, v)\,\Delta y$$

Agora, substituímos esta expressão na Equação 1 e obtemos

$$\begin{aligned}\Delta z &= f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x + f_y(a, v)\,\Delta y \\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + [f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)]\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y \\ &\qquad + [f_y(a, v) - f_y(a, b)]\Delta y \\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y\end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon_1 = f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)$$

$$\varepsilon_2 = f_y(a, v) - f_y(a, b)$$

Como $(u, b + \Delta y) \to (a, b)$ e $(a, v) \to (a, b)$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ e como f_x e f_y são contínuas em (a, b), vemos que $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Portanto, f é derivável em (a, b). □

G O LOGARITMO DEFINIDO COMO UMA INTEGRAL

Nosso tratamento das funções exponencial e logarítmica até agora fundamentou-se em nossa intuição, que é baseada na evidência numérica e visual. (Veja as Seções 1.5, 1.6 e 3.1.) Aqui, usaremos o Teorema Fundamental do Cálculo para dar um tratamento alternativo que fornece uma fundamentação mais sólida para estas funções.

Em vez de começar com a^x e definir $\log_a x$ como sua inversa, desta vez começamos pela definição de $\ln x$ como uma integral e então definimos a função exponencial como sua inversa. Você deve ter em mente que não usamos nenhuma de nossas definições e resultados prévios relativos a funções exponencial e logarítmica.

O LOGARITMO NATURAL

Primeiro, definimos $\ln x$ como uma integral.

1 DEFINIÇÃO A **função logaritmo natural** é a função definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0$$

FIGURA 1

A existência desta função depende do fato de a integral de uma função contínua sempre existir. Se $x > 1$, então $\ln x$ pode ser interpretado geometricamente como a área sob a hipérbole $y = 1/t$ de $t = 1$ a $t = x$. (Veja a Figura 1.) Para $x = 1$, temos

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

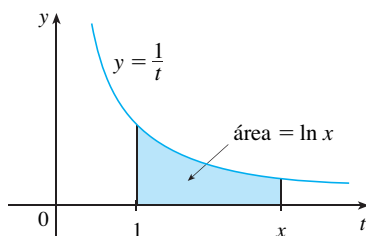
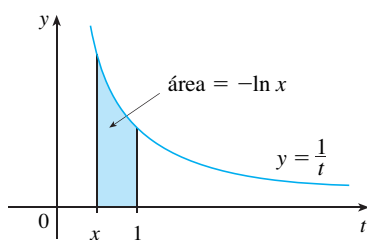



FIGURA 2

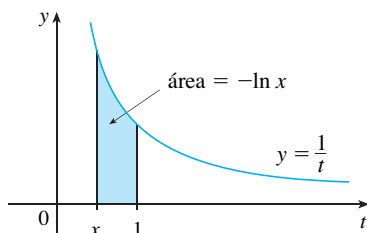



FIGURA 3

Para $0 < x < 1$,
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0$$

e assim $\ln x$ é o oposto da área mostrada na Figura 2.

EXEMPLO 1

(a) Comparando áreas, mostre que $\frac{1}{2} < \ln 2 < \frac{3}{4}$.

(b) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar o valor de $\ln 2$.

SOLUÇÃO

(a) Podemos interpretar $\ln 2$ como a área sob a curva $y = 1/t$ de 1 a 2. Da Figura 3, vemos que esta área é maior do que a área do retângulo $BCDE$ e menor do que a área do trapézio $ABCD$. Assim, temos

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 < \ln 2 < 1 \cdot \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)$$
$$\tfrac{1}{2} < \ln 2 < \tfrac{3}{4}$$

(b) Se usarmos a Regra do Ponto Médio com $f(t) = 1/t$, $n = 10$, e $\Delta t = 0{,}1$, obtemos

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \approx (0{,}1)[f(1{,}05) + f(1{,}15) + \cdots + f(1{,}95)]$$

$$= (0{,}1)\left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}15} + \cdots + \frac{1}{1{,}95}\right) \approx 0{,}693$$ □

Observe que a integral que define $\ln x$ é exatamente o tipo de integral discutida na parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo (veja a Seção 5.3). De fato, usando aquele teorema, temos

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{x}$$

e assim,

2
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Agora, usamos esta regra de derivação para demonstrar as seguintes propriedades sobre a função logaritmo.

3 PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS Se x e y forem números positivos e r for um número racional, então

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ **2.** $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ **3.** $\ln(x^r) = r\ln x$

DEMONSTRAÇÃO

1. Seja $f(x) = \ln(ax)$, onde a é uma constante positiva. Então, usando a Equação 2 e a regra da cadeia, temos

$$f'(x) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax}\cdot a = \frac{1}{x}$$

Portanto, $f(x)$ e $\ln x$ tem a mesma derivada e devem então diferir por uma constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

Colocando $x = 1$ nesta equação, obtemos $\ln a = \ln 1 + C = 0 + C = C$. Então,

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

Se agora substituirmos a constante a por qualquer número y, temos

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

2. Usando a Propriedade 1 com $x = 1/y$, temos

$$\ln \frac{1}{y} + \ln y = \ln\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = \ln 1 = 0$$

e, portanto,

$$\ln \frac{1}{y} = -\ln y$$

Usando a Propriedade 1 novamente, temos

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y$$

A demonstração da Propriedade 3 será deixada como exercício. □

Para traçar o gráfico de $y = \ln x$, primeiro determinamos seus limites:

4 (a) $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$ (b) $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

DEMONSTRAÇÃO

(a) Usando a Propriedade 3 com $x = 2$ e $r = n$ (em que n é qualquer inteiro positivo), temos $\ln(2^n) = n \ln 2$. Agora $\ln 2 > 0$, de modo que isto mostra que $\ln(2^n) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Mas $\ln x$ é uma função crescente, já que sua derivada $1/x > 0$. Portanto, $\ln x \to \infty$ quando $x \to \infty$.

(b) Se tomarmos $t = 1/x$, então $t \to \infty$ quando $x \to 0^+$. Portanto, usando (a), temos

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{t \to \infty} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to \infty} (-\ln t) = -\infty$$ □

FIGURA 4

Se $y = \ln x$, $x > 0$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

o que mostra que $\ln x$ é crescente e côncava para baixo em $(0, \infty)$. Juntando esta informação com (4), traçamos o gráfico de $y = \ln x$ na Figura 4.

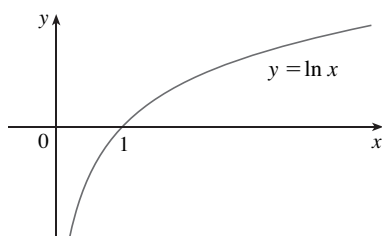
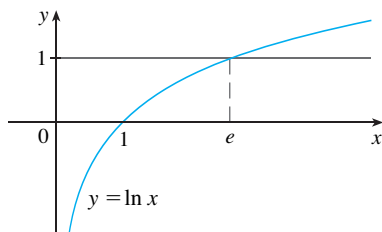
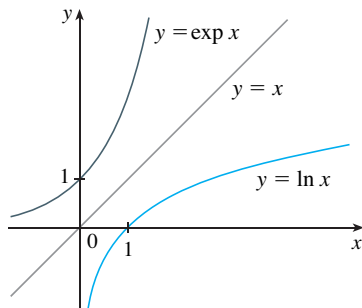
Como $\ln 1 = 0$ e $\ln x$ é uma função contínua crescente que assume valores arbitrariamente grandes, o Teorema do Valor Intermediário mostra que existe um número no qual $\ln x$ assume o valor 1. (Veja a Figura 5.) Este importante número é denotado por e.

FIGURA 5

5 DEFINIÇÃO e é o número tal que $\ln e = 1$.

Mostraremos (no Teorema 19) que esta definição é consistente com nossa definição prévia de e.

A FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

Como ln é uma função crescente, ela é injetora e, portanto, tem uma função inversa, que denotaremos por exp. Assim, de acordo com nossa definição de função inversa,

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = x$$

6 $$\exp(x) = y \iff \ln y = x$$

e as equações de cancelamento são

7 $$\exp(\ln x) = x \quad \text{e} \quad \ln(\exp x) = x$$

Em particular, temos

$$\exp(0) = 1 \qquad \text{já que } \ln 1 = 0$$
$$\exp(1) = e \qquad \text{já que } \ln e = 1$$

FIGURA 6

Obtemos o gráfico de $y = \exp x$ refletindo o gráfico de $y = \ln x$ em torno da reta $y = x$ (veja a Figura 6). O domínio da exp é a imagem de ln, ou seja, $(-\infty, \infty)$; a imagem de exp é o domínio de ln, ou seja, $(0, \infty)$.

Se r for qualquer número racional, então a terceira propriedade dos logaritmos dá

$$\ln(e^r) = r \ln e = r$$

Portanto, por (6),
$$\exp(r) = e^r$$

Logo, $\exp(x) = e^x$ sempre que x for um número racional. Isto nos leva a definir e^x, mesmo para valores irracionais de x, pela equação

$$e^x = \exp(x)$$

Em outras palavras, pelas razões apresentadas, definimos e^x como a função inversa de $\ln x$. Nesta notação, (6) se torna

8 $$e^x = y \iff \ln y = x$$

e as equações de cancelamento tornam-se

9 $$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

10 $$\ln(e^x) = x \qquad \text{para todo } x$$

FIGURA 7
A função exponencial natural

A função exponencial natural $f(x) = e^x$ é uma das mais frequentes funções no cálculo e em suas aplicações, então é importante estar familiarizado com seu gráfico (Figura 7) e suas propriedades (que decorrem do fato de que ela é a inversa da função logarítmica natural).

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL A função exponencial $f(x) = e^x$ é uma função contínua crescente com domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(0, \infty)$. Portanto, $e^x > 0$ para todo x. Além disso,

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

Assim, o eixo x é uma assíntota horizontal de $f(x) = e^x$.

Verificamos agora que f tem as outras propriedades esperadas de uma função exponencial.

11 PROPRIEDADE DOS EXPOENTES Se x e y forem números naturais e r for um racional, então

1. $e^{x+y} = e^x e^y$ **2.** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ **3.** $(e^x)^r = e^{rx}$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE 1 Usando a primeira propriedade dos logaritmos e a Equação 10, temos

$$\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y = \ln(e^{x+y})$$

Como ln é uma função injetora, segue que $e^x e^y = e^{x+y}$.

As Propriedades 2 e 3 são demonstradas de modo análogo (veja os Exercícios 6 e 7). Como veremos em breve, a Propriedade 3 na realidade vale quando r é qualquer número real. □

Demonstraremos agora a fórmula de derivação para e^x.

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad (12)$$

DEMONSTRAÇÃO A função $y = e^x$ é derivável porque ela é a inversa da função $y = \ln x$, que sabemos ser derivável, com derivada não nula. Para encontrar sua derivada, usamos o método da função inversa. Seja $y = e^x$. Então $\ln y = x$ e, derivando esta última equação implicitamente com relação a x, obtemos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$ □

FUNÇÕES EXPONENCIAIS GERAIS

Se $a > 0$ e r for qualquer número racional, então por (9) e (11),

$$a^r = (e^{\ln a})^r = e^{r \ln a}$$

Portanto, mesmo para um número irracional x, definimos

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad (13)$$

Assim, por exemplo,

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2} \approx e^{1,20} \approx 3,32$$

A função $f(x) = a^x$ é chamada **função exponencial de base *a***. Observe que a^x é positivo para todo x, pois e^x é positivo para todo x.

A Definição 13 nos permite estender uma das propriedades de logaritmos. Já sabemos que $\ln(a^r) = r \ln a$ quando r é racional. Mas se agora permitimos que r seja *qualquer* número real, temos, pela Definição 13, que

$$\ln a^r = \ln(e^{r \ln a}) = r \ln a$$

Portanto,

$$\ln a^r = r \ln a \qquad \text{para todo número real } r \qquad (14)$$

As propriedades gerais dos expoentes seguem da Definição 13 com as propriedades dos expoentes para e^x.

15 **PROPRIEDADES DOS EXPOENTES** Se x e y forem números reais e $a, b > 0$, então

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = a^x/a^y$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

DEMONSTRAÇÃO

1. Usando a Definição 13 e as propriedades dos expoentes para e^x, temos

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a}$$

$$= e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y$$

2. Usando a Equação 14, obtemos

$$(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{yx \ln a} = e^{xy \ln a} = a^{xy}$$

As demonstrações restantes são deixadas como exercícios. □

A fórmula de derivação para as funções exponenciais também é uma consequência da Definição 13:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

FIGURA 8 $y = a^x,\ a > 1$

DEMONSTRAÇÃO

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln a}) = e^{x \ln a}\frac{d}{dx}(x \ln a) = a^x \ln a$$ □

Se $a > 1$, então $\ln a > 0$, de modo que $(d/dx)\, a^x = a^x \ln a > 0$, o que mostra que $y = a^x$ é crescente (veja a Figura 8). Se $0 < a < 1$, então $\ln a < 0$ e assim $y = a^x$ é decrescente (veja a Figura 9).

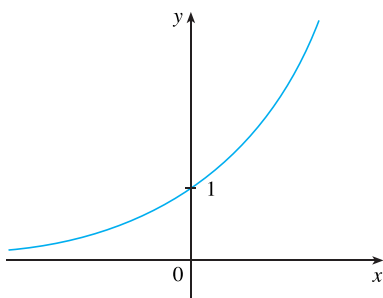
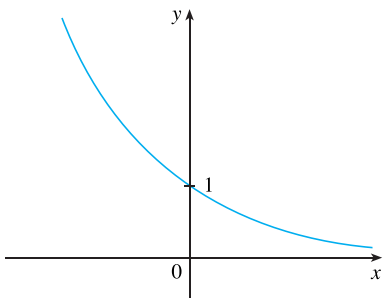



FIGURA 9 $y = a^x,\ 0 < a < 1$

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS GERAIS

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função injetora. Sua função inversa é chamada **função logarítmica de base *a*** e é denotada por $\log_a$. Assim,

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Em particular, vemos que

$$\log_e x = \ln x$$

As propriedades dos logaritmos são parecidas com as do logaritmo natural e podem ser deduzidas das propriedades dos expoentes (veja o Exercício 10).

Para derivar $y = \log_a x$, escrevemos a equação $a^y = x$. Da Equação 14, temos $y \ln a = \ln x$, de modo que

$$\log_a x = y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Como $\ln a$ is é constante, podemos derivar da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \ln a}$$

18
$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

O NÚMERO *e* EXPRESSO COMO UM LIMITE

Nesta seção definimos e como o número tal que $\ln e = 1$. O próximo teorema mostra que isto é o mesmo que o número e definido na Seção 3.1 (veja a Equação 3.6.5).

19
$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $f(x) = \ln x$. Então, $f'(x) = 1/x$, de modo que $f'(1) = 1$. Mas, pela definição de derivada,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1 + x) = \lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x}$$

Como $f'(1) = 1$, temos

$$\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

Então, pelo Teorema 2.5.8 e pela continuidade da função exponencial, temos

$$e = e^1 = e^{\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1 + x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$ □

G EXERCÍCIOS

1. (a) Pela comparação de áreas, mostre que

$$\tfrac{1}{3} < \ln 1{,}5 < \tfrac{5}{12}$$

(b) Use a Regra do Ponto Médio com $n = 10$ para estimar $\ln 1{,}5$.

2. Com referência ao Exemplo 1

(a) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 1/t$ que seja paralela à reta secante AD.

(b) Use a parte (a) para mostrar que $\ln 2 > 0{,}66$.

3. Pela comparação de áreas, mostre que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n - 1}$$

4. (a) Pela comparação de áreas, mostre que $\ln 2 < 1 < \ln 3$.

(b) Deduza que $2 < e < 3$.

5. Demonstre a terceira propriedade dos logaritmos. (*Sugestão*: comece mostrando que ambos os lados da equação têm a mesma derivada.)

6. Demonstre a segunda propriedade dos expoentes para e^x [veja (11)].

7. Demonstre a terceira propriedade dos expoentes para e^x [veja (11)].

8. Demonstre a segunda propriedade dos expoentes [veja (15)].

9. Demonstre a quarta propriedade dos expoentes [veja (15)].

10. Deduza as seguintes propriedades dos logaritmos a partir de (15):

(a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

(b) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$

(c) $\log_a(x^y) = y \log_a x$

H NÚMEROS COMPLEXOS

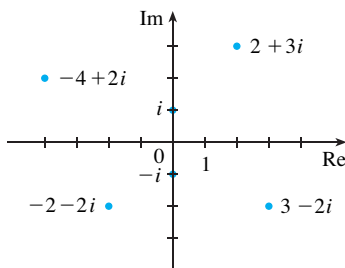



FIGURA 1
Números complexos como pontos no plano Argand

Um **número complexo** pode ser representado por uma expressão da forma a + bi, em que a e b são números reais e i é um símbolo com a propriedade de que $i^2 = -1$. O número complexo $a + bi$ pode também ser representado pelo par ordenado (a, b) e desenhado como um ponto em um plano (chamado plano de Argand), como na Figura 1. Assim, o número complexo $i = 0 + 1 \cdot i$ está identificado como o ponto $(0, 1)$.

A **parte real** do número complexo $a + bi$ é o número real a, e a **parte imaginária** é o número real b. Dessa forma, a parte real de $4 - 3i$ é 4 e a parte imaginária, -3. Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ são **iguais** se $a = c$ e $b = d$, isto é, se suas partes reais e imaginárias forem iguais. No plano de Argand, o eixo horizontal é denominado eixo real, ao passo que o eixo vertical é chamado de eixo imaginário.

A soma e a diferença de dois números complexos são definidas pela soma ou subtração de suas partes reais e imaginárias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por exemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

O produto de dois números complexos é definido de forma que as propriedades comutativa e distributiva usuais sejam válidas:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2\end{aligned}$$

Uma vez que $i^2 = -1$, isso fica

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EXEMPLO 1

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i) \\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i\end{aligned}$$ □

A divisão entre números complexos se parece muito com a racionalização do denominador de uma expressão racional. Para um número complexo $z = a + bi$, definimos seu **complexo conjugado** como $\bar{z} = a - bi$. Para encontrar o quociente de dois números complexos, multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

EXEMPLO 2 Expresse o número $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ na forma $a + bi$.

SOLUÇÃO Multiplicamos o numerador e o denominador pelo complexo conjugado de $2 + 5i$, isto é, $2 - 5i$, e levamos em conta o resultado do Exemplo 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^5 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i$$ □

A interpretação geométrica do complexo conjugado encontra-se na Figura 2: $\bar{z}$ é a reflexão z em torno do eixo real. Uma lista das propriedades do complexo conjugado é apresentada a seguir. As demonstrações seguem da definição e serão pedidas no Exercício 18.

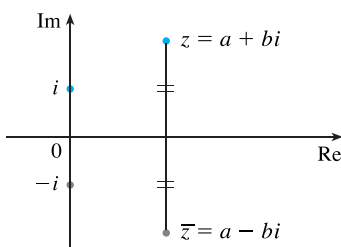



FIGURA 2

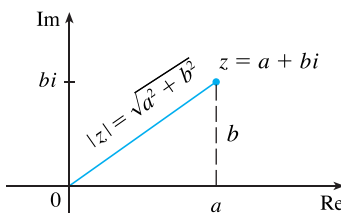



FIGURA 3

PROPRIEDADES DOS CONJUGADOS

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w} \qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

O **módulo**, ou **valor absoluto**, $|z|$ de um número complexo $z = a + bi$ é sua distância até a origem. Da Figura 3 vemos que se $z = a + bi$, então

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observe que

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

e, portanto,

$$z\bar{z} = |z|^2$$

Isso explica por que o processo de divisão no Exemplo 2 funciona em geral:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

Uma vez que $i^2 = -1$, podemos pensar em i como a raiz quadrada de -1. Note, porém, que também temos $(-i)^2 = i^2 = -1$ e, portanto, $-i$ também é uma raiz quadrada de -1. Dizemos que i é a **raiz quadrada principal** de -1 e escrevemos $\sqrt{-1} = i$. Em geral, se c for um número positivo, escrevemos

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\, i$$

Com essa convenção, a dedução usual e a fórmula para as raízes de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são válidas mesmo que $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXEMPLO 3 Encontre as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUÇÃO Usando a fórmula quadrática temos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$ □

Observamos que as soluções da equação no Exemplo 3 são complexas conjugadas uma da outra. Em geral, as soluções de qualquer equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes reais a, b e c são sempre complexas conjugadas. (Se z for real, $z = \bar{z}$, logo z é a própria conjugada.)

Vimos que se permitirmos números complexos como soluções, então toda equação quadrática tem solução. Mais geralmente, é verdade que toda equação polinomial

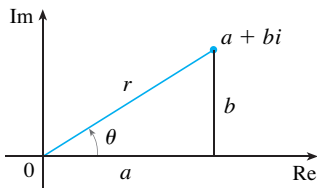
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grau no mínimo 1 tem solução entre os números complexos. Esse fato é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra e foi demonstrado por Gauss.

FORMA POLAR

Sabemos que qualquer número complexo $z = a + bi$ pode ser considerado como um ponto (a, b) e que esse ponto pode ser representado em coordenadas polares (r, θ) com $r \geqslant 0$. De fato,

FIGURA 4

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta$$

como na Figura 4. Portanto, temos

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i$$

Assim, podemos escrever qualquer número complexo z na forma

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}$$

onde $$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{e} \qquad \text{tg}\,\theta = \frac{b}{a}$$

O ângulo θ é chamado **argumento** de z, e escrevemos $\theta = \arg(z)$. Observe que $\arg(z)$ não é único; quaisquer dois argumentos de z diferem entre si por um múltiplo inteiro de 2π.

EXEMPLO 4 Escreva os números a seguir na forma polar.

(a) $z = 1 + i$ (b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUÇÃO

(a) Temos $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\text{tg}\,\theta = 1$; assim, podemos tomar $\theta = \pi/4$. Por conseguinte, a forma polar é

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

(b) Aqui temos $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ e $\text{tg}\,\theta = -1/\sqrt{3}$. Uma vez que está w no quarto quadrante, tomamos $\theta = -\pi/6$ e

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Os números z e w estão na Figura 5. □

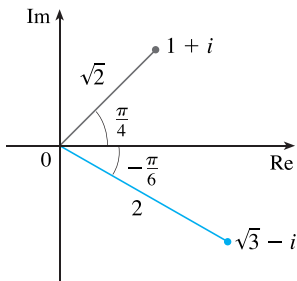



FIGURA 5

A forma polar dos números complexos nos dá uma nova perspectiva da multiplicação e da divisão. Sejam

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

dois números complexos escritos na forma polar. Então

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos(\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \end{aligned}$$

Portanto, usando as fórmulas de adição para seno e cosseno, temos

1 $$\boxed{z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]}$$

FIGURA 6

Essa fórmula nos diz que *para multiplicar dois números complexos, multiplicamos os módulos e somamos os argumentos* (veja a Figura 6).

Um argumento similar usando as fórmulas de subtração para seno e cosseno mostra que *para dividir dois números complexos, dividimos os módulos e subtraímos os argumentos*.

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0}$$

Em particular, tomando $z_1 = 1$ e $z_2 = z$, (e, portanto, $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \theta$), temos o seguinte, que está ilustrado na Figura 7.

$$\boxed{\text{Se} \qquad z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta), \qquad \text{então} \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta).}$$

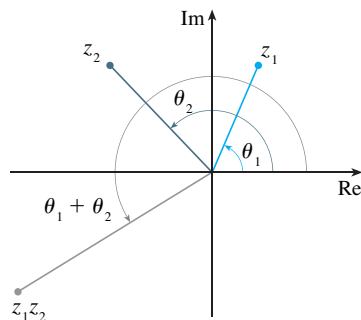
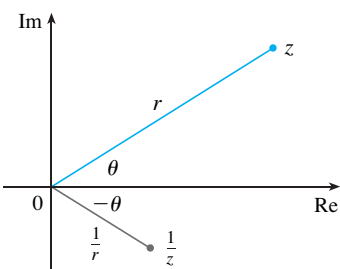
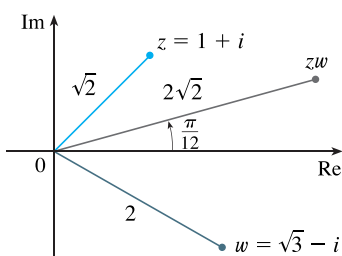



FIGURA 7

FIGURA 8

EXEMPLO 5 Ache o produto dos números complexos $1 + i$ e $\sqrt{3} - i$ na forma polar.

SOLUÇÃO Do Exemplo 4, temos

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

e
$$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Assim, pela Equação 1,

$$(1 + i)(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$$

Isso está ilustrado na Figura 8. □

O uso repetido da Fórmula 1 mostra como calcular as potências de um número complexo. Se

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

então
$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta)$$

e
$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta)$$

Em geral, obtemos o seguinte resultado, cujo nome é uma homenagem ao matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

2 **TEOREMA DE DE MOIVRE** Se $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ e n for um inteiro positivo, então

$$z^n = [r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Isso nos diz que *para elevar um número complexo à n-ésima potência, elevamos à n-ésima potência o módulo e multiplicamos o argumento por n*.

EXEMPLO 6 Ache $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

SOLUÇÃO Uma vez que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, segue do Exemplo 4(a) que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ tem a forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

Assim, pelo Teorema de De Moivre:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$ □

O Teorema de De Moivre também pode ser usado para encontrar as raízes n-ésimas de números complexos. Uma n-ésima raiz de um número complexo z é um número complexo w tal que

$$w^n = z$$

Escrevendo esses dois números na forma polar como

$$w = s(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) \qquad \text{e} \qquad z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

e usando o Teorema de De Moivre, obtemos

$$s^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

A igualdade desses dois números complexos mostra que

$$s^n = r \qquad \text{ou} \qquad s = r^{1/n}$$

e
$$\cos n\phi = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen}\theta$$

Do fato de que seno e cosseno têm período 2π segue que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Assim,
$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Uma vez que essa expressão resulta em valores diferentes de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, temos o seguinte:

3 RAÍZES DE UM NÚMERO COMPLEXO Seja $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e n um inteiro positivo. Então z tem as n raízes n-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Observe que cada uma das raízes n-ésimas de z tem módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Assim, todas as raízes n-ésimas de z estão sobre o círculo de raio $r^{1/n}$ no plano complexo. Também, uma vez que o argumento de cada uma das raízes n-ésimas excede o argumento da raiz anterior por $2\pi/n$, vemos que as raízes n-ésimas de z são igualmente espaçadas sobre esse círculo.

EXEMPLO 7 Encontre as seis raízes sextas de $z = -8$ e faça um gráfico dessas raízes no plano complexo.

SOLUÇÃO Na forma trigonométrica, $z = 8(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$. Aplicando a Equação 3 com $n = 6$, obtemos

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Obtemos as seis raízes sextas de -8 fazendo $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5 nesta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Im

$\sqrt{2}\,i$ w_1

w_2 w_0

$-\sqrt{2}$ 0 $\sqrt{2}$ Re

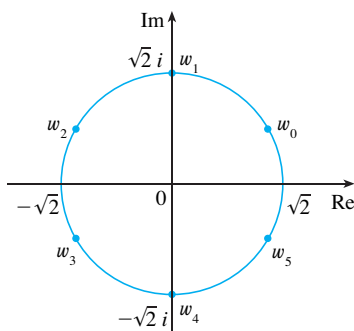
w_3 w_5

$-\sqrt{2}\,i$ w_4

FIGURA 9
As seis raízes sextas de $z = -8$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)$$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)$$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\,i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)$$

Todos esses pontos estão sobre o círculo de raio $\sqrt{2}$, como na Figura 9. □

EXPONENCIAL COMPLEXA

Precisamos também dar um significado para a expressão e^z quando $z = x + iy$ for um número complexo. A teoria das séries infinitas desenvolvida no Capítulo 11, no Volume II, pode ser estendida para o caso onde os termos são números complexos. Usando a série de Taylor para e^x (11.10.11) como guia, definimos

4 $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

e resulta que essa função exponencial complexa tem as mesmas propriedades que a função exponencial real. Em particular, é verdade que

5 $$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Se fizermos $z = iy$, onde y é um número real, na Equação 4, e usarmos o fato de que

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = i^2 i = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad i^5 = i, \quad \ldots$$

obteremos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i\,\text{sen}\,y \end{aligned}$$

Usamos aqui as séries de Taylor para seno e cosseno (Equações 11.10.15 e 11.10.16, no Volume II). O resultado é a famosa fórmula denominada **fórmula de Euler**:

6 $$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Combinando a fórmula de Euler com a Equação 5, obtemos

7 $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

EXEMPLO 8 Calcule: (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

SOLUÇÃO

(a) Da Equação de Euler (6), temos

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando a Equação (7), obtemos

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$ □

■ Poderíamos ter escrito o resultado do Exemplo 8(a) como

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa equação relaciona os números mais famosos de toda a mátematica: $0, 1, e, i$ e π.

Finalmente, observamos que a equação de Euler nos fornece um meio mais fácil de demonstrar o Teorema de De Moivre:

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

H EXERCÍCIOS

1–14 Calcule a expressão e escreva sua resposta na forma $a + bi$.

1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$ **2.** $\left(4 - \frac{1}{2}i\right) - \left(9 + \frac{5}{2}i\right)$

3. $(2 + 5i)(4 - i)$ **4.** $(1 - 2i)(8 - 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$ **6.** $\overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)}$

7. $\dfrac{1 + 4i}{3 + 2i}$ **8.** $\dfrac{3 + 2i}{1 - 4i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$ **10.** $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3 **12.** i^{100}

13. $\sqrt{-25}$ **14.** $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15–17 Determine o complexo conjugado e o módulo do número dado.

15. $12 - 5i$ **16.** $-1 + 2\sqrt{2}\, i$

17. $-4i$

18. Demonstre as seguintes propriedades dos números complexos:

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(c) $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, onde n é um inteiro positivo

[*Sugestão:* escreva $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19–24 Determine todas as soluções da equação.

19. $4x^2 + 9 = 0$ **20.** $x^4 = 1$

21. $x^2 + 2x + 5 = 0$ **22.** $2x^2 - 2x + 1 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$ **24.** $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25–28 Escreva o número na forma polar com o argumento entre 0 e 2π.

25. $-3 + 3i$ **26.** $1 - \sqrt{3}\, i$

27. $3 + 4i$ **28.** $8i$

29–32 Determine a forma polar para zw, z/w e $1/z$ colocando primeiro z e w na forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i, \quad w = 1 + \sqrt{3}\, i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i, \quad w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = -1 + i$

32. $z = 4\left(\sqrt{3} + i\right), \quad w = -3 - 3i$

33–36 Determine as potências indicadas usando o Teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$ **34.** $\left(1 - \sqrt{3}\, i\right)^5$

35. $\left(2\sqrt{3} + 2i\right)^5$ **36.** $(1 - i)^8$

37–40 Determine as raízes indicadas. Esboce as raízes no plano complexo.

37. As raízes oitavas de 1 **38.** As raízes quintas de 32

39. As raízes cúbicas de i **40.** As raízes cúbicas de $1 + i$

41–46 Escreva o número na forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$

42. $e^{2\pi i}$

43. $e^{i\pi/3}$

44. $e^{-i\pi}$

45. $e^{2+i\pi}$

46. $e^{\pi+i}$

47. Use o Teorema de De Moivre com $n = 3$ para expressar $\cos 3\theta$ e $\operatorname{sen} 3\theta$ em termos de $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$.

48. Use a fórmula de Euler para demonstrar as seguintes fórmulas para $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

49. Se $u(x) = f(x) + ig(x)$ for uma função com valores complexos de uma variável real x e as partes real e imaginária $f(x)$ e $g(x)$ forem funções deriváveis de x, então a derivada de u está definida como $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Associe isso à Equação 7 para demonstrar que se $F(x) = e^{rx}$, então $F'(x) = re^{rx}$ quando $r = a + bi$ for um número complexo.

50. (a) Se u for uma função a valores complexos de uma variável real, sua integral indefinida $\int u(x)\,dx$ é uma primitiva de u. Calcule

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

(b) Considerando a parte real e a imaginária da integral da parte (a), calcule as integrais reais

$$\int e^x \cos x\,dx \qquad \text{e} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

(c) Compare com o método usado no Exemplo 4 da Seção 7.1.

I RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE NÚMEROS ÍMPARES

CAPÍTULO 1

EXERCÍCIOS 1.1 ■ PÁGINA 12

1. (a) -2 (b) 2,8 (c) $-3, 1$ (d) $-2{,}5, 0{,}3$ (e) $[-3, 3], [-2, 3]$ (f) $[-1, 3]$

3. $[-85, 115]$

5. Não

7. Sim, $[-3, 2], [-3, -2) \cup [-1, 3]$

9. Dieta, exercício, ou doença

11.

13.

15.

17.

19. (a)

(b) Em milhões: 92; 485

21. $12, 16, 3a^2 - a + 2, 3a^2 + a + 2, 3a^2 + 5a + 4,$ $6a^2 - 2a + 4, 12a^2 - 2a + 2, 3a^4 - a^2 + 2,$ $9a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 4a + 4, 3a^2 + 6ah + 3h^2 - a - h + 2$

23. $-3 - h$

25. $-1/(ax)$

27. $\{x \mid x \neq \frac{1}{3}\} = (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$

29. $[0, \infty)$

31. $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$

33. $(-\infty, \infty)$

35. $(-\infty, \infty)$

37. $[5, \infty)$

39. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

41. $(-\infty, \infty)$

43. $(-\infty, \infty)$

45. $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}, 1 \leqslant x \leqslant 5$

47. $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$

49. $$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x - 6 & \text{se } 3 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

51. $A(L) = 10L - L^2, 0 < L < 10$

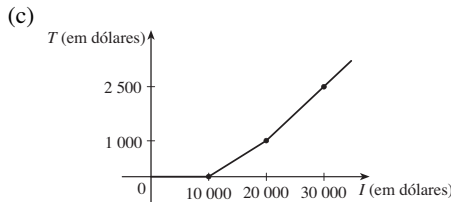
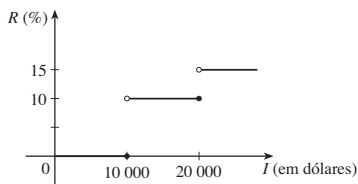
53. $A(x) = \sqrt{3}x^2/4, x > 0$

55. $S(x) = x^2 + (8/x), x > 0$

57. $V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 240x, 0 < x < 6$

59.

(b) \$400, \$1 900

(c)

61. f é ímpar, g é par

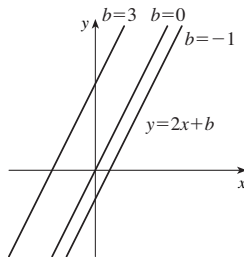
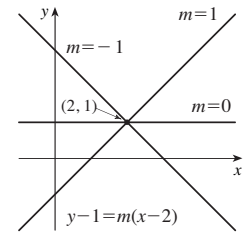
63. (a) $(-5, 3)$ (b) $(-5, -3)$

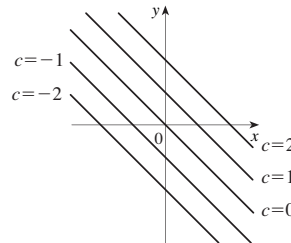
65. Ímpar **67.** Nenhum dos dois **69.** Par

EXERCÍCIOS 1.2 ■ PÁGINA 25

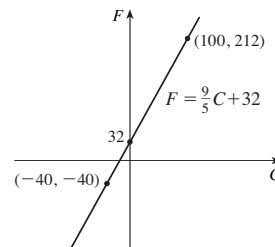
1. (a) Raiz (b) Algébrica (c) Polinominal (grau 9)
(d) Racional (e) Trigonométrica (f) Logarítmica

3. (a) h (b) f (c) g

5. (a) $y = 2x + b$,
onde b é a intersecção com o eixo y.

(b) $y = mx + 1 - 2m$,
em que m é a inclinação.
Veja o gráfico à direita.

(c) $y = 2x - 3$

7. Seus gráficos têm inclinação -1.

9. $f(x) = -3x(x + 1)(x - 2)$

11. (a) 8,34, variação em mg para cada ano de variação
(b) 8,34 mg

13. (a) [gráfico: $F = \frac{9}{5}C + 32$; pontos (100, 212), 32, (−40, −40)]

(b) $\frac{9}{5}$, variação em ºF para cada variação de 1 ºC; 32, temperatura em Fahrenheit correspondente a 0 ºC

15. (a) $T = \frac{9}{68}N + \frac{88}{17}$

(b) $\frac{9}{68}$, variação em ºC para cada variação de cricrido por minuto

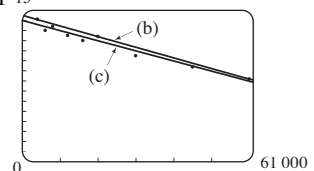
(c) 25 ºC

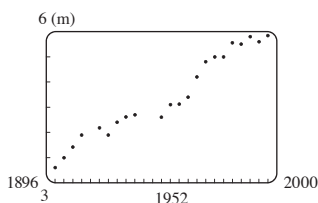
17. (a) $P = 0{,}10d + 1{,}05$ (b) 59,5 m

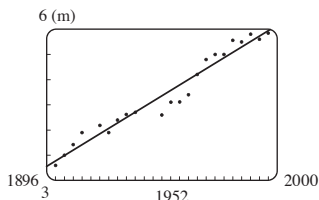
19. (a) Cosseno (b) Linear

21. (a) [gráfico: 15; 0; 61 000]

O modelo lienar é adequado

(b) $y = -0{,}000105x + 14{,}521$ [gráfico: 15; (b); (c); 0; 61 000]

(c) $y = -0{,}00009979x + 13{,}951$ [Veja o gráfico em (b).]
(d) Cerca de 11,5 por 100 de população
(e) Cerca de 6% (f) Não

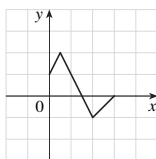
23. (a)

O modelo linear é adequado

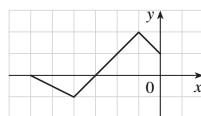
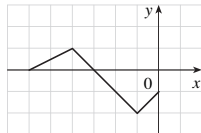
(b) $y = 0{,}02694x - 47{,}804$ (c) 6,08 m (d) Não

25. $y \approx 0{,}0012937x^3 - 7{,}06142x^2 + 12\,823x - 7\,743\,770$; 1 914 milhões

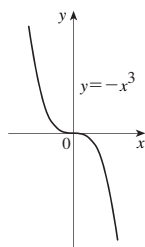
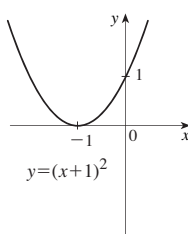
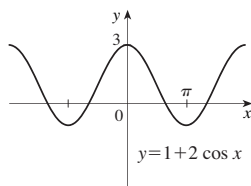
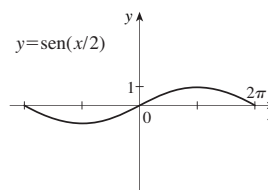
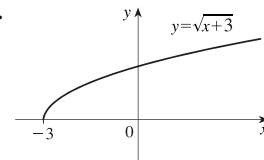
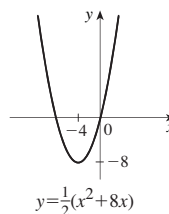
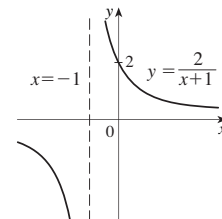
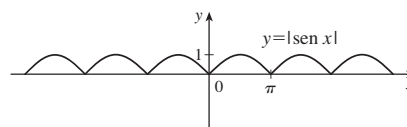
EXERCÍCIOS 1.3 ■ PÁGINA 33

1. (a) $y = f(x) + 3$ (b) $y = f(x) - 3$ (c) $y = f(x - 3)$
(d) $y = f(x + 3)$ (e) $y = -f(x)$ (f) $y = f(-x)$
(g) $y = 3f(x)$ (h) $y = \frac{1}{3} f(x)$

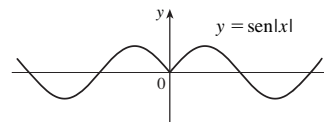
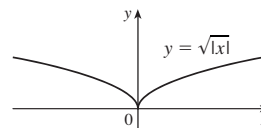
3. (a) 3 (b) 1 (c) 4 (d) 5 (e) 2

5. (a)

(b)

(c)

(d)

7. $y = -\sqrt{-x^2 - 5x - 4} - 1$

9.

11.

13.

15. **17.**

19.

21.

23.

25. $L(t) = 12 + 2\,\text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$

27. (a) A parte do gráfico de $y = f(x)$ à direita do eixo y é refletida em torno do eixo y.

(b)

(c)

29. $(f + g)(x) = x^3 + 5x^2 - 1$, $(-\infty, \infty)$
$(f - g)(x) = x^3 - x^2 + 1$, $(-\infty, \infty)$
$(fg)(x) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2$, $(-\infty, \infty)$
$(f/g)(x) = (x^3 + 2x^2)/(3x^2 - 1)$, $\{x \mid x \neq \pm 1/\sqrt{3}\}$

31. (a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x$, $(-\infty, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 1$, $(-\infty, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^2$, $(-\infty, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = 4x + 3$, $(-\infty, \infty)$

33. (a) $(f \circ g)(x) = 1 - 3\cos x$, $(-\infty, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = \cos(1 - 3x)$, $(-\infty, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = 9x - 2$, $(-\infty, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = \cos(\cos x)$, $(-\infty, \infty)$

35. (a) $(f \circ g)(x) = (2x^2 + 6x + 5)/[(x + 2)(x + 1)]$, $\{x \mid x \neq -2, -1\}$
(b) $(g \circ f)(x) = (x^2 + x + 1)/(x + 1)^2$, $\{x \mid x \neq -1, 0\}$
(c) $(f \circ f)(x) = (x^4 + 3x^2 + 1)/[x(x^2 + 1)]$, $\{x \mid x \neq 0\}$
(d) $(g \circ g)(x) = (2x + 3)/(3x + 5)$, $\{x \mid x \neq -2, -\frac{5}{3}\}$

37. $(f \circ g \circ h)(x) = 2x - 1$

39. $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{x^6 + 4x^3 + 1}$

41. $g(x) = x^2 + 1, f(x) = x^{10}$

43. $g(x) = \sqrt[3]{x}, f(x) = x/(1 + x)$

45. $g(t) = \cos t, f(t) = \sqrt{t}$

47. $h(x) = x^2, g(x) = 3^x, f(x) = 1 - x$

49. $h(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sec x, f(x) = x^4$

51. (a) 4 (b) 3 (c) 0
(d) Não existe; $f(6) = 6$ não está no domínio de g.
(e) 4 (f) -2

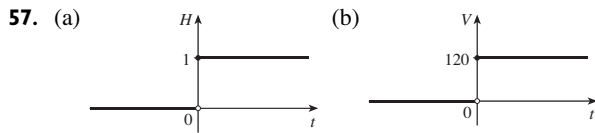
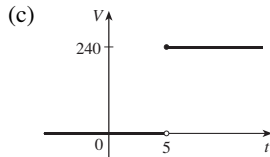
53. (a) $r(t) = 60t$ (b) $(A \circ r)(t) = 3\,600\pi t^2$; a área do círculo como função do tempo.

55. (a) $s = \sqrt{d^2 + 36}$ (b) $d = 30t$
(c) $s = \sqrt{900t^2 + 36}$; a distância entre o farol e o navio como função do tempo decorrido desde o meio-dia.

57. (a)

(b)

$V(t) = 120H(t)$

(c)

$V(t) = 240H(t - 5)$

59. Sim; m_1m_2

61. (a) $f(x) = x^2 + 6$ (b) $g(x) = x^2 + x - 1$

63. (a) Par; par (b) Ímpar; par

65. Sim

EXERCÍCIOS 1.4 ■ PÁGINA 41

1. (c)

3.

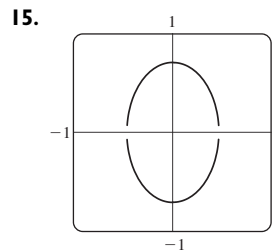
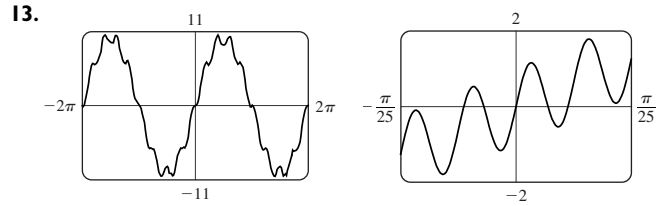
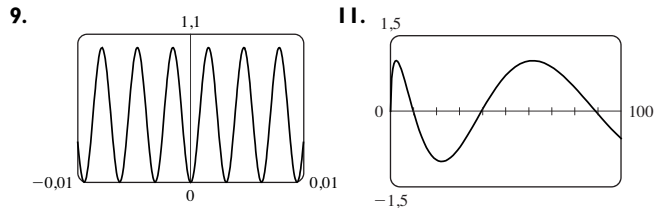
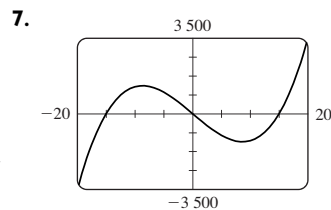
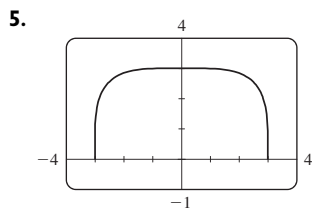
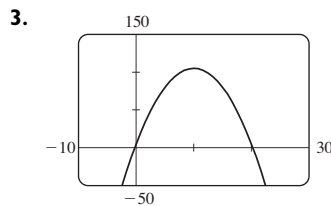
5.

7.

9.

11.

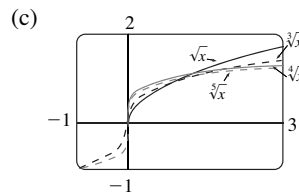
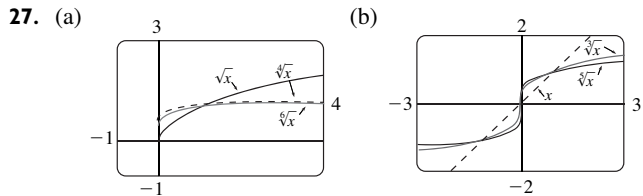
13.

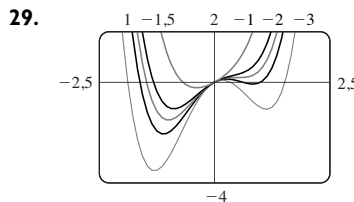
15.

17. Não **19.** 9,05 **21.** 0, 0,88 **23.** g

25. $-0{,}85 < x < 0{,}85$

27. (a)

(b)

(c)

(d) Os gráficos das raízes pares são parecidos com o de $\sqrt{x}$, os gráficos de raízes ímpares são parecidos com o de $\sqrt[3]{x}$. Conforme n aumenta, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ se torna mais íngreme perto de 0 e mais achatado para $x > 1$.

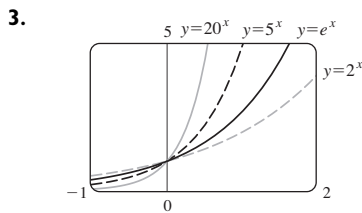
29.

Se $c < -1{,}5$, o gráfico tem três corcovas: dois pontos de mínimo e um ponto de máximo. Estas corcovas se tornam mais achatadas conforme c aumenta até que em $c = -1{,}5$ duas das corcovas desaparecem e há apenas um ponto de mínimo. Esta corcova única então se move para a direita e se aproxima da origem conforme c aumenta.

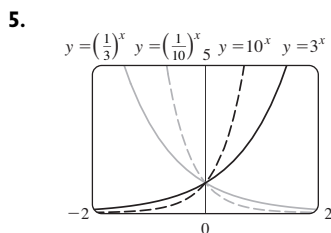
31. A corcova se torna maior e se move para a direita.

33. Se $c < 0$, o laço está à direita da origem; se $c > 0$, o laço está à esquerda. Quanto mais próximo c estiver de 0, maior é o laço.

EXERCÍCIOS 1.5 ■ PÁGINA 48

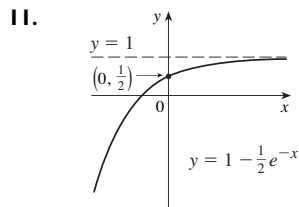
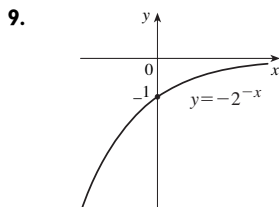
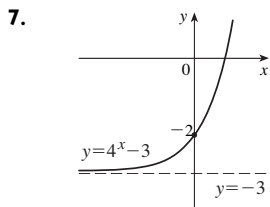
1. (a) $f(x) = a^x,\ a > 0$ (b) $\mathbb{R}$ (c) $(0, \infty)$
(d) Veja as Figuras 4(c), 4(b) e 4(a), respectivamente.

3.

Todas se aproximam de 0 quando $x \to \infty$, todas passam por (0,1) e todas são crescentes. Quanto maior a base, mais rápida a taxa de aumento.

5.

As funções com base maior que 1 são crescentes e aquelas com base menor que 1 são decrescentes. As últimas são reflexões das primeiras em torno do eixo y.

7.

9.

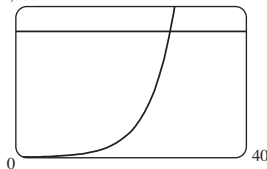
11.

13. (a) $y = e^x - 2$ (b) $y = e^{x-2}$ (c) $y = -e^x$
(d) $y = e^{-x}$ (e) $y = -e^{-x}$

15. (a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

17. $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **23.** Em $x \approx 35{,}8$

25. (a) 3 200 (b) $100 \cdot 2^{t/3}$ (c) 10 159

(d)

$t \approx 26{,}9$ h

27. $y = ab^t$, em que $a \approx 3{,}154832569 \times 10^{-12}$ e $b \approx 1{,}017764706$; 5 498 milhões; 7 417 milhões

EXERCÍCIOS 1.6 ■ PÁGINA 59

1. (a) Veja a Definição 1.
(b) Ela deve satisfazer o Teste da Reta Horizontal.

3. Não **5.** Sim **7.** Não **9.** Sim **11.** Não

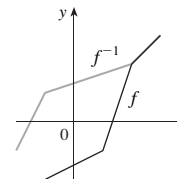
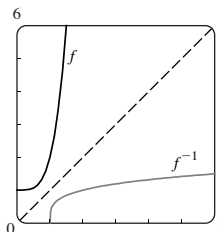
13. Não **15.** 2 **17.** 0

19. $F = \frac{9}{5}C + 32$; a temperatura Fahrenheit como função da temperatura em graus Celsius; $[-273{,}15, \infty)$

21. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3},\ x \geqslant 0$ **23.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\ln x}$

25. $y = e^x - 3$

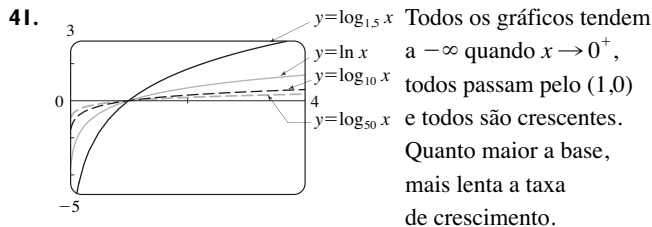
27. $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x - 1}$

29.

31. (a) É definida como a inversa da função exponencial com base a, isto é, $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.
(b) $(0, \infty)$ (c) $\mathbb{R}$ (d) Veja a Figura 11.

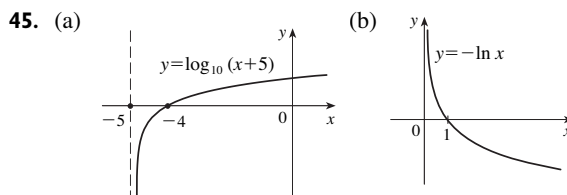
33. (a) 3 (b) -3 **35.** (a) 3 (b) -2 **37.** ln 1 215

39. $\ln \dfrac{(1 + x^2)\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}$.

41.

Todos os gráficos tendem a $-\infty$ quando $x \to 0^+$, todos passam pelo (1,0) e todos são crescentes. Quanto maior a base, mais lenta a taxa de crescimento.

43. Cerca de $1{,}27 \times 10^{25}$ km

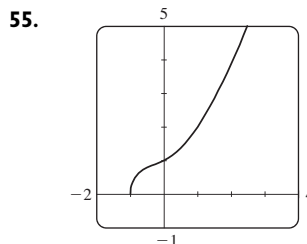
45. (a)

(b)

47. (a) $\sqrt{e}$ (b) $-\ln 5$

49. (a) $5 + \log_2 3$ ou $5 + (\ln 3)/\ln 2$ (b) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4e})$

51. (a) $x < \ln 10$ (b) $x > 1/e$

53. (a) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\ln 3\right]$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(3 - x^2),\ [0, \sqrt{3})$

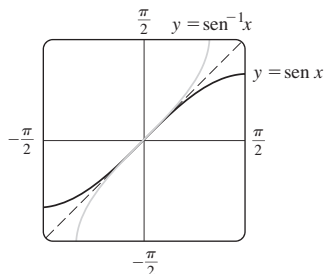
55.

O gráfico satisfaz o Teste da Reta Horizontal.

$f^{-1}(x) = -(\sqrt[3]{4}/6)(\sqrt[3]{D - 27x^2 + 20} - \sqrt[3]{D + 27x^2 - 20} + \sqrt[3]{2})$, em que $D = 3\sqrt{3}\sqrt{27x^4 - 40x^2 + 16}$; duas das expressões são complexas.

57. (a) $f^{-1}(n) = (3/\ln 2)\ln(n/100)$; o tempo decorrido quando existirem n bactérias (b) Depois de cerca de 26,9 horas

59. (a) $\pi/3$ (b) π **61.** (a) $\pi/4$ (b) $\pi/4$

63. (a) 10 (b) $\pi/3$ **67.** $x/\sqrt{1+x^2}$

69.

O segundo gráfico é a reflexão do primeiro gráfico em torno da reta $y = x$.

71. (a) $[-\frac{2}{3}, 0]$ (b) $[-\pi/2, \pi/2]$

73. (a) $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - c$ (b) $h^{-1}(x) = (1/c)f^{-1}(x)$

CAPÍTULO 1 REVISÃO ▪ PÁGINA 62

Teste Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadeiro **7.** Falso
9. Verdadeiro **11.** Falso **13.** Falso

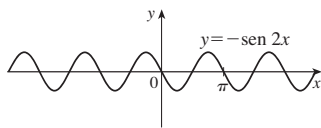
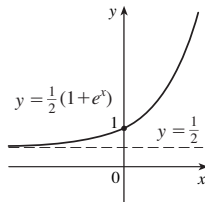
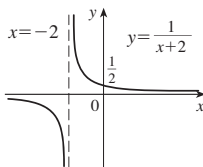
Exercícios

1. (a) 2,7 (b) 2,3, 5,6 (c) $[-6, 6]$ (d) $[-4, 4]$
(e) $[-4, 4]$ (f) Não; ela não satisfaz o Teste da Reta Horizontal.
(g) Ímpar; seu gráfico é simétrico em relação à origem.

3. $2a + h - 2$ **5.** $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty), (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

7. $(-6, \infty)$, $\mathbb{R}$

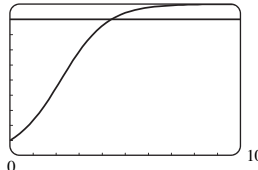
9. (a) Translada o gráfico 8 unidades para cima.
(b) Translada o gráfico 8 unidades para a esquerda.
(c) Amplia o gráfico verticalmente por um fator 2, a seguir translada-o 1 unidade para cima.
(d) Translada o gráfico 2 unidades para a direita e duas unidades para baixo. (e) Reflete o gráfico em torno do eixo x.
(f) Reflete o gráfico em torno da reta $y = x$ (supondo que f seja injetoras).

11.

13.

15.

17. (a) Nenhum dos dois (b) Ímpar (c) Par (d) Nenhum dos dois

19. (a) $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 9)$, $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 - 9$, $(0, \infty)$
(c) $(f \circ f)(x) = \ln \ln x$, $(1, \infty)$
(d) $(g \circ g)(x) = (x^2 - 9)^2 - 9$, $(-\infty, \infty)$

21. Modelo exponencial; 270 milhões.

23. 1 **25.** (a) 9 (b) 2 (c) $1/\sqrt{3}$ (d) $\frac{3}{5}$

27. (a)

$\approx$ 4,4 anos

(b) $t = -\ln\left(\dfrac{1\,000 - P}{9P}\right)$; o tempo necessário para a população atingir um número P dado.
(c) $\ln 81 \approx 4{,}4$ anos

PRINCÍPIOS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ▪ PÁGINA 69

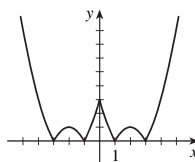
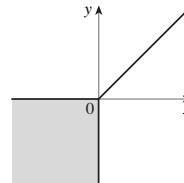
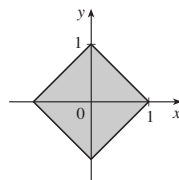
1. $a = 4\sqrt{h^2 - 16}/h$, em que a é o comprimento da altura e h é o comprimento da hipotenusa.

3. $-\frac{7}{3}, 9$

5.

7.

9.

11. 5 **13.** $x \in [-1, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, 3]$

15. 80 km/h **19.** $f_n(x) = x^{2^{n+1}}$

CAPÍTULO 2

EXERCÍCIOS 2.1 ▪ PÁGINA 77

1. (a) $-44{,}4$, $-38{,}8$, $-27{,}8$, $-22{,}2$, $-16{,}\overline{6}$
(b) $-33{,}3$ (c) $-33\frac{1}{3}$

3. (a) (i) 0,333333 (ii) 0,263158 (iii) 0,251256
(iv) 0,250125 (v) 0,2 (vi) 0,238095 (vii) 0,248756
(viii) 0,249875 (b) $\frac{1}{4}$ (c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

5. (a) (i) $-7{,}15$ m/s (ii) $-5{,}19$ m/s (iii) $-4{,}945$ m/s
(iv) $-4{,}749$ m/s (b) $-4{,}7$ m/s

7. (a) (i) 4,65 m/s (ii) 5,6 m/s (iii) 7,55 m/s
(iv) 7 m/s (b) 6,3 m/s

9. (a) 0, 1,7321, $-1{,}0847$, $-2{,}7433$, 4,3301, $-2{,}8173$, 0, $-2{,}1651$, $-2{,}6061$, -5, 3,4202; não (c) $-31{,}4$

EXERCÍCIOS 2.2 ■ PÁGINA 86

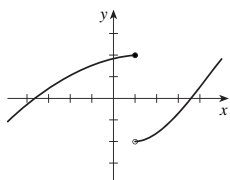
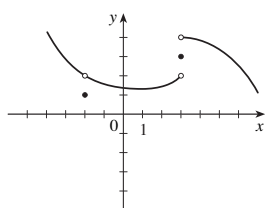
1. Sim

3. (a) $\lim_{x\to-3} f(x) = \infty$ significa que os valores de $f(x)$ podem se tornar arbitrariamente grandes (tão grande quanto quisermos) tomando x suficientemente próximo de -3 (mas não igual a -3).
(b) $\lim_{x\to4^+} f(x) = -\infty$ significa que os valores de $f(x)$ podem se tornar um número negativo arbitrariamente grande (em módulo), tomando x suficientemente próximo de 4, por valores maiores que 4.

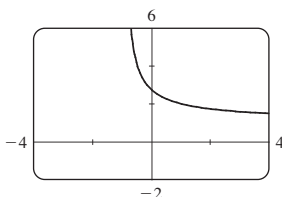
5. (a) 2 (b) 3 (c) Não existe (d) 4
(e) Não existe

7. (a) -1 (b) -2 (c) Não existe (d) 2
(e) 0 (f) Não existe (g) 1 (h) 3

9. (a) $-\infty$ (b) ∞ (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) ∞
(f) $x = -7, x = -3, x = 0, x = 6$

11. (a) 1 (b) 0 (c) Não existe

13. **15.**

17. $\frac{2}{3}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** $\frac{1}{4}$ **23.** $\frac{3}{5}$ **25.** ∞

27. ∞ **29.** $-\infty$ **31.** $-\infty$ **33.** $-\infty$; ∞

35. (a) 2,71828 (b)

37. (a) 0,998000, 0,638259, 0,358484, 0,158680, 0,038851, 0,008928, 0,001465; 0
(b) 0,000572, $-0{,}000614$, $-0{,}000907$, $-0{,}000978$, $-0{,}000993$, $-0{,}001000$; $-0{,}001$

39. Não importa quantas vezes fizermos um *zoom* em direção à origem, o gráfico parece consistir em retas quase verticais. Isto indica oscilações cada vez mais frequentes à medida que $x \to 0$.

41. $x \approx \pm 0{,}90, \pm 2{,}24$; $x = \pm \text{sen}^{-1}(\pi/4), \pm(\pi - \text{sen}^{-1}(\pi/4))$

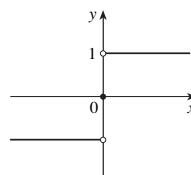
EXERCÍCIOS 2.3 ■ PÁGINA 95

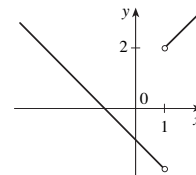
1. (a) -6 (b) -8 (c) 2 (d) -6
(e) Não existe (f) 0

3. 75 **5.** 390 **7.** $\frac{1}{8}$ **9.** 0 **11.** 5

13. Não existe **15.** $\frac{6}{5}$ **17.** 8 **19.** $\frac{1}{12}$ **21.** 6

23. $\frac{1}{6}$ **25.** $-\frac{1}{16}$ **27.** 108 **29.** $-\frac{1}{2}$ **31.** (a), (b) $\frac{2}{3}$

35. 7 **39.** 6 **41.** -4 **43.** Não existe

45. (a) (b) (i) 1
(ii) -1
(iii) Não existe
(iv) 1

47. (a) (i) 2 (ii) -2 (b) Não (c)

49. (a) (i) -2 (ii) Não existe (iii) -3
(b) (i) $n - 1$ (ii) n (c) a não é um inteiro.

55. 8 **61.** 15; -1

EXERCÍCIOS 2.4 ■ PÁGINA 105

1. $\frac{4}{7}$ (ou qualquer número positivo menor)

3. 1,44 (ou qualquer número positivo menor)

5. 0,0906 (ou qualquer número positivo menor)

7. 0,11, 0,012 (ou quaisquer números positivos menores)

9. (a) 0,031 (b) 0,010

11. (a) $\sqrt{1\,000/\pi}$ cm (b) A menos de aproximadamente 0,0445 cm
(c) Raio; área; $\sqrt{1\,000/\pi}$; 1 000; 5; $\approx 0{,}0445$

13. (a) 0,025 (b) 0,0025

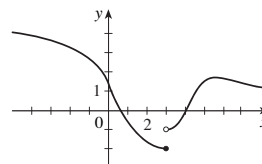
35. (a) 0,093 (b) $\delta = (B^{2/3} - 12)/(6B^{1/3}) - 1$, em que $B = 216 + 108\varepsilon + 12\sqrt{336 + 324\varepsilon + 81\varepsilon^2}$

41. A menos de 0,1

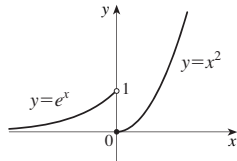
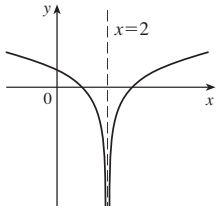
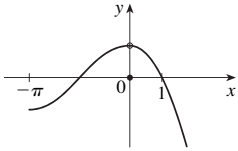
EXERCÍCIOS 2.5 ■ PÁGINA 115

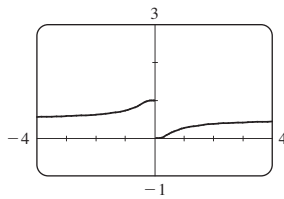
1. $\lim_{x\to4} f(x) = f(4)$

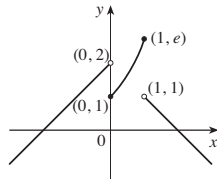
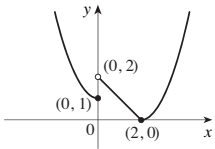
3. (a) $f(4)$ não está definido e $\lim_{x\to a} f(x)$ [para $a = -2$, 2 e 4] não existe
(b) -4, nenhum dos dois; -2, à esquerda; 2, à direita; 4, à direita

5.

7. (a) (b) Descontínua em $t = 1, 2, 3, 4$

9. 6

15. $f(2)$ não está definido. **17.** $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

19. $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$ **21.** $\{x \mid x \neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$

23. $[\frac{1}{2}, \infty)$ **25.** $(-\infty, \infty)$ **27.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

29. $x = 0$

31. $\frac{7}{3}$ **33.** 1

37. 0, à esquerda **39.** 0, à direita; 1, à esquerda

41. $\frac{2}{3}$ **43.** (a) $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ (b) $g(x) = x^2 + x$

51. (b) (0,44, 0,45) **53.** (b) 70,347

59. Nenhum **61.** Sim

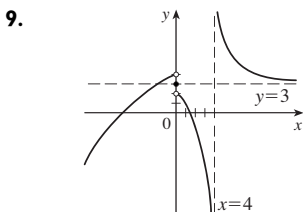
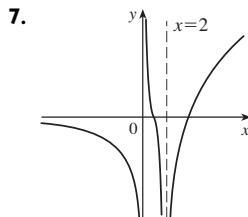
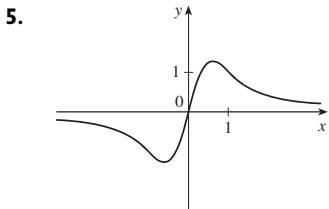
EXERCÍCIOS 2.6 ■ PÁGINA 127

1. (a) Quando x se torna grande, $f(x)$ tende a 5.
(b) Quando x se torna um negativo grande (em módulo), $f(x)$ tende a 3.

3. (a) ∞ (b) ∞ (c) $-\infty$ (d)1 (e)2
(f) $x = -1, x = 2, y = 1, y = 2$

5.

7.

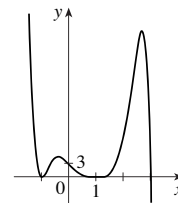
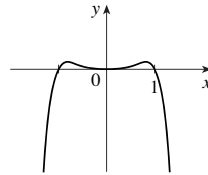
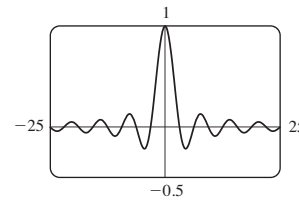
9.

11. 0 **13.** $\frac{3}{2}$ **15.** 0 **17.** $-\frac{1}{2}$ **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** 2

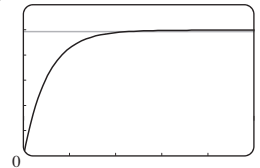
23. 3 **25.** $\frac{1}{6}$ **27.** $\frac{1}{2}(a - b)$ **29.** ∞ **31.** $-\infty$

33. $-\frac{1}{2}$ **35.** 0 **37.** (a), (b) $-\frac{1}{2}$ **39.** $y = 1, x = -4$

41. $y = 2; x = -2, x = 1$ **43.** $x = 5$ **45.** $y = 3$

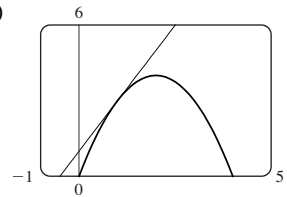
47. $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2(x - 3)}$

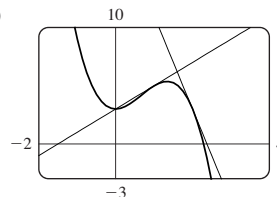
49. $-\infty, -\infty$ **51.** $-\infty, \infty$

53. (a) 0 (b) Um número infinito de vezes

55. (a) 0 (b) $\pm\infty$ **57.** 5

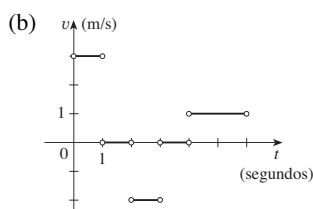
59. (a) v^* (b) $\approx 0{,}47$ s

61. $N \geqslant 15$ **63.** $N \leqslant -6, N \leqslant -22$ **65.** (a) $x > 100$

EXERCÍCIOS 2.7 ■ PÁGINA 136

1. (a) $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ (b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

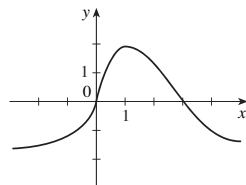
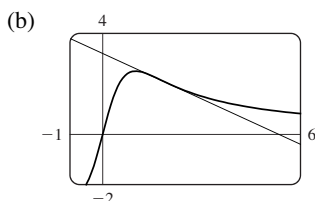
3. (a) 2 (b) $y = 2x + 1$ (c)

5. $y = -x + 5$ **7.** $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

9. (a) $8a - 6a^2$ (b) $y = 2x + 3, y = -8x + 19$
(c)

11. (a) À direita: $0 < t < 1$ e $4 < t < 6$; à esquerda: $2 < t < 3$; permanecendo parado: $1 < t < 2$ e $3 < t < 4$

(b) v (m/s), t (segundos)

13. $-9{,}6$ m/s **15.** $-2/a^3$ m/s; -2 m/s; $-\frac{1}{4}$ m/s; $-\frac{2}{27}$ m/s

17. $g'(0), 0, g'(4), g'(2), g'(-2)$

19.

21. 7; $y = 7x - 12$

23. (a) $-\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$ (b)

25. $-2 + 8a$ **27.** $\dfrac{5}{(a+3)^2}$ **29.** $\dfrac{-1}{2(a+2)^{3/2}}$

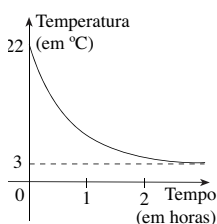
31. $f(x) = x^{10}$, $a = 1$ ou $f(x) = (1+x)^{10}$, a = 0

33. $f(x) = 2^x$, $a = 5$

35. $f(x) = \cos x$, $a = \pi$ ou $f(x) = \cos(\pi + x)$, $a = 0$

37. 1 m/s; 1 m/s

39.

Maior (em módulo)

41. (a) (i) 11 por cento/ano (ii) 13 por cento/ano
(iii) 16 por cento/ano
(b) 14,5 por cento/ano (c) 15 por cento/ano

43. (a) (i) \$20,25/unidade (ii) \$20,05/unidade (b) \$20/unidade

45. (a) A taxa na qual o custo está variando por quilograma de ouro produzido; dólares por quilograma
(b) Quando o 50º quilograma de ouro for produzido, o custo de produção será \$36/kg
(c) Decresce a curto prazo; aumenta a longo prazo

47. A taxa na qual a temperatura está variando às 6:00 da tarde; 3,05 ºC/h

49. (a) A taxa na qual a solubilidade do oxigênio varia com relação à temperatura da água; (mg/L)ºC
(b) $S'(16) \approx -0{,}25$; a medida que a temperatura aumenta para além de 16 ºC, a solubilidade do oxigênio está decrescendo a uma taxa de 0,25 (mg/L)ºC.

51. Não existe

EXERCÍCIOS 2.8 ■ PÁGINA 148

1. (a) 1,5
(b) 1
(c) 0
(d) -4
(e) 0
(f) 1
(g) 1,5

3. (a) II (b) IV (c) I (d) III

5.

7.

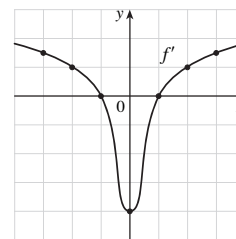
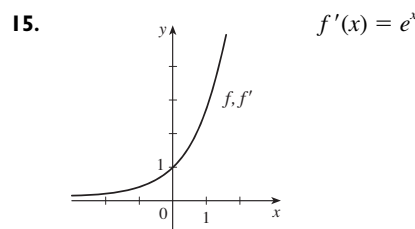
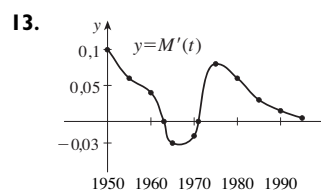
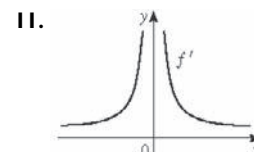
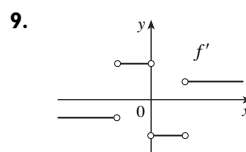
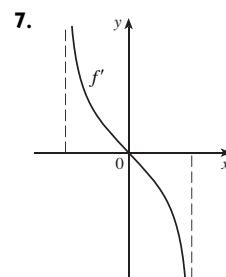
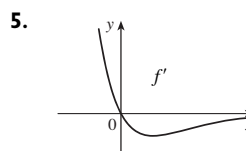
9. f'

11.

1963 a 1971

13. $y = M'(t)$

15.

$f'(x) = e^x$

17. (a) $0, 1, 2, 4$ (b) $-1, -2, -4$ (c) $f'(x) = 2x$

19. $f'(x) = \frac{1}{2}$, ℝ, ℝ **21.** $f'(t) = 5 - 18t$, ℝ, ℝ

23. $f'(x) = 3x^2 - 3$, ℝ, ℝ

25. $g'(x) = 1/\sqrt{1+2x}$, $[-\frac{1}{2}, \infty)$, $(-\frac{1}{2}, \infty)$

27. $G'(t) = \dfrac{4}{(t+1)^2}$, $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

29. $f'(x) = 4x^3$, ℝ, ℝ **31.** (a) $f'(x) = 4x^3 + 2$

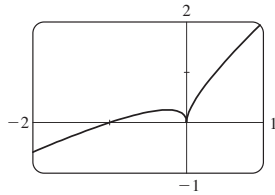
33. (a) A taxa na qual a taxa de desemprego está variando em porcentagem de desempregados por ano.

(b)

t	$U'(t)$	t	$U'(t)$
1995	$-0{,}10$	2000	0,10
1996	0,05	2001	0,15
1997	$-0{,}05$	2002	$-0{,}35$
1998	$-0{,}75$	2003	$-0{,}45$
1999	$-0{,}85$	2004	$-0{,}60$

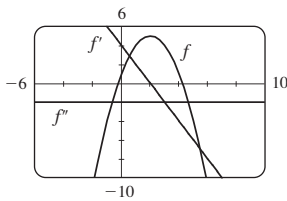
35. -4 (bico); 0 (descontinuidade)

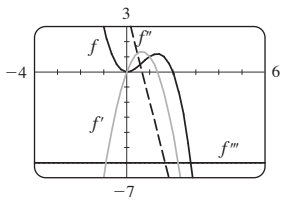
37. -1 (tangente vertical); 4 (bico)

39.

Derivável em -1; não derivável em 0

41. $a = f, b = f', c = f''$

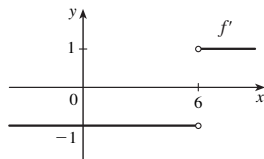
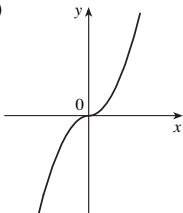
43. a = aceleração, b = velocidade, c = posição

45.

$f'(x) = 4 - 2x,$
$f''(x) = -2$

47.

$f'(x) = 4x - 3x^2,$
$f''(x) = 4 - 6x,$
$f'''(x) = -6,$
$f^{(4)}(x) = 0$

49. (a) $\frac{1}{3}a^{-2/3}$

51. $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 6 \\ 1 & \text{se } x > 6 \end{cases}$

ou $f'(x) = \dfrac{x-6}{|x-6|}$

53. (a)

(b) Para todo x
(c) $f'(x) = 2|x|$

57. 63º

CAPÍTULO 2 REVISÃO ■ PÁGINA 152

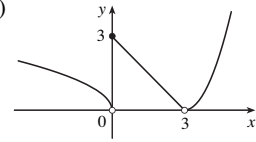
Teste Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Verdadeiro
9. Verdadeiro **11.** Falso **13.** Verdadeiro **15.** Verdadeiro
17. Falso **19.** Falso

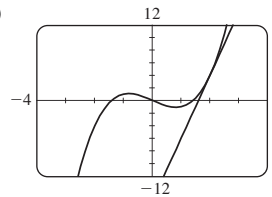
Exercícios

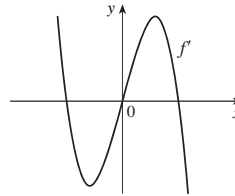
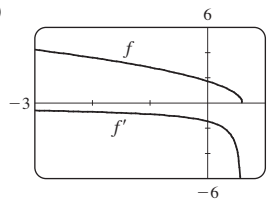
1. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) Não existe (iv) 2
(v) ∞ (vi) $-\infty$ (vii) 4 (viii) -1
(b) $y = 4, y = -1$ (c) $x = 0, x = 2$ (d) $-3, 0, 2, 4$

3. 1 **5.** $\frac{3}{2}$ **7.** 3 **9.** ∞ **11.** $\frac{4}{7}$ **13.** $\frac{1}{2}$
15. $-\infty$ **17.** 2 **19.** $\pi/2$ **21.** $x = 0, y = 0$ **23.** 1

29. (a) (i) 3 (ii) 0 (iii) Não existe (iv) 0 (v) 0 (vi) 0
(b) Em 0 e 3 (c)

31. $\mathbb{R}$ **35.** (a) -8 (b) $y = -8x + 17$

37. (a) (i) 3 m/s (ii) 2,75 m/s (iii) 2,625 m/s (iv) 2,525 m/s
(b) 2,5 m/s

39. (a) 10 (b) $y = 10x - 16$
(c)

41. (a) A taxa na qual o custo varia com relação à taxa de juros; dólares/(por cento por ano)
(b) A medida que a taxa de juros aumenta para além de 10%, o custo está aumentando a uma taxa de $1 200/(por cento por ano).
(c) Sempre positiva

43.

45. (a) $f'(x) = -\frac{5}{2}(3 - 5x)^{-1/2}$ (b) $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right], \left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$
(c)

47. -4 (descontinuidade), -1 (bico), 2 (descontinuidade), 5 (tangente vertical)

49. A taxa na qual o valor do euro está variando em meados de 2002 em termos dos dólares americanos por ano; $0,151/ano

51. 0

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 155

1. $\frac{2}{3}$ **3.** -4 **5.** 1 **7.** $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$
9. $\frac{3}{4}$ **11.** (b) Sim (c) Sim; não
13. (a) 0 (b) 1 (c) $f'(x) = x^2 + 1$

CAPÍTULO 3

EXERCÍCIOS 3.1 ■ PÁGINA 166

1. (a) Veja a Definição do Número e (página 165).
(b) 0,99, 1,03; $2{,}7 < e < 2{,}8$

3. $f'(x) = 0$ **5.** $f'(x) = 5$ **7.** $f'(x) = 3x^2 - 4$

9. $f'(t) = t^3$ **11.** $y' = -\frac{2}{5}x^{-7/5}$ **13.** $V'(r) = 4\pi r^2$

15. $Y'(t) = -54t^{-10}$ **17.** $G'(x) = 1/(2\sqrt{x}) - 2e^x$

19. $F'(x) = \frac{5}{32}x^4$ **21.** $y' = 2ax + b$

23. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + (2/\sqrt{x}) - 3/(2x\sqrt{x})$

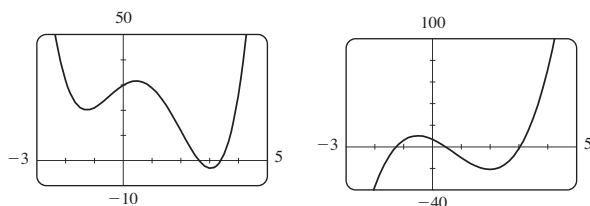
25. $y' = 0$ **27.** $H'(x) = 3x^2 + 3 - 3x^{-2} - 3x^{-4}$

29. $u' = \frac{1}{5}t^{-4/5} + 10t^{3/2}$ **31.** $z' = -10A/y^{11} + Be^y$

33. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

35. Tangente: $y = 2x + 2$; normal: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

37. $y = 3x - 1$ **39.** $e^x - 5$ **41.** $45x^{14} - 15x^2$

43. (a) (c) $4x^3 - 9x^2 - 12x + 7$

45. $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 16, f''(x) = 12x^2 - 18x$

47. $f'(x) = 2 - \frac{15}{4}x^{-1/4}, f''(x) = \frac{15}{16}x^{-5/4}$

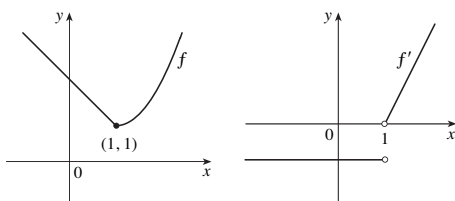
49. (a) $v(t) = 3t^2 - 3, a(t) = 6t$ (b) 12 m/s^2
(c) $a(1) = 6$ m/s^2

51. $(-2, 21), (1, -6)$

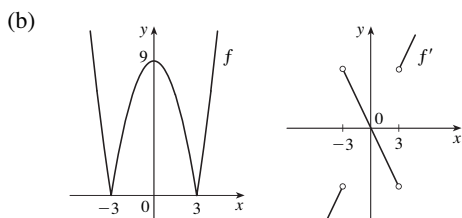
55. $y = 12x - 15, y = 12x + 17$ **57.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

59. $(\pm 2, 4)$ **63.** $P(x) = x^2 - x + 3$

65. $y = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x + 3$

67. Não

69. (a) Não é derivável em 3 ou -3

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } |x| > 3 \\ -2x & \text{se } |x| < 3 \end{cases}$$

(b)

71. $y = 2x^2 - x$ **73.** $a = -\frac{1}{2}, b = 2$ **75.** $m = 4, b = -4$

77. 1 000 **79.** 3; 1

EXERCÍCIOS 3.2 ■ PÁGINA 172

1. $y' = 5x^4 + 3x^2 + 2x$

3. $f'(x) = x(x + 2)e^x$

5. $y' = (x - 2)e^x/x^3$ **7.** $g'(x) = 5/(2x + 1)^2$

9. $V'(x) = 14x^6 - 4x^3 - 6$

11. $F'(y) = 5 + 14/y^2 + 9/y^4$

13. $y' = \dfrac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2}$ **15.** $y' = 2t(1 - t)/(3t^2 - 2t + 1)^2$

17. $y' = (r^2 - 2)e^r$ **19.** $y' = 2v - 1/\sqrt{v}$

21. $f'(t) = \dfrac{4 + t^{1/2}}{(2 + \sqrt{t})^2}$ **23.** $f'(x) = -ACe^x/(B + Ce^x)^2$

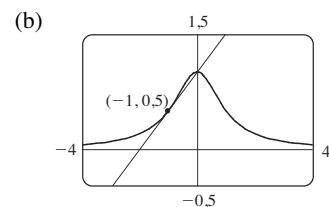
25. $f'(x) = 2cx/(x^2 + c)^2$

27. $(x^4 + 4x^3)e^x$; $(x^4 + 8x^3 + 12x^2)e^x$

29. $\dfrac{2x^2 + 2x}{(1 + 2x)^2}$; $\dfrac{2}{(1 + 2x)^3}$

31. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ **33.** $y = 2x$; $y = -\frac{1}{2}x$

35. (a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (b)

1,5
(−1, 0,5)
−4
4
−0,5

37. (a) $e^x(x - 3)/x^4$ **39.** $xe^x, (x + 1)e^x$

41. $\frac{1}{4}$ **43.** (a) -16 (b) $-\frac{20}{9}$ (c) 20

45. 7 **47.** (a) 0 (b) $-\frac{2}{3}$

49. (a) $y' = xg'(x) + g(x)$ (b) $y' = [g(x) - xg'(x)]/[g(x)]^2$
(c) $y' = [xg'(x) - g(x)]/x^2$

51. Dois, $(-2 \pm \sqrt{3}, (1 \pm \sqrt{3})/2)$

53. \$1,627 bilhão/ano **55.** (c) $3e^{3x}$

57. $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x, f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$,
$f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x, f^{(4)}(x) = (x^2 + 8x + 12)e^x$,
$f^{(5)}(x) = (x^2 + 10x + 20)e^x$; $f^{(n)}(x) = [x^2 + 2nx + n(n - 1)]e^x$

EXERCÍCIOS 3.3 ■ PÁGINA 180

1. $f'(x) = 1 - 3\cos x$ **3.** $y' = \cos x + 10\sec^2 x$

5. $g'(t) = 3t^2\cos t - t^3 \operatorname{sen} t$

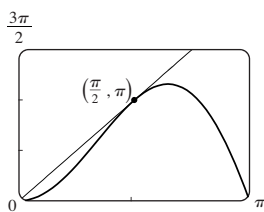
7. $h'(\theta) = -\text{cossec}\,\theta \operatorname{cotg}\theta + e^\theta(\operatorname{cotg}\theta - \text{cossec}^2\theta)$

9. $y' = \dfrac{2 - \operatorname{tg} x + x\sec^2 x}{(2 - \operatorname{tg} x)^2}$ **11.** $f'(\theta) = \dfrac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{(1 + \sec\theta)^2}$

13. $y' = (x\cos x - 2\operatorname{sen} x)/x^3$

15. $f'(x) = e^x \operatorname{cossec} x\,(-x \operatorname{cotg} x + x + 1)$

21. $y = 2\sqrt{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi + 2$ **23.** $y = x + 1$

25. (a) $y = 2x$ (b)

27. (a) $\sec x \operatorname{tg} x - 1$

29. $\theta \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$; $2\cos\theta - \theta \operatorname{sen}\theta$

31. (a) $f'(x) = (1 + \operatorname{tg} x)/\sec x$ (b) $f'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

33. $(2n + 1)\pi \pm \frac{1}{3}\pi$, n um inteiro

35. (a) $v(t) = 8\cos t$, $a(t) = -8\operatorname{sen} t$
(b) $4\sqrt{3}, -4, -4\sqrt{3}$; à esquerda

37. 3 m/rad **39.** 3 **41.** 3 **43.** sen 1

45. $\frac{1}{2}$ **47.** $-\sqrt{2}$

49. (a) $\sec^2 x = 1/\cos^2 x$ (b) $\sec x \operatorname{tg} x = (\operatorname{sen} x)/\cos^2 x$
(c) $\cos x - \operatorname{sen} x = (\operatorname{cotg} x - 1)/\operatorname{cossec} x$

51. 1

EXERCÍCIOS 3.4 ■ PÁGINA 188

1. $4\cos 4x$ **3.** $-20x(1 - x^2)^9$ **5.** $e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$

7. $F'(x) = 7(x^3 + 4x)^6(3x^2 + 4)$ [ou $7x^6(x^2 + 4)^6(3x^2 + 4)$]

9. $F'(x) = \dfrac{2 + 3x^2}{4(1 + 2x + x^3)^{3/4}}$ **11.** $g'(t) = -\dfrac{12t^3}{(t^4 + 1)^4}$

13. $y' = -3x^2 \operatorname{sen}(a^3 + x^3)$ **15.** $y' = e^{-kx}(-kx + 1)$

17. $g'(x) = 4(1 + 4x)^4(3 + x - x^2)^7(17 + 9x - 21x^2)$

19. $y' = 8(2x - 5)^3(8x^2 - 5)^{-4}(-4x^2 + 30x - 5)$

21. $y' = \dfrac{-12x(x^2 + 1)^2}{(x^2 - 1)^4}$ **23.** $y' = (\cos x - x\operatorname{sen} x)e^{x\cos x}$

25. $F'(z) = 1/[(z - 1)^{1/2}(z + 1)^{3/2}]$

27. $y' = (r^2 + 1)^{-3/2}$ **29.** $y' = -\operatorname{sen} x \sec^2(\cos x)$

31. $y' = 2^{\operatorname{sen}\pi x}(\pi \ln 2)\cos \pi x$ **33.** $y' = 4\sec^2 x \operatorname{tg} x$

35. $y' = \dfrac{4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} \operatorname{sen} \dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$

37. $y' = -2\cos\theta \operatorname{cotg}(\operatorname{sen}\theta)\operatorname{cossec}^2(\operatorname{sen}\theta)$

39. $f'(t) = \sec^2(e^t)e^t + e^{\operatorname{tg} t}\sec^2 t$

41. $f'(t) = 4\operatorname{sen}(e^{\operatorname{sen}^2 t})\cos(e^{\operatorname{sen}^2 t})\, e^{\operatorname{sen}^2 t} \operatorname{sen} t \cos t$

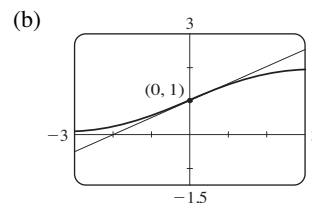
43. $g'(x) = 2r^2p(\ln a)(2ra^{rx} + n)^{p-1}a^{rx}$

45. $y' = \dfrac{-\pi\cos(\operatorname{tg}\pi x)\sec^2(\pi x)\operatorname{sen}\sqrt{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}\pi x)}}{2\sqrt{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}\pi x)}}$

47. $h'(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}$, $h''(x) = 1/(x^2 + 1)^{3/2}$

49. $e^{\alpha x}(\beta\cos\beta x + \alpha\operatorname{sen}\beta x)$; $e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2)\operatorname{sen}\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x]$

51. $y = -\frac{3}{16}x + \frac{11}{4}$ **53.** $y = -x + \pi$

55. (a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (b)

57. (a) $f'(x) = (2 - 2x^2)/\sqrt{2 - x^2}$

59. $((\pi/2) + 2n\pi, 3)$, $((3\pi/2) + 2n\pi, -1)$, n um inteiro

61. 24 **63.** (a) 30 (b) 36

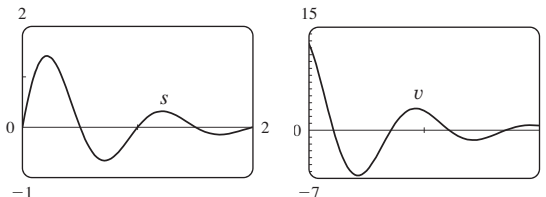
65. (a) $\frac{3}{4}$ (b) Não existe (c) -2

67. (a) $F'(x) = e^x f'(e^x)$ (b) $G'(x) = e^{f(x)}f'(x)$

69. 120 **71.** 96 **75.** $-2^{50}\cos 2x$

77. $v(t) = \frac{5}{2}\pi\cos(10\pi t)$ cm/s

79. (a) $\dfrac{dB}{dt} = \dfrac{7\pi}{54}\cos\dfrac{2\pi t}{5{,}4}$ (b) 0,16

81. $v(t) = 2e^{-1,5t}(2\pi\cos 2\pi t - 1{,}5\operatorname{sen} 2\pi t)$

83. dv/dt é a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo; dv/ds é a taxa de variação da velocidade com relação ao deslocamento

85. (a) $y = ab^t$ em que a ≈ 100,01244 e b ≈ 0,000045146
(b) $-670{,}63\ \mu$A

87. (b) A forma fatorada

91. (b) $-n\cos^{n-1}x \operatorname{sen}[(n + 1)x]$

EXERCÍCIOS 3.5 ■ PÁGINA 197

1. (a) $y' = -(y + 2 + 6x)/x$
(b) $y = (4/x) - 2 - 3x$, $y' = -(4/x^2) - 3$

3. (a) $y' = -y^2/x^2$ (b) $y = x/(x - 1)$, $y' = -1/(x - 1)^2$

5. $y' = -x^2/y^2$

7. $y' = -x(3x + 2y)/(x^2 + 8y)$ **9.** $y' = \dfrac{3y^2 - 5x^4 - 4x^3y}{x^4 + 3y^2 - 6xy}$

11. $y' = \dfrac{-2xy^2 - \operatorname{sen} y}{2x^2y + x\cos y}$ **13.** $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$

15. $y' = \dfrac{y(y - e^{x/y})}{y^2 - xe^{x/y}}$ **17.** $y' = \dfrac{4xy\sqrt{xy} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$

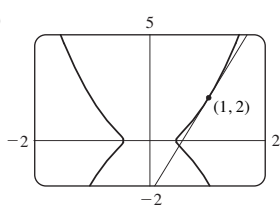
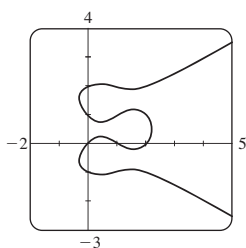
19. $y' = -y/x$ **21.** $-\frac{16}{13}$

23. $x' = \dfrac{-2x^4y + x^3 - 6xy^2}{4x^3y^2 - 3x^2y + 2y^3}$ **25.** $y = -x + 2$

27. $y = x + \frac{1}{2}$ **29.** $y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$

31. (a) $y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$ (b)

33. $-81/y^3$ **35.** $-2x/y^5$

37. (a)

Oito; $x \approx 0{,}42$, $1{,}58$

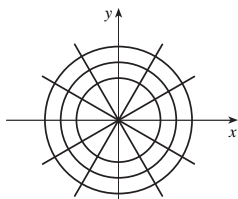
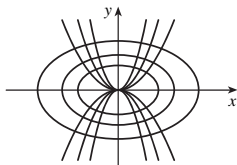
(b) $y = -x + 1$, $y = \frac{1}{3}x + 2$ (c) $1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$

39. $\left(\pm\frac{5}{4}\sqrt{3}, \pm\frac{5}{4}\right)$ **41.** $(x_0x/a^2) - (y_0y/b^2) = 1$

45. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1 + x)}$ **47.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - x}}$

49. $H'(x) = 1 + 2x \operatorname{arctg} x$ **51.** $h'(t) = 0$

53. $y' = -2e^{2x}/\sqrt{1 - e^{4x}}$ **55.** $1 - \dfrac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

59.

61.

63. $(\pm\sqrt{3}, 0)$ **65.** $(-1, -1), (1, 1)$ **67.** (b) $\frac{3}{2}$ **69.** 2

EXERCÍCIOS 3.6 ■ PÁGINA 204

1. A fórmula de derivação é mais simples.

3. $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ **5.** $f'(x) = \dfrac{3}{(3x - 1)\ln 2}$

7. $f'(x) = \dfrac{1}{5x\sqrt[5]{(\ln x)^4}}$ **9.** $f'(x) = (2 + \ln x)/(2\sqrt{x})$

11. $F'(t) = \dfrac{6}{2t + 1} - \dfrac{12}{3t - 1}$ **13.** $g'(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$

15. $y' = (1 + x - x\ln x)/(x(1 + x)^2)$ **17.** $y' = \dfrac{10x + 1}{5x^2 + x - 2}$

19. $y' = \dfrac{-x}{1 + x} \; \dfrac{1}{\ln 10} \log_{10}x$ **21.** $y' =$

23. $y' = x + 2x\ln(2x)$; $y'' = 3 + 2\ln(2x)$

25. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; $y'' = \dfrac{-x}{(1 + x^2)^{3/2}}$

27. $f'(x) = \dfrac{2x - 1 - (x - 1)\ln(x - 1)}{(x - 1)[1 - \ln(x - 1)]^2}$;

$(1, 1 + e) \cup (1 + e, \infty)$

29. $f'(x) = \dfrac{2(x - 1)}{x(x - 2)}$; $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

31. 1 **33.** $y = 3x - 2$ **35.** $\cos x + 1/x$

37. $y' = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6\left(\dfrac{10}{2x + 1} + \dfrac{24x^3}{x^4 - 3}\right)$

39. $y' = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{tg}^4 x}{(x^2 + 1)^2}\left(2\operatorname{cotg} x + \dfrac{4\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} - \dfrac{4x}{x^2 + 1}\right)$

41. $y' = x^x(1 + \ln x)$

43. $y' = x^{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \ln x\right)$

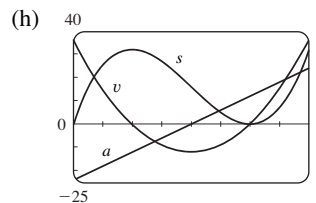
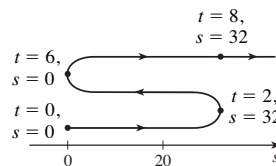
45. $y' = (\cos x)^x(-x\operatorname{tg} x + \ln\cos x)$

47. $y' = (\operatorname{tg} x)^{1/x}\left(\dfrac{\sec^2 x}{x\operatorname{tg} x} - \dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{x^2}\right)$

49. $y' = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 - 2y}$ **51.** $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n - 1)!}{(x - 1)^n}$

EXERCÍCIOS 3.7 ■ PÁGINA 213

1. (a) $3t^2 - 24t + 36$ (b) -9 m/s (c) $t = 2, 6$
(d) $0 \leqslant t < 2$, $t > 6$ (e) 96 m
(f) (g) $6t - 24$; -6 m/s^2

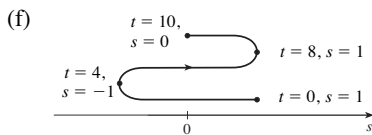
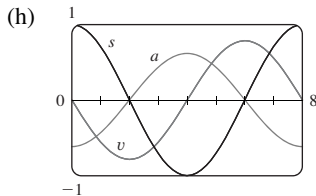
(h)

(i) Acelerando quando $2 < t < 4$ ou $t > 6$; freando quando $0 \leqslant t < 2$ ou $4 < t < 6$

3. (a) $-\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)$ (b) $-\frac{1}{8}\pi\sqrt{2}$ m/s (c) $t = 0, 4, 8$

(d) $4 < t < 8$ (e) 4 m

(f)

(g) $-\frac{1}{16}\pi^2 \cos(\pi t/4); \frac{1}{32}\pi^2\sqrt{2}$ m/s^2

(h)

(i) Acelerando quando $0 < t < 2, 4 < t < 6, 8 < t < 10$; freando quando $2 < t < 4, 6 < t < 8$

5. (a) Acelerando quando $0 < t < 1$ ou $2 < t < 3$; freando quando $1 < t < 2$
(b) Acelerando quando $1 < t < 2$ ou $3 < t < 4$; freando quando $0 < t < 1$ ou $2 < t < 3$

7. (a) $t = 4$ s
(b) $t = 1{,}5$ s; a velocidade tem um mínimo absoluto.

9. (a) 5,02 m/s (b) $\sqrt{17}$ m/s

11. (a) 30 mm^2/mm; a taxa na qual a área está crescendo com relação ao comprimento do lado quando x atinge 15 mm
(b) $\Delta A \approx 2x\,\Delta x$

13. (a) (i) 5π (ii) $4{,}5\pi$ (iii) $4{,}1\pi$
(b) 4π (c) $\Delta A \approx 2\pi r\,\Delta r$

15. (a) 8π pés^2/pé (b) 16π pés^2/pé (c) 24π pés^2/pé
A taxa aumenta à medida que o raio cresce.

17. (a) 6 kg/m (b) 12 kg/m (c) 18 kg/m
Na extremidade esquerda; na extremidade direita

19. (a) 4,75 A (b) 5 A; $t = \frac{2}{3}$ s

21. (a) $dV/dP = -C/P^2$ (b) No início

23. $400(3^t)\ln 3$; $\approx 6\,850$ bactérias/h

25. (a) 16 milhões/ano; 78,5 milhões/ano
(b) $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, onde $a \approx 0{,}00129371$, $b \approx -7{,}061422$, $c \approx 12\,822{,}979$, $d \approx -7\,743{,}770$
(c) $P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
(d) 14,48 milhões/ano; 75,29 milhões/ano (menor)
(e) 81,62 milhões/ano

27. (a) 0,926 cm/s; 0,694 cm/s; 0
(b) 0; $-92{,}6$ (cm/s)/cm; $-185{,}2$ (cm/s)/cm
(c) No centro; na borda

29. (a) $C'(x) = 12 - 0{,}2x + 0{,}0015x^2$
(b) \$32/metro; o custo de produzir o 201º metro
(c) \$32,20

31. (a) $[xp'(x) - p(x)]/x^2$; a produtividade média aumenta à medida que novos trabalhadores são adicionados.

33. $-0{,}2436$ K/min

35. (a) 0 e 0 (b) $C = 0$
(c) (0, 0), (500, 50); é possível que estas espécies coexistam.

EXERCÍCIOS 3.8 ■ PÁGINA 222

1. Cerca de 235

3. (a) $100(4{,}2)^t$ (b) $\approx 7\,409$ (c) $\approx 10\,632$ bactérias/h
(d) $(\ln 100)/(\ln 4{,}2) \approx 3{,}2$ h

5. (a) 1 508 milhões, 1 871 milhões (b) 2 161 milhões
(c) 3 972 milhões; as guerras na primeira metade do século, o aumento da espectativa de vida na segunda metade

7. (a) $Ce^{-0{,}0005t}$ (b) $-2\,000 \ln 0{,}9 \approx 211$ s

9. (a) $100 \times 2^{-t/30}$ mg (b) $\approx 9{,}92$ mg (c) $\approx 199{,}3$ anos

11. $\approx 2\,500$ anos **13.** (a) ≈ 58ºC (b) ≈ 98 min

15. (a) $13{,}\overline{3}$ ºC (b) $\approx 67{,}74$ min

17. (a) $\approx 64{,}5$ kPa (b) $\approx 39{,}9$ kPa

19. (a) (i) \$3 828,84 (ii) \$3 840,25 (iii) \$3 850,08
(iv) \$3 851,61 (v) \$3 852,01 (vi) \$3 852,08
(b) $dA/dt = 0{,}05A$, $A(0) = 3\,000$

EXERCÍCIOS 3.9 ■ PÁGINA 227

1. $dV/dt = 3x^2\,dx/dt$ **3.** 48 cm^2/s **5.** $3/(25\pi)$ m/min

7. 70 **9.** $\pm\frac{46}{13}$

11. (a) A altura do avião é 2 km e sua velocidade é 800 km/h.
(b) A taxa na qual a distância do avião à estação está crescendo quando o avião estiver a 3 km da estação
(c)
(d) $y^2 = x^2 + 4$
(e) $\frac{800}{3}\sqrt{5}$ km/h

13. (a) A altura do poste (6m), a altura do homem (2 m) e a velocidade do homem (1,5 m/s)
(b) A taxa na qual a extremidade da sombra do homem está se movendo quando ele está a 10 m do poste
(c)

(d) $\dfrac{6}{2} = \dfrac{x+y}{y}$
(e) $\frac{9}{4}$ m/s

15. 78 km/h **17.** $8\,064/\sqrt{8\,334\,400} \approx 2{,}79$ m/s

19. 1,6 cm/min **21.** $\frac{720}{13} \approx 55{,}4$ km/h

23. $(10\,000 + 800\,000\pi/9) \approx 2{,}89 \times 10^5$ cm^3/min

25. $\frac{10}{3}$ cm/min **27.** $4/(3\pi) \approx 0{,}42$ m/min **29.** 0,3 m^2/s

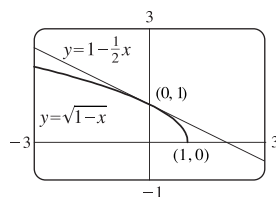
31. 80 cm^3/min **33.** $\frac{107}{810} \approx 0{,}132$ Ω/s **35.** 0,396 m/min

37. 120 m/s (b) $\approx 0{,}107$ rad/s **39.** $\frac{10}{9}\pi$ km/min

41. $1.650/\sqrt{31} \approx 296$ km/h **43.** $\frac{7}{4}\sqrt{15} \approx 6{,}78$ m/s

EXERCÍCIOS 3.10 ■ PÁGINA 233

1. $L(x) = 3x - 2$ **3.** $L(x) = -x + \pi/2$

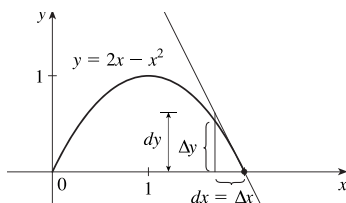
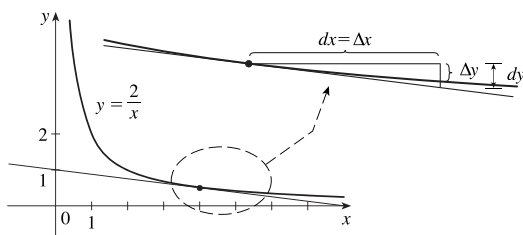
5. $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$;
$\sqrt{0{,}9} \approx 0{,}95$,
$\sqrt{0{,}99} \approx 0{,}995$

7. $-0{,}69 < x < 1{,}09$ **9.** $-0{,}045 < x < 0{,}055$

11. (a) $dy = 2x(x \cos 2x + \operatorname{sen} 2x)dx$ (b) $dy = \dfrac{t}{1+t^2}\,dt$

13. (a) $dy = \dfrac{-2}{(u-1)^2}\,du$ (b) $dy = -\dfrac{6r^2}{(1-r^3)^3}\,dr$

15. (a) $dy = \frac{1}{10}e^{x/10}\,dx$ (b) 0,01; 0,0101

17. (a) $dy = \sec^2 x\,dx$ (b) $-0{,}2$

19. $\Delta y = 0{,}64$, $dy = 0{,}8$

21. $\Delta y = 0{,}1$, $dy = -0{,}125$

23. 32,08 **25.** 4,02 **27.** $1 - \pi/90 \approx 0{,}965$

33. (a) 270 cm^3, 0,01, 1% (b) 36 cm^2, 0,006, 0,6%

35. (a) $84/\pi \approx 27$ cm^2; $\frac{1}{84} \approx 0{,}012$
(b) $1\,764/\pi^2 \approx 179$ cm^3; $\frac{1}{56} \approx 0{,}018$

37. (a) $2\pi rh\,\Delta r$ (b) $\pi(\Delta r)^2 h$

43. (a) 4,8, 5,2 (b) Muito grande

EXERCÍCIOS 3.11 ■ PÁGINA 241

1. (a) 0 (b) 1 **3.** (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) \approx 3{,}62686$

5. (a) 1 (b) 0

21. $\operatorname{sech} x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{senh} x = \frac{4}{3}$, $\operatorname{cossech} x = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tgh} x = \frac{4}{5}$, $\operatorname{cotgh} x = \frac{5}{4}$

23. (a) 1 (b) -1 (c) ∞ (d) $-\infty$ (e) 0 (f) 1
(g) ∞ (h) $-\infty$ (i) 0

31. $f'(x) = 3\operatorname{sech}^2 3x$ **33.** $h'(x) = 4x^3 \operatorname{senh}(x^4)$

35. $y' = 3e^{\cosh 3x} \operatorname{senh} 3x$ **37.** $f'(t) = 2e^t \operatorname{sech}^2(e^t)\operatorname{tgh}(e^t)$

39. $y' = \dfrac{\operatorname{sech}^2 x - 2}{1 + \operatorname{tgh}^2 x}$ **41.** $G'(x) = \dfrac{\operatorname{senh} x}{(1+\cosh x)^2}$

43. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$ **45.** $y' = \operatorname{senh}^{-1}(x/3)$

47. $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$

51. (a) 0,3572 (b) 70,34°

53. (b) $y = 2 \operatorname{senh} 3x - 4\cosh 3x$

55. $(\ln(1+\sqrt{2}), \sqrt{2})$

CAPÍTULO 3 REVISÃO ■ PÁGINA 243

Teste Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Falso
9. Verdadeiro **11.** Verdadeiro

Exercícios

1. $6x(x^4 - 3x^2 + 5)^2(2x^2 - 3)$ **3.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^7}}$

5. $\dfrac{2(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$ **7.** $2\cos 2\theta\, e^{\operatorname{sen} 2\theta}$

9. $\dfrac{t^2+1}{(1-t^2)^2}$ **11.** $\dfrac{\cos\sqrt{x} - \sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

13. $\dfrac{e^{1/x}(1+2x)}{x^4}$ **15.** $\dfrac{1-y^4-2xy}{4xy^3+x^2-3}$

17. $\dfrac{2\sec 2\theta\,(\operatorname{tg} 2\theta - 1)}{(1+\operatorname{tg} 2\theta)^2}$ **19.** $(1+c^2)e^{cx}\operatorname{sen} x$

21. $3^{x\ln x}(\ln 3)(1+\ln x)$ **23.** $-(x-1)^{-2}$

25. $\dfrac{2x - y\cos(xy)}{x\cos(xy)+1}$ **27.** $\dfrac{2}{(1+2x)\ln 5}$

29. $\cot x - \operatorname{sen} x \cos x$ **31.** $\dfrac{4x}{1+16x^2} + \operatorname{tg}^{-1}(4x)$

33. $5\sec 5x$ **35.** $-6x \operatorname{cossec}^2(3x^2+5)$

37. $\cos(\operatorname{tg}\sqrt{1+x^3})(\sec^2\sqrt{1+x^3})\,\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$

39. $2\cos\theta\,\operatorname{tg}(\operatorname{sen}\theta)\sec^2(\operatorname{sen}\theta)$

41. $\dfrac{(x-2)^4(3x^2-55x-52)}{2\sqrt{x+1}(x+3)^8}$ **43.** $2x^2\cosh(x^2) + \operatorname{senh}(x^2)$

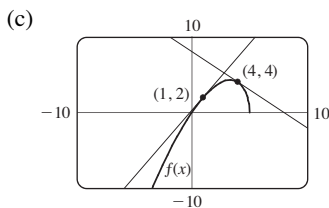
45. $3\operatorname{tgh} 3x$ **47.** $\dfrac{\cosh x}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 x - 1}}$

49. $\dfrac{(-3\operatorname{sen}(e^{\sqrt{\operatorname{tg} 3x}})e^{\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}\sec^2(3x)}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}$ **51.** $-\frac{4}{27}$ **53.** $-5x^4/y^{11}$

57. $y = 2\sqrt{3}x + 1 - \pi\sqrt{3}/3$ **59.** $y = 2x + 1$

61. $y = -x + 2$; $y = x + 2$

63. (a) $\dfrac{10 - 3x}{2\sqrt{5 - x}}$ (b) $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$, $y = -x + 8$

(c)

65. $(\pi/4, \sqrt{2})$, $(5\pi/4, -\sqrt{2})$ **69.** (a)2 (b)44

71. $2xg(x) + x^2g'(x)$ **73.** $2g(x)g'(x)$ **75.** $g'(e^x)e^x$

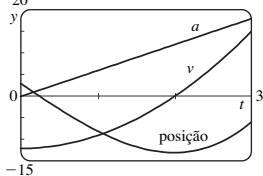
77. $g'(x)/g(x)$ **79.** $\dfrac{f'(x)[g(x)]^2 + g'(x)[f(x)]^2}{[f(x) + g(x)]^2}$

81. $f'(g(\text{sen } 4x))g'(\text{sen } 4x)(\cos 4x)(4)$ **83.** $(-3, 0)$

85. $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x$

87. $v(t) = -Ae^{-ct}[c\cos(\omega t + \delta) + \omega \text{ sen}(\omega t + \delta)]$,
$a(t) = Ae^{-ct}[(c^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \delta) + 2c\omega \text{ sen}(\omega t + \delta)]$

89. (a) $v(t) = 3t^2 - 12$; $a(t) = 6t$ (b) $t > 2$; $0 \leqslant t < 2$
(c) 23 (d)

(e) $t > 2$; $0 < t < 2$

91. 4 kg/m **93.** (a) $200(3{,}24)^t$ (b) $\approx 22\,040$
(c) $\approx 25\,910$ bactérias/h (d) $(\ln 50)/(\ln 3{,}24) \approx 3{,}33$ h

95. (a) C_0e^{-kt} (b) ≈ 100 h **97.** $\frac{4}{3}$ cm^2/min

99. $117/\sqrt{666} \approx 4{,}53$ m/s **101.** 400 m/h

103. (a) $L(x) = 1 + x$; $\sqrt[3]{1 + 3x} \approx 1 + x$; $\sqrt[3]{1{,}03} \approx 1{,}01$
(b) $-0{,}23 < x < 0{,}40$

105. $12 + \frac{3}{2}\pi \approx 16{,}7$ cm^2 **107.** $\frac{1}{32}$ **109.** $\frac{1}{4}$ **111.** $\frac{1}{8}x^2$

PROBLEMAS QUENTES ▪ PÁGINA 248

1. $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{4})$ **9.** $(0, \frac{5}{4})$

11. (a) $4\pi\sqrt{3}/\sqrt{11}$ rad/s (b) $40\left(\cos\theta + \sqrt{8 + \cos^2\theta}\right)$ cm
(c) $-480\pi \text{ sen } \theta \left(1 + \cos\theta/\sqrt{8 + \cos^2\theta}\right)$ cm/s

15. $x_T \in (3, \infty)$, $y_T \in (2, \infty)$, $x_N \in \left(0, \frac{5}{3}\right)$, $y_N \in \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

17. (b) (i) 53º (ou 127º) (ii) 63º (ou 117º)

19. R se aproxima do ponto médio do raio AO.

21. $-\text{sen } a$ **23.** $2\sqrt{e}$ **27.** $(1, -2)$, $(-1, 0)$

29. $\sqrt{29}/58$ **31.** $2 + \frac{375}{128}\pi \approx 11\,204$ cm^3/min

CAPÍTULO 4

EXERCÍCIOS 4.1 ▪ PÁGINA 258

Abreviações: abs., absoluto; loc., local; máx., máximo; mín., mínimo

1. Mínimo absoluto: menor valor da função no domínio todo da função; mínimo local em c: menor valor da função quando x está próximo de c

3. Máx. abs. em s, mín. abs. em r, máx. loc. em c, mín. loc. em b e r

5. Máx. abs. $f(4) = 5$, máx. loc. $f(4) = 5$ e $f(6) = 4$, mín. loc. $f(2) = 2$ e $f(5) = 3$

7.

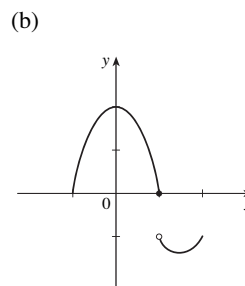
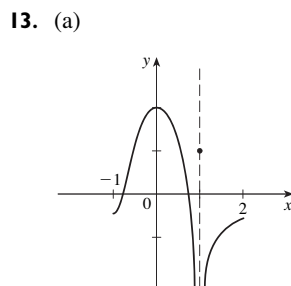
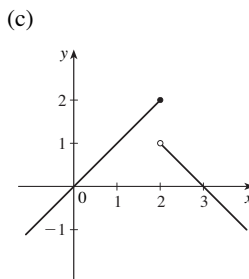
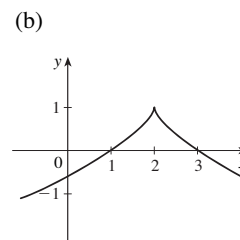
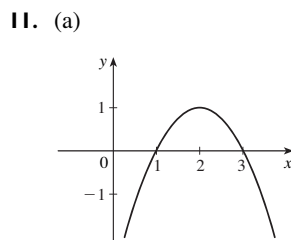
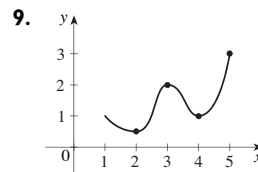
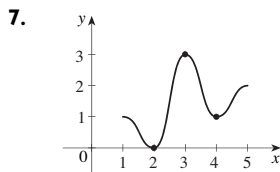
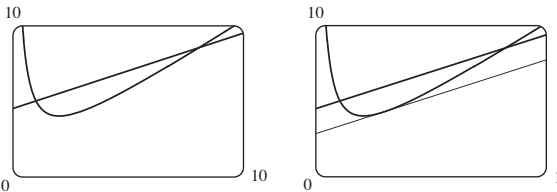
9.

11. (a)

(b)

(c)

13. (a)

(b)

15. Máx. abs. $f(1) = 5$ **17.** Nenhum

19. Mín. abs. $f(0) = 0$

21. Máx. abs. $f(-3) = 9$, mín. abs. e loc. $f(0) = 0$

23. Nenhum

25. Máx. abs. $f(0) = 1$ **27.** Máx. abs. $f(3) = 2$

29. $-\frac{2}{5}$ **31.** $-4, 2$ **33.** $0, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ **35.** $0, 2$

37. $0, \frac{4}{9}$ **39.** $0, \frac{8}{7}, 4$ **41.** $n\pi$ (n um inteiro) **43.** $0, \frac{2}{3}$

45. 10 **47.** $f(0) = 5$, $f(2) = -7$

49. $f(-1) = 8, f(2) = -19$

51. $f(-3) = 47, f(\pm\sqrt{2}) = -2$ **53.** $f(1) = \frac{1}{2}, f(0) = 0$

55. $f(\sqrt{2}) = 2, f(-1) = -\sqrt{3}$

57. $f(\pi/6) = \frac{3}{2}\sqrt{3}, f(\pi/2) = 0$

59. $f(2) = 2/\sqrt{e}, f(-1) = -1/\sqrt[8]{e}$

61. $f(1) = \ln 3, f(-\frac{1}{2}) = \ln\frac{3}{4}$

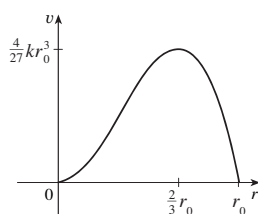
63. $f\left(\dfrac{a}{a+b}\right) = \dfrac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$

65. (a) 2,19, 1,81 (b) $\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2, -\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2$

67. (a) 0,32, 0,00 (b) $\frac{3}{16}\sqrt{3}, 0$ **69.** $\approx 3{,}9665$ ºC

71. Mais barato, $t \approx 0{,}855$ (junho de 1994);
mais caro, $t \approx 4{,}618$ (março de 1998)

73. (a) $r = \frac{2}{3}r_0$ (b) $v = \frac{4}{27}kr_0^3$

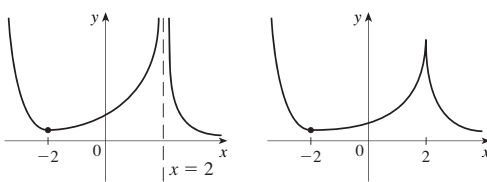
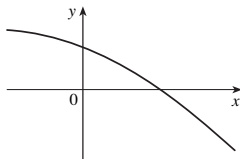
(c)

EXERCÍCIOS 4.2 ■ PÁGINA 267

1. 2 **3.** $\frac{9}{4}$ **5.** f não é derivável em $(-1, 1)$

7. 0,8, 3,2, 4,4, 6,1

9. (a), (b) (c) $2\sqrt{2}$

11. 0 **13.** $-\frac{1}{2}\ln[\frac{1}{6}(1 - e^{-6})]$ **15.** f não é contínua em 3

23. 16 **25.** Não **31.** Não

EXERCÍCIOS 4.3 ■ PÁGINA 275

Abreviações: cres., crescente; decres., decrescente; CC, côncava para cima; CB, côncava para baixo; AH, assíntota horizontal; AV, assíntota vertical; AO, assíntota oblíqua; int x, intersecção com o eixo x; int y, intersecção com o eixo y; PI, ponto de inflexão.

1. (a) (1, 3), (4, 6) (b) (0, 1), (3, 4) (c) (0, 2)
(d) (2, 4), (4, 6) (e) (2, 3)

3. (a) Teste C/D (b) Teste da Concavidade
(c) Encontrando os pontos nos quais a concavidade muda.

5. (a) Cres. em (1, 5); decres. em (0, 1) e (5, 6)
(b) Máx. loc. em $x = 5$, mín. loc. em $x = 1$

7. $x = 1, 7$

9. (a) Cres. em $(-\infty, 2), (2, \infty)$; decres. em $(-2, 2)$
(b) Máx. loc. $f(-2) = 17$; mín. loc. $f(2) = -15$
(c) CC on $(0, \infty)$; CB on $(-\infty, 0)$; PI (0, 1)

11. (a) Cres. em $(-1, 0), (1, \infty)$; decres. em $(-\infty, -1), (0, 1)$
(b) Máx. loc. $f(0) = 3$; mín. loc. $f(\pm 1) = 2$
(c) CC em $(-\infty, -\sqrt{3}/3), (\sqrt{3}/3, \infty)$;
CB em $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$; PI $(\pm\sqrt{3}/3, \frac{22}{9})$

13. (a) Cres. em $(0, \pi/4), (5\pi/4, 2\pi)$; decres. em $(\pi/4, 5\pi/4)$
(b) Máx. loc. $f(\pi/4) = \sqrt{2}$; mín. loc. $f(5\pi/4) = -\sqrt{2}$
(c) CC em $(3\pi/4, 7\pi/4)$; CB em $(0, 3\pi/4), (7\pi/4, 2\pi)$;
PI $(3\pi/4, 0), (7\pi/4, 0)$

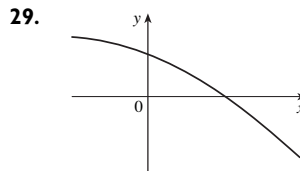
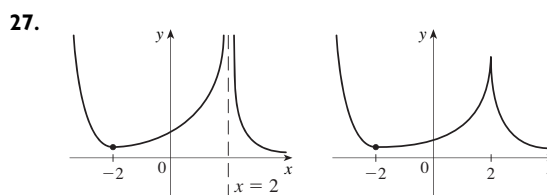
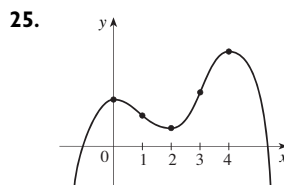
15. (a) Cres. em $(-\frac{1}{3}\ln 2, \infty)$; decres. em $(-\infty, -\frac{1}{3}\ln 2)$
(b) Mín. loc. $f(-\frac{1}{3}\ln 2) = 2^{-2/3} + 2^{1/3}$ (c) CC em $(-\infty, \infty)$

17. (a) Cres. em $(0, e^2)$; decres. em (e^2, ∞)
(b) Máx. loc. $f(e^2) = 2/e$
(c) CC em $(e^{8/3}, \infty)$; CB em $(0, e^{8/3})$; PI $(e^{8/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3})$

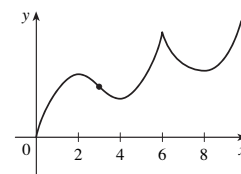
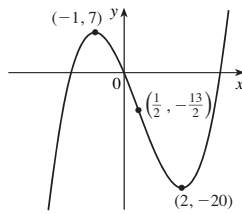
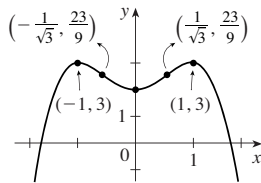
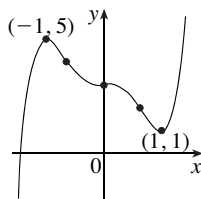
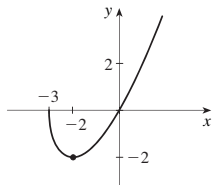
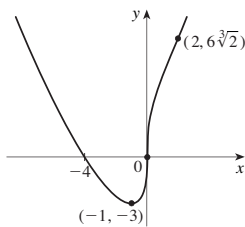
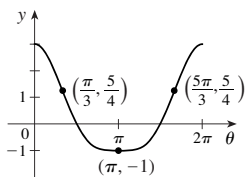
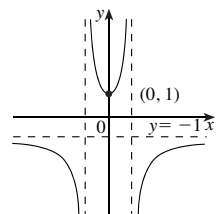
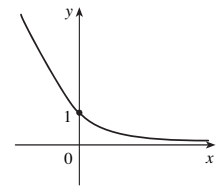
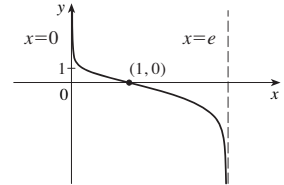
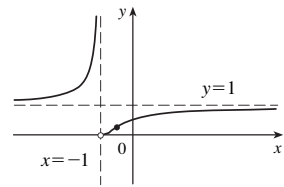
19. Máx. loc. $f(-1) = 7$, mín. loc. $f(1) = -1$

21. Máx. loc. $f(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$

23. (a) f tem um máximo local em 2.
(b) f tem uma tangente horizontal em 6.

25.

27.

29.

31. (a) Cres. em $(0, 2), (4, 6), (8, \infty)$;
decres. em (2, 4), (6, 8)
(b) Máx. loc. em $x = 2, 6$;
mín. loc. em $x = 4, 8$
(c) CC em $(3, 6), (6, \infty)$;
CB em (0, 3)
(d) 3 (e) Ver o gráfico à direita.

33. (a) Cres. em $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$; decres. em $(-1, 2)$
(b) Máx. loc. $f(-1) = 7$; mín. loc. $f(2) = -20$
(c) CC em $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; CB em $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$; PI $\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}\right)$
(d) Ver o gráfico à direita.

35. (a) Cres. em $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$; decres. em $(-1, 0)$, $(1, \infty)$
(b) Máx. loc. $f(-1) = 3$, $f(1) = 3$; mín. loc. $f(0) = 2$
(c) CC em $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$; CB em $(-\infty, -1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, \infty)$; PI $\left(\pm 1/\sqrt{3}, \frac{23}{9}\right)$
(d) Ver o gráfico à direita.

37. (a) Cres. em $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; decres. em $(-1, 1)$
(b) Máx. loc. $h(-1) = 5$; mín. loc. $h(1) = 1$
(c) CB em $(-\infty, -1/\sqrt{2})$, $(0, 1/\sqrt{2})$; CC em $(-1/\sqrt{2}, 0)$, $(1/\sqrt{2}, \infty)$; PI $(0, 3)$, $\left(\pm 1/\sqrt{2}, 3 \pm \frac{7}{8}\sqrt{2}\right)$
(d) Ver o gráfico à direita.

39. (a) Cres. em $(-2, \infty)$; decres. em $(-3, -2)$
(b) Mín. loc. $A(-2) = -2$
(c) CC em $(-3, \infty)$
(d) Ver o gráfico à direita.

41. (a) Cres. em $(-1, \infty)$; decres. em $(-\infty, -1)$
(b) Mín. loc. $C(-1) = -3$
(c) CC em $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$; CB em $(0, 2)$; PI $(0, 0)$, $(2, 6\sqrt[3]{2})$
(d) Ver o gráfico à direita.

43. (a) Cres. em $(\pi, 2\pi)$; decres. em $(0, \pi)$
(b) Mín. loc. $f(\pi) = -1$
(c) CC em $(\pi/3, 5\pi/3)$; CB em $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 2\pi)$; PI $\left(\pi/3, \frac{5}{4}\right)$, $\left(5\pi/3, \frac{5}{4}\right)$
(d) Ver o gráfico à direita.

45. (a) AV $x = \pm 1$, AH $y = -1$
(b) Cres. em $(0, 1)$, $(1, \infty)$; decres. em $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$
(c) Mín. loc. $f(0) = 1$
(d) CC em $(-1, 1)$; CB em $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$
(e) Ver o gráfico à direita.

47. (a) AH $y = 0$
(b) Decres. em $(-\infty, \infty)$
(c) Nenhum
(d) CC em $(-\infty, \infty)$
(e) Ver o gráfico à direita.

49. (a) AV $x = 0$, $x = e$
(b) Decres. em $(0, e)$
(c) Nenhum
(d) CC em $(0, 1)$; CB em $(1, e)$; PI $(1, 0)$
(e) Ver o gráfico à direita.

51. (a) AH $y = 1$, AV $x = -1$
(b) Cres. em $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$
(c) Nenhum
(d) CC em $(-\infty, -1)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$; CB em $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$; PI $\left(-\frac{1}{2}, 1/e^2\right)$
(e) Ver o gráfico à direita.

53. $(3, \infty)$

55. (a) Máx. loc. e abs. $f(1) = \sqrt{2}$, nenhum mín.
(b) $\frac{1}{4}(3 - \sqrt{17})$

57. (b) CC em (0,94, 2,57), (3,71, 5,35); CB em (0, 0.94), (2,57, 3,71), (5,35, 2π); PI (0.94, 0.44), (2,57, −0,63), (3,71, −0,63), (5,35, 0,44)

59. CC em (−∞, −0,6), (0,0, ∞); CB em (−0,6, 0,0)

61. (a) A taxa de crescimento inicialmente é muito pequena, aumenta para um máximo em $t \approx 8$ h, depois decresce em direção ao zero.
(b) Quando $t = 8$ (c) CC em (0, 8); CB em (8, 18) (d) (8, 350)

63. $K(3) - K(2)$; CB

65. 28,57 min, quando a taxa de aumento do nível de droga na corrente sanguínea é maior; 85,71 min, quando a taxa de decrescimento é maior

67. $f(x) = \frac{1}{9}(2x^3 + 3x^2 - 12x + 7)$

EXERCÍCIOS 4.4 ▪ PÁGINA 284

1. (a) Indeterminado (b) 0 (c) 0
(d) ∞, $-\infty$, ou não existe (e) Indeterminado

3. (a) $-\infty$ (b) Indeterminado (c) ∞

5. -2 **7.** $\frac{9}{5}$ **9.** $-\infty$ **11.** ∞ **13.** p/q

15. 0 **17.** $-\infty$ **19.** ∞ **21.** $\frac{1}{2}$ **23.** 1

25. $\ln\frac{5}{3}$ **27.** 1 **29.** $\frac{1}{2}$ **31.** 0 **33.** $-1/\pi^2$

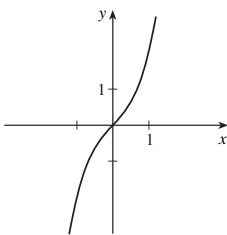
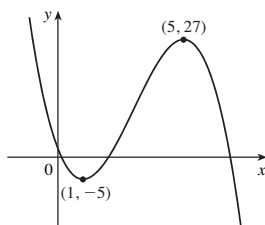
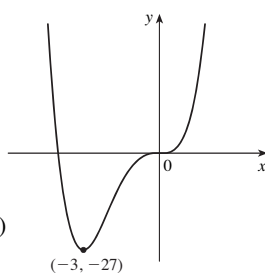
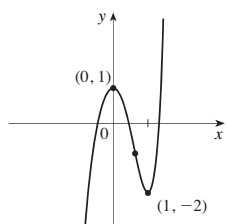
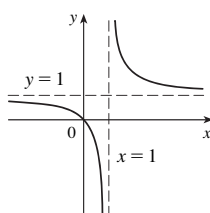
35. $\frac{1}{2}a(a-1)$ **37.** $\frac{1}{24}$ **39.** π **41.** 3 **43.** 0

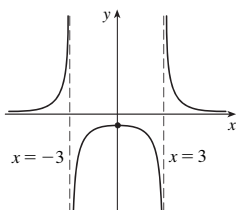
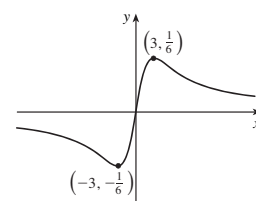
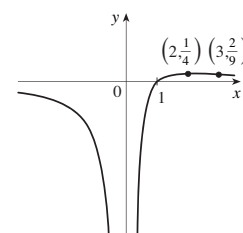
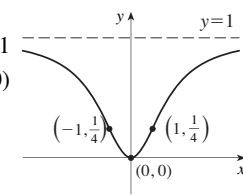
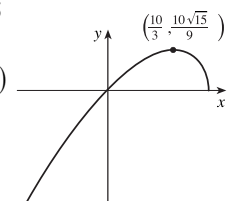
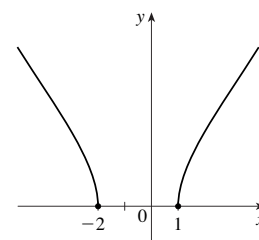
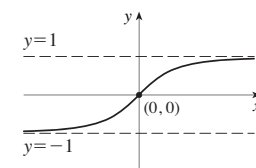
45. $-2/\pi$ **47.** $\frac{1}{2}$ **49.** $\frac{1}{2}$ **51.** ∞ **53.** 1

55. e^{-2} **57.** e^3 **59.** 1 **61.** e^4 **63.** $1/\sqrt{e}$

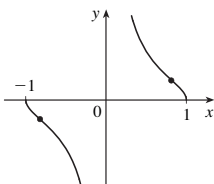
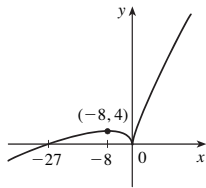
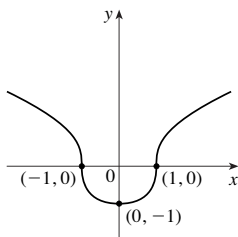
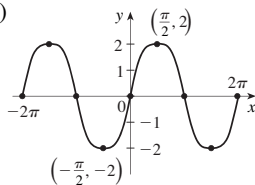
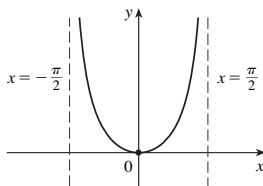
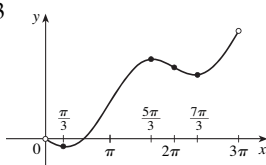
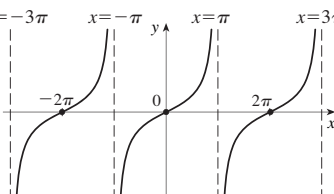
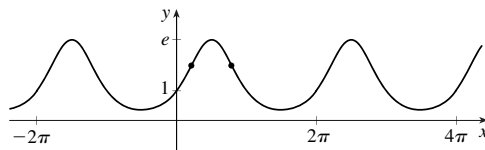
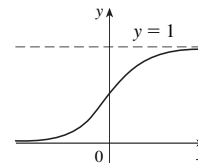
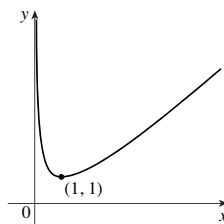
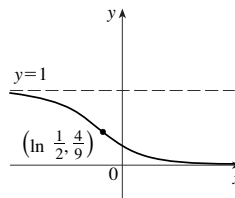
65. e^2 **67.** $\frac{1}{4}$ **71.** 1 **77.** $\frac{16}{9}a$ **79.** 56 **83.** (a) 0

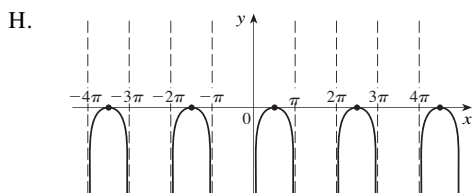
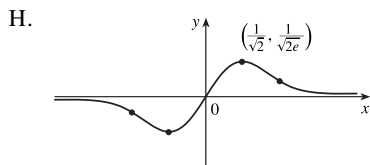
EXERCÍCIOS 4.5 ■ PÁGINA 293

1. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 0; int. x, 0
C. Em relação a $(0, 0)$ D. Nenhuma
E. Cres. em $(-\infty, \infty)$ F. Nenhuma
G. CC em $(0, \infty)$; CB em $(-\infty, 0)$;
PI $(0, 0)$
H. Ver o gráfico à direita.

3. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 2; int. x, 2, $\frac{1}{2}(7 \pm 3\sqrt{5})$
C. Nenhuma D. Nenhuma
E. Cres. em $(1, 5)$;
decres. em $(-\infty, 1)$, $(5, \infty)$
F. Mín. loc. $f(1) = -5$;
máx. loc. $f(5) = 27$
G. CC em $(-\infty, 3)$;
CB em $(3, \infty)$; PI $(3, 11)$
H. Ver o gráfico à direita.

5. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 0; int. x, -4, 0
C. Nenhuma D. Nenhuma
E. Cres. em $(-3, \infty)$;
decres. em $(-\infty, -3)$
F. Mín. loc. $f(-3) = -27$
G. CC em $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$;
CB em $(-2, 0)$; PI $(0, 0)$, $(-2, -16)$
H. Ver o gráfico à direita.

7. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 1
C. Nenhuma D. Nenhuma
E. Cres. em $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$;
decres. em $(0, 1)$
F. Máx. loc. $f(0) = 1$;
Mín. loc. $f(1) = -2$
G. CC em $(1/\sqrt[3]{4}, \infty)$;
CB em $(-\infty, 1/\sqrt[3]{4})$;
PI $(1/\sqrt[3]{4}, 1 - 9/(2\sqrt[3]{16}))$
H. Ver o gráfico à direita.

9 A. $\{x \mid x \neq 1\}$ B. int. y, 0; int. x, 0
C. Nenhuma D. AV $x = 1$, AH $y = 1$
E. Decres. em $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$
F. Nenhuma
G. CC em $(1, \infty)$; CB em $(-\infty, 1)$
H. Ver o gráfico à direita.

11. A. $\{x \mid x \neq \pm 3\}$ B. int. y, $-\frac{1}{9}$
C. Em relação ao eixo y D. AV $x = \pm 3$, AH $y = 0$

E. Cres. em $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$;
decres. em $(0, 3)$, $(3, \infty)$
F. Máx. loc. $f(0) = -\frac{1}{9}$
G. CC em $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$;
CB em $(-3, 3)$
H. Ver o gráfico à direita.

13. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 0; int. x, 0
C. Em relação a $(0, 0)$
D. AH $y = 0$
E. Cres. em $(-3, 3)$;
decres. em $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$
F. Mín. loc. $f(-3) = -\frac{1}{6}$;
máx. loc. $f(3) = \frac{1}{6}$;
G. CC em $(-3\sqrt{3}, 0)$, $(3\sqrt{3}, \infty)$;
CB em $(-\infty, -3\sqrt{3})$, $(0, 3\sqrt{3})$;
PI $(0, 0)$, $(\pm 3\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/12)$
H. Ver o gráfico à direita.

15. A. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ B. int. x, 1
C. Nenhuma D. AH $y = 0$; AV $x = 0$
E. Cres. em $(0, 2)$;
decres. em $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$
F. Máx. loc. $f(2) = \frac{1}{4}$
G. CC em $(3, \infty)$;
CB em $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$; PI $\left(3, \frac{2}{9}\right)$
H. Ver o gráfico à direita.

17. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 0, int. x, 0
C. Em relação ao eixo y D. AH $y = 1$
E. Cres. em $(0, \infty)$; decres. em $(-\infty, 0)$
F. Mín. loc. $f(0) = 0$
G. CC em $(-1, 1)$;
CB em $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; PI $\left(\pm 1, \frac{1}{4}\right)$
H. Ver o gráfico à direita.

19. A. $(-\infty, 5]$ B. int. y, 0; int. x, 0, 5
C. Nenhuma D. Nenhuma
E. Cres. em $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$; decres. em $\left(\frac{10}{3}, 5\right)$
F. Máx. loc. $f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{10}{9}\sqrt{15}$
G. CB em $(-\infty, 5)$
H. Ver o gráfico à direita.

21. A. $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
B. int. x, -2, 1
C. Nenhuma D. Nenhuma
E. Cres. em $(1, \infty)$;
decres. em $(-\infty, -2)$ F. Nenhum
G. CB em $(-\infty, -2)$, $(1, \infty)$
H. Ver o gráfico à direita.

23. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 0; int. x, 0
C. Em relação à origem
D. AH $y = \pm 1$
E. Cres. em $(-\infty, \infty)$ F. Nenhum
G. CC em $(-\infty, 0)$;
CB em $(0, \infty)$; PI $(0, 0)$
H. Ver o gráfico à direita.

25. A. $\{x \mid |x| \leqslant 1, x \neq 0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$

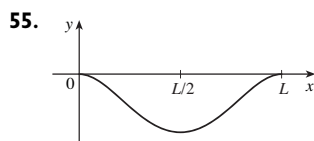
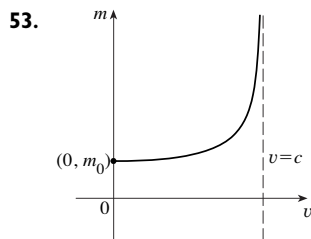
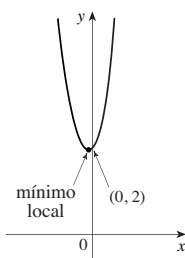
B. int. x, ± 1 C. Em relação a $(0, 0)$
D. AV $x = 0$
E. Dec. on $(-1, 0)$, $(0, 1)$

F. Nenhum
G. CC em $(-1, -\sqrt{2/3})$, $(0, \sqrt{2/3})$;
CB em $(-\sqrt{2/3}, 0)$, $(\sqrt{2/3}, 1)$;
PI $(\pm\sqrt{2/3}, \pm 1/\sqrt{2})$
H. Ver o gráfico à direita.

27. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 0; int. x, 0, -27
C. Nenhuma D. Nenhuma
E. Cres. em $(-\infty, -8)$, $(0, \infty)$;
decres. em $(-8, 0)$
F. Mín. loc. $f(0) = 0$,
máx. loc. $f(-8) = 4$
G. CB em $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$
H. Ver o gráfico à direita.

29. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, -1; int. x, ± 1
C. Em relação ao eixo y
D. Nenhuma
E. Cres. em $(0, \infty)$;
decres. em $(-\infty, 0)$
F. Mín. loc. $f(0) = -1$
G. CC em $(-1, 1)$;
CB em $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$; PI $(\pm 1, 0)$
H. Ver o gráfico à direita.

31. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 0; int. x, $n\pi$ (n um inteiro)
C. Em relação à origem, período 2π D. Nenhuma
E. Cres. em $(2n\pi - \pi/2, 2n\pi + \pi/2)$;
decres. em $(2n\pi + \pi/2, 2n\pi + 3\pi/2)$
F. Máx. loc. $f(2n\pi + \pi/2) = 2$;
Mín. loc. $f(2n\pi + 3\pi/2) = -2$
G. CC em $((2n-1)\pi, 2n\pi)$;
CB em $(2n\pi, (2n+1)\pi)$; PI $(n\pi, 0)$
H. Ver o gráfico à direita.

33. A. $(-\pi/2, \pi/2)$ B. int. y, 0; int. x, 0 C. Em relação ao eixo y
D. AV $x = \pm\pi/2$
E. Cres. em $(0, \pi/2)$
decres. em $(-\pi/2, 0)$;
F. Mín. loc. $f(0) = 0$
G. CC em $(-\pi/2, \pi/2)$
H. Ver o gráfico à direita.

35. A. $(0, 3\pi)$ C. Nenhuma D. Nenhuma
E. Cres. em $(\pi/3, 5\pi/3)$, $(7\pi/3, 3\pi)$;
decres. em $(0, \pi/3)$, $(5\pi/3, 7\pi/3)$
F. Mín. loc. $f(\pi/3) = (\pi/6) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $f(7\pi/3) = (7\pi/6) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$;
máx. loc. $f(5\pi/3) = (5\pi/6) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
G. CC em $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$;
CB em $(\pi, 2\pi)$;
PI $(\pi, \pi/2)$, $(2\pi, \pi)$
H. Ver o gráfico à direita.

37. A. Todos os reais, exceto $(2n+1)\pi$ (n um inteiro)
B. int. y, 0; int. x, $2n\pi$
C. Em relação à origem, período 2π
D. AV $x = (2n+1)\pi$
E. Cres. em $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$ F. Nenhum
G. CC em $(2n\pi, (2n+1)\pi)$; CB em $((2n-1)\pi, 2n\pi)$;
PI $(2n\pi, 0)$
H.

39. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 1 C. Período 2π D. Nenhuma
As respostas para E-G são para o intervalo $[0, 2\pi]$.
E. Cres. em $(0, \pi/2)$, $(3\pi/2, 2\pi)$; decres. em $(\pi/2, 3\pi/2)$
F. Máx. loc. $f(\pi/2) = e$; Mín. loc. $f(3\pi/2) = e^{-1}$
G. CC em $(0, \alpha)$, $(\beta, 2\pi)$ onde $\alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})\right)$,
$\beta = \pi - \alpha$; CB em (α, β); PI quando $x = \alpha, \beta$
H.

41. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, $\frac{1}{2}$ C. Nenhuma
D. AH $y = 0$, $y = 1$
E. Cres. em $\mathbb{R}$ F. Nenhum
G. CC em $(-\infty, 0)$; CB em $(0, \infty)$;
PI $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ H. Ver o gráfico à direita.

43. A. $(0, \infty)$ B. Nenhuma
C. Nenhuma D. AV $x = 0$
E. Cres. em $(1, \infty)$; decres. em $(0, 1)$
F. Mín. loc. $f(1) = 1$
G. CC em $(0, \infty)$
H. Ver o gráfico à direita.

45. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, $\frac{1}{4}$ C. Nenhuma
D. AH $y = 0$, $y = 1$
E. Decres. em $\mathbb{R}$ F. Nenhum
G. CC em $\left(\ln\frac{1}{2}, \infty\right)$;
CB em $\left(-\infty, \ln\frac{1}{2}\right)$; PI $\left(\ln\frac{1}{2}, \frac{4}{9}\right)$
H. Ver o gráfico à direita.

47. A. Todo x em $(2n\pi, (2n+1)\pi)$ (n um inteiro)
B. int. x, $\pi/2 + 2n\pi$ C. Período 2π D. AV $x = n\pi$
E. Cres. em $(2n\pi, \pi/2 + 2n\pi)$;
decres. em $(\pi/2 + 2n\pi, (2n+1)\pi)$
F. Máx. loc. $f(\pi/2 + 2n\pi) = 0$
G. CB em $(2n\pi, (2n+1)\pi)$

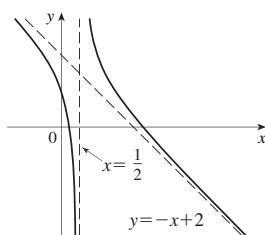
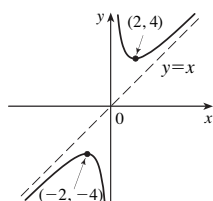
H.

49. A. ℝ B. int. y, 0; int. x, 0 C. Em relação à origem (0, 0)
D. AH $y = 0$
E. Cres. em $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$; decres. em $(-\infty, -1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, \infty)$
F. Mín. loc. $f(-1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2e}$; máx. loc. $f(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2e}$
G. CC em $(-\sqrt{3/2}, 0)$, $(\sqrt{3/2}, \infty)$; CB em $(-\infty, -\sqrt{3/2})$, $(0, \sqrt{3/2})$
PI $(\pm\sqrt{3/2}, \pm\sqrt{3/2}e^{-3/2})$, (0, 0)
H.

51. A. ℝ B. int. y, 2
C. Nenhuma D. Nenhuma
E. Cres. em $\left(\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}, \infty\right)$;
decres. em $\left(-\infty, \frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}\right)$
F. Mín. loc. $f\left(\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/5} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2/5}$
G. CC em $(-\infty, \infty)$
H. Ver o gráfico à direita.

y
mínimo local
(0, 2)
0
x

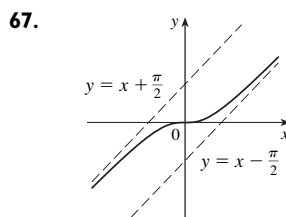
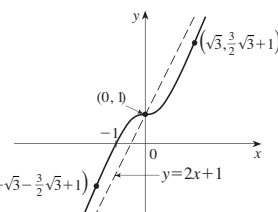
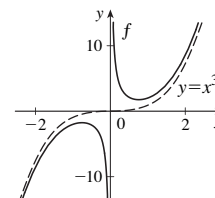
53.

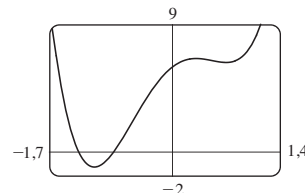
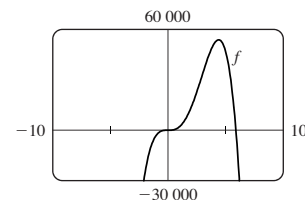
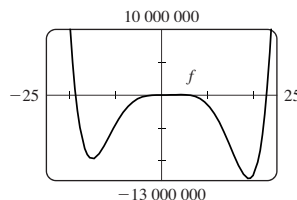
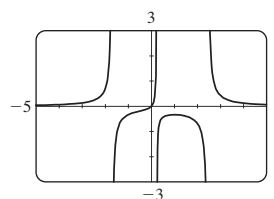
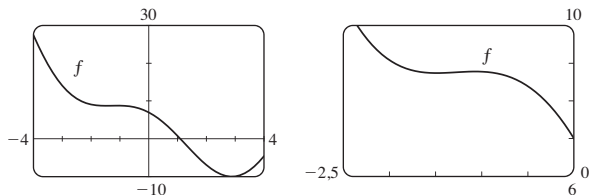
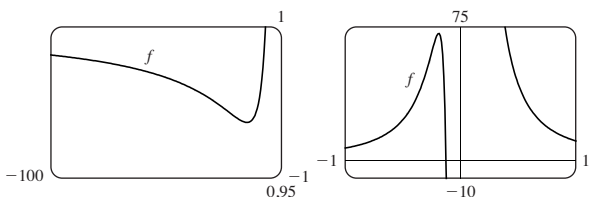
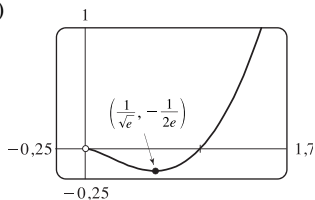
55.

57. $y = x - 1$

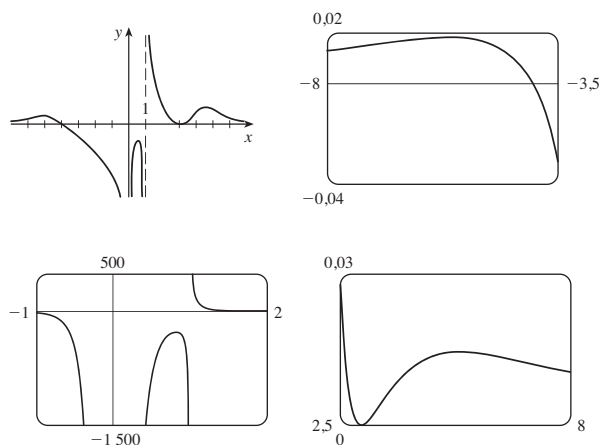
59. $y = 2x - 2$

61. A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
B. int. y, 1; int. x, $\frac{1}{4}(5 \pm \sqrt{17})$
C. Nenhuma
D. AV $x = \frac{1}{2}$; AO $y = -x + 2$
E. Decres. em $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
F. Nenhum
G. CC em $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; CB em $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$
H. Ver o gráfico à direita.

63. A. $\{x \mid x \neq 0\}$ B. Nenhuma
C. Em relação a (0, 0)
D. AV $x = 0$; AO $y = x$
E. Cres. em $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$;
decres. em $(-2, 0)$, $(0, 2)$
F. Máx. loc. $f(-2) = -4$;
mín. loc. $f(2) = 4$
G. CC em $(0, \infty)$; CB em $(-\infty, 0)$
H. Ver o gráfico à direita.

65. A. ℝ B. int. y, 1; int. x, -1
C. Nenhuma
D. AO $y = 2x + 1$
E. Cres. em $(-\infty, \infty)$
F. Nenhum
G. CC em $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$;
CB em $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, \infty)$;
PI $\left(\pm\sqrt{3}, 1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, (0, 1)
H. Ver o gráfico à direita.

y
$\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}+1\right)$
(0, 1)
−1
0
x
$y=2x+1$
$\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}+1\right)$

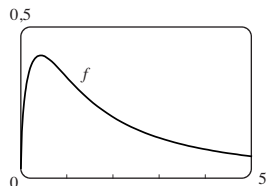
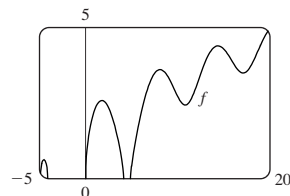
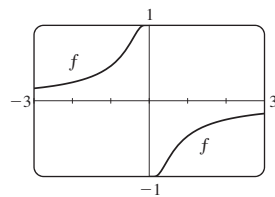
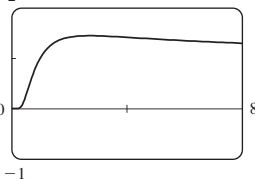
67.

71. AV $x = 0$, assíntota a $y = x^3$

EXERCÍCIOS 4.6 ■ PÁGINA 300

1. Cres. em $(-1{,}1, 0{,}3)$, $(0{,}7, \infty)$; decres. em $(-\infty, -1{,}1)$, $(0{,}3, 0{,}7)$;
máx. loc. $f(0{,}3) \approx 6{,}6$, mín. loc. $f(-1{,}1) \approx -1.1$, $f(0{,}7) \approx 6{,}3$;
CC em $(-\infty, -0{,}5)$, $(0{,}5, \infty)$; CB em $(-0{,}5, 0{,}5)$;
PI $(-0{,}5, 2{,}1)$, $(0{,}5, 6{,}5)$

3. Cres. em$(-15, 4{,}40)$, $(18{,}93, \infty)$;
decres. em $(-\infty, -15)$, $(4{,}40, 18{,}93)$;
máx. loc. $f(4{,}40) = 53\,800$; Mín. loc. $f(-15) \approx -9\,700\,000$,
$f(18{,}93) \approx -12\,700\,000$; CC em $(-\infty, -11{,}34)$, $(0, 2{,}92)$,
$(15{,}08, \infty)$; CB em $(-11{,}34, 0)$, $(2{,}92, 15{,}08)$;
PI (0, 0), $\approx (-11{,}34, -6\,250\,000)$, $(2{,}92, 31\,800)$,
$(15{,}08, -8\,150\,000)$

5. Cres. em $(-\infty, -1{,}7)$, $(-1{,}7, 0{,}24)$, $(0{,}24, 1)$;
decres. em $(1, 2{,}46)$, $(2{,}46, \infty)$; máx. loc. $f(1) = -\frac{1}{3}$;
CC em $(-\infty, -1{,}7)$, $(-0{,}506, 0{,}24)$, $(2{,}46, \infty)$;
CB em $(-1{,}7, -0{,}506)$, $(0{,}24, 2{,}46)$; PI $(-0{,}506, -0{,}192)$

7. Cres. em $(-1{,}49, -1{,}07)$, $(2{,}89, 4)$; decres. em $(-4, -1{,}49)$, $(-1{,}07, 2{,}89)$; máx. loc. $f(-1{,}07) \approx 8{,}79$; mín. loc. $f(-1.49) \approx 8{,}75$, $f(2.89) \approx -9{,}99$; CC em $(-4, -1{,}28)$, $(1{,}28, 4)$; CB em $(-1{,}28, 1{,}28)$; PI $(-1{,}28, 8{,}77)$, $(1{,}28, -1{,}48)$

9. Cres. em $(-8 - \sqrt{61}, -8 + \sqrt{61})$; decres. em $(-\infty, -8 - \sqrt{61})$, $(-8 + \sqrt{61}, 0)$, $(0, \infty)$; CC em $(-12 - \sqrt{138}, -12 + \sqrt{138})$, $(0, \infty)$; CB em $(-\infty, -12 - \sqrt{138})$, $(-12 + \sqrt{138}, 0)$

11. (a)

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
(c) Mín. loc. $f(1/\sqrt{e}) = -1/(2e)$;
CB em $(0, e^{-3/2})$; CC em $(e^{-3/2}, \infty)$

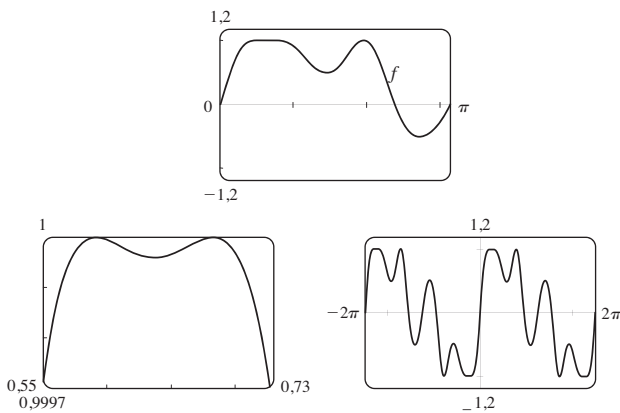
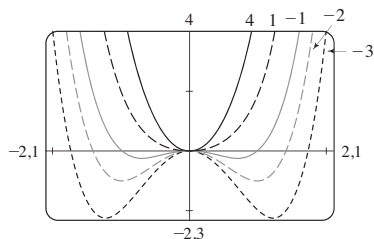
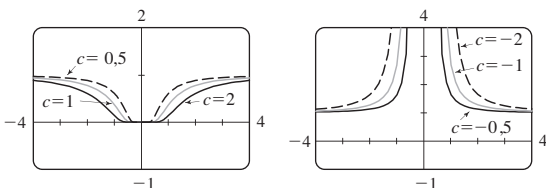
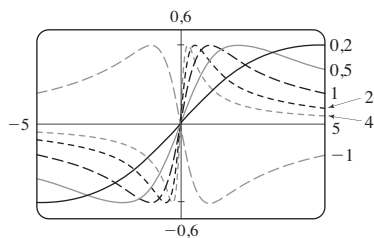
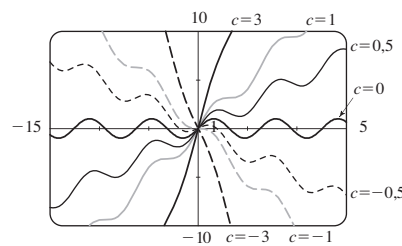
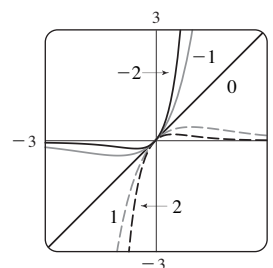
13. Máx. loc. $f(-5{,}6) \approx 0{,}018$, $f(0{,}82) \approx -281{,}5$, $f(5{,}2) \approx 0{,}0145$; mín. loc. $f(3) = 0$

15. $f'(x) = -\dfrac{x(x+1)^2(x^3 + 18x^2 - 44x - 16)}{(x-2)^3(x-4)^5}$

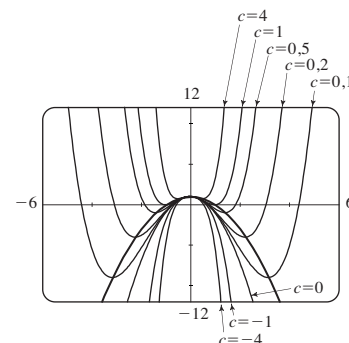
$$f''(x) = 2\,\frac{(x+1)(x^6 + 36x^5 + 6x^4 - 628x^3 + 684x^2 + 672x + 64)}{(x-2)^4(x-4)^6}$$

CC em $(-35{,}3, -5{,}0)$, $(-1, -0{,}5)$, $(-0{,}1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, \infty)$; CB em $(-\infty, -35{,}3)$, $(-5{,}0, -1)$, $(-0{,}5, -0{,}1)$; PI $(-35{,}3, -0{,}015)$, $(-5{,}0, -0{,}005)$, $(-1, 0)$, $(-0{,}5, 0{,}00001)$, $(-0{,}1, 0{,}0000066)$

17. Cres. em $(0, 0{,}43)$; decres. em $(0{,}43, \infty)$; máx. loc. $f(0{,}43) \approx 0{,}41$; CC em $(0{,}94, \infty)$; CB em $(0, 0{,}94)$; PI $(0{,}94, 0{,}34)$

19. Cres. em $(-4{,}91, -4{,}51)$, $(0, 1{,}77)$, $(4{,}91, 8{,}06)$, $(10{,}79, 14{,}34)$, $(17{,}08, 20)$;
decres. em $(-4{,}51, -4{,}10)$, $(1{,}77, 4{,}10)$, $(8{,}06, 10{,}79)$, $(14{,}34, 17{,}08)$;
máx. loc. $f(-4{,}51) \approx 0{,}62$, $f(1{,}77) \approx 2{,}58$, $f(8{,}06) \approx 3{,}60$, $f(14{,}34) \approx 4{,}39$;
Mín. loc. $f(10{,}79) \approx 2{,}43$, $f(17{,}08) \approx 3{,}49$;
CC em $(9{,}60, 12{,}25)$, $(15{,}81, 18{,}65)$;
CB em $(-4{,}91, -4{,}10)$, $(0, 4{,}10)$, $(4{,}91, 9{,}60)$, $(12{,}25, 15{,}81)$, $(18{,}65, 20)$;
PIs em $(9{,}60, 2{,}95)$, $(12{,}25, 3{,}27)$, $(15{,}81, 3{,}91)$, $(18{,}65, 4{,}20)$

21. Cres. em $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$;
CC em $(-\infty, -0{,}4)$, $(0, 0{,}4)$;
CB em $(-0{,}4, 0)$, $(0{,}4, \infty)$;
PI $(\pm 0{,}4, \pm 0{,}8)$

23. (a)

(b) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$
(c) máx. loc. $f(e) = e^{1/e}$ (d) PI em $x \approx 0{,}58, 4{,}37$

25. Máx. $f(0{,}59) \approx 1$, $f(0{,}68) \approx 1$, $f(1{,}96) \approx 1$;
mín. $f(0{,}64) \approx 0{,}99996$, $f(1{,}46) \approx 0{,}49$, $f(2{,}73) \approx -0{,}51$;
PI $(0{,}61, 0{,}99998)$, $(0{,}66, 0{,}99998)$, $(1{,}17, 0{,}72)$, $(1{,}75, 0{,}77)$, $(2{,}28, 0{,}34)$

1,2
0
f
π
−1,2

27. Para $c \geqslant 0$, tnão existe nenhum PI e existe apenas um ponto extremo, a origem. Para $c < 0$, existe um ponto de máximo na origem, dois pontos de mínimo e dois PIs, os quais se movem para baixo e para longe da origem quando $c \to -\infty$.

29. Não existe nenhum máximo nem mínimo, independentemente do valor de c. Para $c < 0$, existe uma assíntota vertical em $x = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. $c = 0$ é um valor de transição no qual $f(x) = 1$ para $x \neq 0$. Para $c > 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, e existem dois PIs, que se afastam do eixo y quando $c \to \infty$.

31. Para $c > 0$, os valores máximo e mínimo são sempre $\pm\frac{1}{2}$, mas os pontos extremos e os PIs se aproximam do eixo y quando c cresce. $c = 0$ é um valor de transição: quando c é substituído por $-c$, a curva é refletida em relação ao eixo x.

33. Para $|c| < 1$, o gráfico tem valores de máximos e mínimos locais; para $|c| \geqslant 1$, não tem. A função é crescente para $c \geqslant 1$ e decrescente para $c \leqslant -1$. À medida que c varia, os PI se movem verticalmente, mas não horizontalmente.

35.

Para $c > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Para $c < 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
À medida que $|c|$ cresce, os pontos de máximo e de mínimo e os PIs se aproximam da origem.

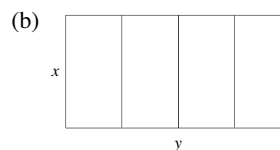
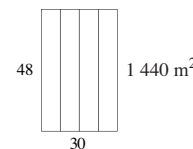
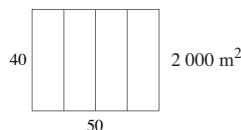
37. (a) Positivo (b)

EXERCÍCIOS 4.7 ■ PÁGINA 307

1. (a) 11, 12 (b) 11,5, 11,5 **3.** 10, 10

5. 25 m por 25 m **7.** $N = 1$

9. (a)

20
2 000 m²
100

(b)

(c) $A = xy$ (d) $5x + 2y = 300$ (e) $A(x) = 150x - \frac{5}{2}x^2$
(f) 2 250 m^2

11. 100 m por 150 m **13.** 4 000 cm^3 **15.** \$191,28

17. $\left(-\frac{28}{17}, \frac{7}{17}\right)$ **19.** $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$ **21.** Quadrado, lado $\sqrt{2}r$

23. $L/2, \sqrt{3}\,L/4$ **25.** Base $\sqrt{3}r$, altura $3r/2$

27. $4\pi r^3/(3\sqrt{3})$ **29.** $\pi r^2(1+\sqrt{5})$ **31.** 24 cm, 36 cm

33. (a) Use todo o fio para o quadrado
(b) $40\sqrt{3}/(9+4\sqrt{3})$ m para o quadrado

35. Altura = raio = $\sqrt[3]{V/\pi}$ cm **37.** $V = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$

41. $E^2/(4r)$

43. (a) $\frac{3}{2}S^2 \operatorname{cossec}\theta(\operatorname{cossec}\theta - \sqrt{3}\operatorname{cotg}\theta)$ (b) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$
(c) $6s[h + s/(2\sqrt{2})]$

45. Reme diretamente para B **47.** $\approx$ 4,85 km a leste da refinaria

49. $4\sqrt[3]{3}(1+\sqrt[3]{3})$ m da fonte mais forte

51. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$

53. (b) (i) \$342 491; \$342/unit; \$390/unidade (ii) 400
(iii) \$320/unidade

55. (a) $p(x) = 19 - \frac{1}{3\,000}x$ (b) \$9,50

57. (a) $p(x) = 550 - \frac{1}{10}x$ (b) \$175 (c) \$100

61. 9,35 m **65.** $x = 15$ cm **67.** $\pi/6$

69. À distância de $5 - 2\sqrt{5}$ de A **71.** $\frac{1}{2}(L+W)^2$

73. (a) Cerca de 5,1 km de B (b) C está perto de B; C está perto de D; $W/L = \sqrt{25 + x^2}/x$, em que $x = |BC|$
(c) $\approx$ 1,07; nenhum de tais valores (d) $\sqrt{41}/4 = 1,6$

EXERCÍCIOS 4.8 ■ PÁGINA 317

1. (a) $x_2 \approx 2{,}3, x_3 \approx 3$ (b) Não **3.** $\frac{4}{5}$ **5.** 1,1797

7. 1.1785 **9.** −1.25 **11.** 1,82056420 **13.** 2,224745

15. 0,876726 **17.** −0,724492, 1,220744

19. 1,412391, 3,057104 **21.** 0,520269

23. −1,93822883, 1,21997997, 1,13929375, 2,98984102

25. −1,97806681, 0,82646233

27. 0,21916368, 1,08422462 **29.** (b) 31,622777

35. (a) −1,293227, −0,441731, 0,507854 (b) −2,0212

37. (0,904557, 1,855277) **39.** (0,410245, 0,347810)

41. 0,76286%

EXERCÍCIOS 4.9 ■ PÁGINA 323

1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$ **3.** $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^4 + C$

5. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ **7.** $F(x) = 4x^{5/4} - 4x^{7/4} + C$

9. $F(x) = 4x^{3/2} - \frac{6}{7}x^{7/6} + C$

11. $F(x) = \begin{cases} -5/(4x^8) + C_1 & \text{se } x < 0 \\ -5/(4x^8) + C_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

13. $F(u) = \frac{1}{3}u^3 - 6u^{-1/2} + C$

15. $G(\theta) = \operatorname{sen}\theta + 5\cos\theta + C$

17. $F(x) = 5e^x - 3\operatorname{senh} x + C$

19. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - 1/x^2 + C$

21. $F(x) = x^5 - \frac{1}{3}x^6 + 4$ **23.** $x^3 + x^4 + Cx + D$

25. $\frac{3}{20}x^{8/3} + Cx + D$ **27.** $e^t + \frac{1}{2}Ct^2 + Dt + E$

29. $x - 3x^2 + 8$ **31.** $4x^{3/2} + 2x^{5/2} + 4$

33. $2\operatorname{sen} t + \operatorname{tg} t + 4 - 2\sqrt{3}$

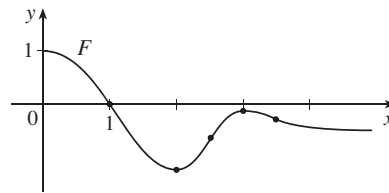
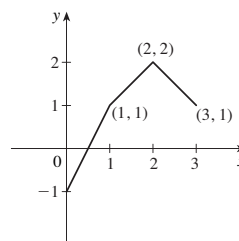
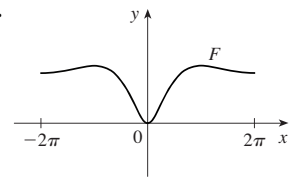
35. $\frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{1}{2}$ se $x > 0$; $\frac{3}{2}x^{2/3} - \frac{5}{2}$ se $x < 0$

37. $2x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 22x + \frac{59}{3}$

39. $-\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 5\theta + 4$ **41.** $x^2 - 2x^3 + 9x + 9$

43. $x^2 - \cos x - \frac{1}{2}\pi x$ **45.** $-\ln x + (\ln 2)x - \ln 2$

47. 10 **49.** b

51.

53. **55.**

57. $s(t) = 1 - \cos t - \operatorname{sen} t$ **59.** $s(t) = \frac{1}{6}t^3 - t^2 + 3t + 1$

61. $s(t) = -10\operatorname{sen} t - 3\cos t + (6/\pi)t + 3$

63. (a) $s(t) = 450 - 4{,}9t^2$ (b) $\sqrt{450/4{,}9} \approx 9{,}58$ s
(c) $-9{,}8\sqrt{450/4{,}9} \approx -93{,}9$ m/s (d) Aproximadamente 9,09 s

67. $\approx$ 81,6 m **69.** \$742,08 **71.** $\frac{130}{11} \approx 11{,}8$ s

73. $\frac{5}{3}$ m/s^2 **75.** 62 500 km/h$^2 \approx$ 4,82 m/s^2

77. (a) 36 926 km (b) 34 898 km (c) 30 min 21 s
(d) 89 278 km

CAPÍTULO 4 REVISÃO ■ PÁGINA 326

Teste Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadeiro **7.** Falso
9. Verdadeiro **11.** Verdadeiro **13.** Falso **15.** Verdadeiro
17. Verdadeiro **19.** Verdadeiro

Exercícios

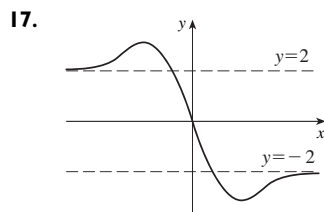
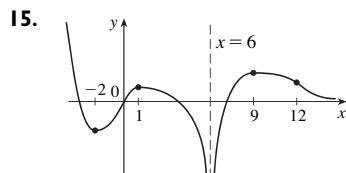
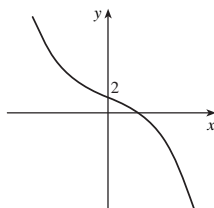
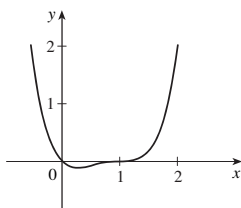
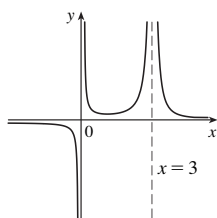
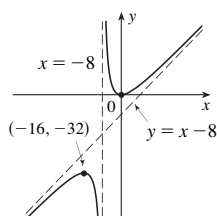
1. Máx. abs. $f(4) = 5$, mín. abs. e loc. $f(3) = 1$;
Mín. loc. $f(3) = 1$

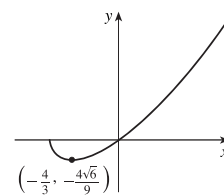
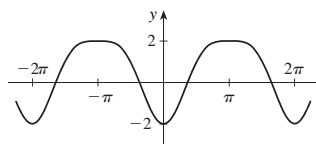
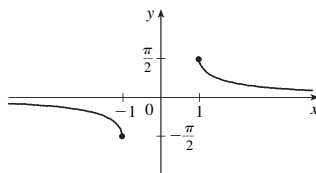
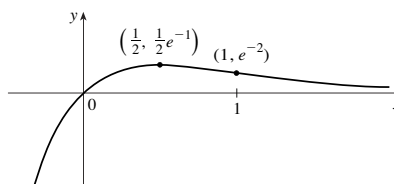
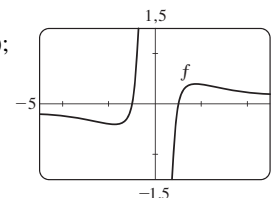
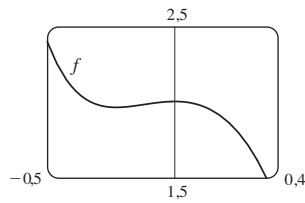
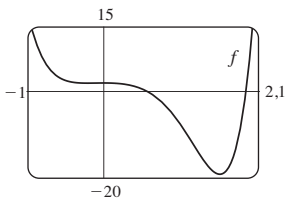
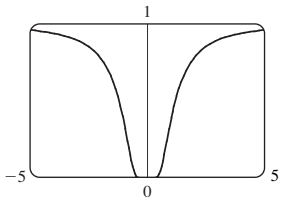
3. Máx. abs. $f(2) = \frac{2}{5}$, mín. abs. e loc. $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{9}{2}$

5. Máx. abs. $f(\pi) = \pi$; mín. abs. $f(0) = 0$; máx. loc. $f(\pi/3) = (\pi/3) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$; mín. loc. $f(2\pi/3) = (2\pi/3) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

7. π **9.** 8 **11.** 0 **13.** $\frac{1}{2}$

15.

17.

19. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 2
C. Nenhuma D. Nenhuma
E. Decres. em $(-\infty, \infty)$ F. Nenhum
G. CC em $(-\infty, 0)$;
CB em $(0, \infty)$; PI $(0, 2)$
H. Ver o gráfico à direita.

21. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 0; int. x, 0, 1
C. Nenhuma D. Nenhuma
E. Cres. em $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$,
decres. em $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$
F. Mín. loc. $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}$
G. CC em $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right), (1, \infty)$;
CB em $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; PI $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right), (1, 0)$
H. Ver o gráfico à direita.

23. A. $\{x \mid x \neq 0, 3\}$
B. Nenhuma C. Nenhuma
D. AH $y = 0$; AV $x = 0, x = 3$
E. Cres. em $(1, 3)$;
decres. em $(-\infty, 0), (0, 1), (3, \infty)$
F. Mín. loc. $f(1) = \frac{1}{4}$
G. CC em $(0, 3), (3, \infty)$;
CB em $(-\infty, 0)$
H. Ver o gráfico à direita.

25. A. $\{x \mid x \neq 8\}$
B. int. y, 0; int. x, 0 C. Nenhuma
D. AV $x = -8$; AO $y = x - 8$
E. Cres. em $(-\infty, -16), (0, \infty)$;
decres. em $(-16, -8), (-8, 0)$
F. Máx. loc. $f(-16) = -32$;
mín. loc. $f(0) = 0$
G. CC em $(-8, \infty)$; CB em $(-\infty, -8)$
H. Ver o gráfico à direita.

27. A. $[-2, \infty)$

B. int. y, 0; int. x, -2, 0
C. Nenhuma D. Nenhuma
E. Cres. em $\left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$,
decres.em $\left(-2, -\frac{4}{3}\right)$
F. Mín. loc. $f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{9}\sqrt{6}$
G. CC em $(-2, \infty)$
H. Ver o gráfico à direita.

29. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, -2
C. Em relação ao eixo y, período 2π D. Nenhuma
E. Cres. em $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$, n um inteiro;
decres. em $((2n - 1)\pi, 2n\pi)$
F. Máx. loc. $f((2n + 1)\pi) = 2$; mín. loc. $f(2n\pi) = -2$
G. CC em $(2n\pi - (\pi/3), 2n\pi + (\pi/3))$;
CB em $(2n\pi + (\pi/3), 2n\pi + (5\pi/3))$; PI $\left(2n\pi \pm (\pi/3), -\frac{1}{4}\right)$
H.

31. A. $\{x \mid |x| \geqslant 1\}$ B. Nenhuma C. Em relação a $(0, 0)$
D. AH $y = 0$ E. Decres. em $(-\infty, -1), (1, \infty)$
F. Nenhum G. CC em $(1, \infty)$; CB em $(-\infty, -1)$
H.

33. A. $\mathbb{R}$ B. int. y, 0; int. x, 0 C. Nenhuma D. AH $y = 0$
E. Cres. em $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, decres. em $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
F. Máx. loc. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1/(2e)$
G. CC em $(1, \infty)$; CB em $(-\infty, 1)$; PI $(1, e^{-2})$
H.

35. Cres. em $(-\sqrt{3}, 0), (0, \sqrt{3})$;
decres. em $(-\infty, -\sqrt{3}), (\sqrt{3}, \infty)$;
máx. loc. $f(\sqrt{3}) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$,
mín. loc. $f(-\sqrt{3}) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$;
CC em $(-\sqrt{6}, 0), (\sqrt{6}, \infty)$;
CB em $(-\infty, -\sqrt{6}), (0, \sqrt{6})$;
PI $(\sqrt{6}, \frac{5}{36}\sqrt{6}), (-\sqrt{6}, -\frac{5}{36}\sqrt{6})$

37. Cres. em $(-0{,}23, 0), (1{,}62, \infty)$; decres. em $(-\infty, -0{,}23)$, $(0, 1{,}62)$; máx. loc. $f(0) = 2$; mín. loc. $f(-0{,}23) \approx 1{,}96$, $f(1{,}62) \approx -19{,}2$; CC em $(-\infty, -0{,}12), (1{,}24, \infty)$; CB em $(-0{,}12, 1{,}24)$; PI $(-0{,}12, 1{,}98), (1{,}24, -12{,}1)$

39.

$(\pm 0{,}82, 0{,}22)$; $(\pm\sqrt{2/3}, e^{-3/2})$

41. $-2{,}96, -0{,}18, 3{,}01; -1{,}57, 1{,}57; -2{,}16, -0{,}75, 0{,}46, 2{,}21$

43. Para $C > -1$, f é periódica com período 2π e tem máximos locais em $2n\pi + \pi/2$, n um inteiro. Para $C \leqslant -1$, f não tem gráfico. Para $-1 < C \leqslant 1$, f tem assíntotas verticais. Para $C > 1$, f é contínua em $\mathbb{R}$. À medida que C aumenta, f se move para cima e sua oscilação se torna menos pronunciada.

49. (a) 0 (b) CC em $\mathbb{R}$ **53.** $3\sqrt{3}r^2$

55. $4/\sqrt{3}$ cm de D **57.** $L = C$ **59.** \$11,50

61. 1,297383 **63.** 1,16718557

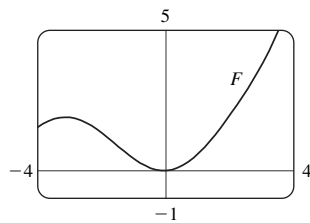
65. $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^{-1} x + C$

67. $f(x) = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{3}{5}x^{5/3} + C$

69. $f(t) = t^2 + 3\cos t + 2$

71. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + 4x^4 + 2x + 1$

73. $s(t) = t^2 - \operatorname{tg}^{-1} t + 1$

75. (b) $0{,}1e^x - \cos x + 0{,}9$ (c)

77. Não

79. (b) Cerca de 25,44 cm por 5,96 cm (c) $2\sqrt{300}$ cm, $2\sqrt{600}$ cm

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 330

5. 24 **7.** $(-2, 4), (2, -4)$ **11.** $-3{,}5 < a < 2{,}5$

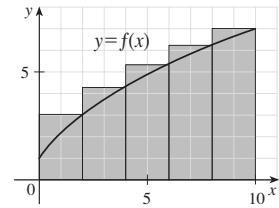
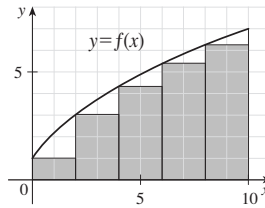
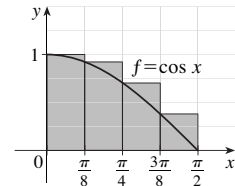
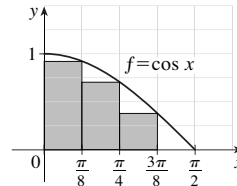
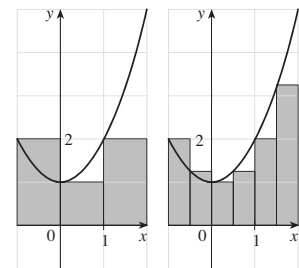
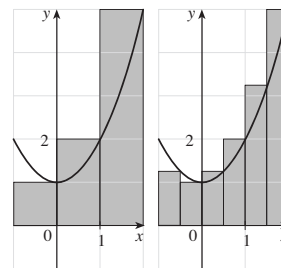
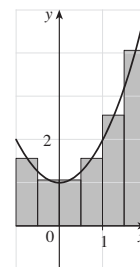
13. $(m/2, m^2/4)$ **15.** $a \leqslant e^{1/e}$

19. (a) $T_1 = D/c_1$, $T_2 = (2h \sec\theta)/c_1 + (D - 2h \operatorname{tg}\theta)/c_2$, $T_3 = \sqrt{4h^2 + D^2}/c_1$
(c) $c_1 \approx 3{,}85$ km/s, $c_2 \approx 7{,}66$ km/s, $h \approx 0{,}42$ km

23. $3/(\sqrt[3]{2} - 1) \approx 11\frac{1}{2}$ h

CAPÍTULO 5

EXERCÍCIOS 5.1 ■ PÁGINA 343

1. (a) 40, 52 (b) 43,2, 49,2

3. (a) 0,7908 subestimado (b) 1,1835, superestimado

5. (a) 8, 6,875 (b) 5, 5,5375

(c) 5,75, 5,9375

(d) M_6

7. 0,2533, 0,2170, 0,2101, 0,2050; 0.2

9. (a) À esquerda: 0,8100, 0,7937, 0,7904; à direita: 0,7600, 0,7770, 0,7804

11. 10,55 m, 13,65 m **13.** 63,2 L, 70 L **15.** 39 m

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt[4]{1 + 15i/n} \cdot (15/n)$ **19.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i\pi}{2n} \cos \frac{i\pi}{2n}\right) \frac{\pi}{2n}$

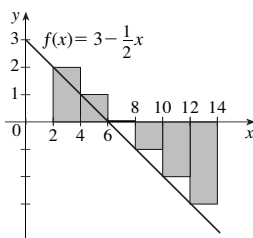
21. A região sob o gráfico de $y = \operatorname{tg} x$ de 0 a $\pi/4$

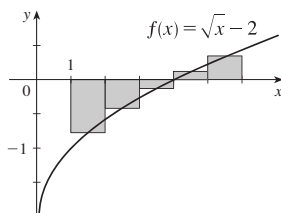
23. (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{64}{n^6} \sum_{i=1}^{n} i^5$ (b) $\frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}$ (c) $\frac{32}{3}$

25. sen b, 1

EXERCÍCIOS 5.2 ■ PÁGINA 354

1. -6

A soma de Riemann representa a soma das áreas dos dois retângulos acima do eixo x menos a soma das áreas dos três retângulos abaixo do eixo x; isto é, a área resultante dos retângulos com relação ao eixo x.

3. $-0{,}856759$

A soma de Riemann representa a soma das áreas dos dois retângulos acima do eixo x menos a soma das áreas dos três retângulos abaixo do eixo x.

5. (a)4 (b)6 (c)10 **7.** $-475, -85$ **9.** 124,1644

11. 0,3084 **13.** 0,30843908, 0,30981629, 0,31015563

15.

n	R_n
5	1,933766
10	1,983524
50	1,999342
100	1,999836

Os valores de R_n parecem se aproximar de 2.

17. $\int_2^6 x \ln(1 + x^2)\, dx$ **19.** $\int_1^8 \sqrt{2x + x^2}\, dx$ **21.** 42

23. $\frac{4}{3}$ **25.** 3,75 **29.** $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{2 + 4i/n}{1 + (2 + 4i/n)^5} \cdot \dfrac{4}{n}$

31. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{sen}\dfrac{5\pi i}{n}\right)\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{2}{5}$

33. (a) 4 (b) 10 (c) -3 (d) 2 **35.** 10

37. $3 + \frac{9}{4}\pi$ **39.** 2,5 **41.** 0 **43.** 3 **45.** $e^5 - e^3$

47. $\int_{-1}^{5} f(x)\, dx$ **49.** 122

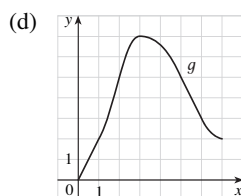
51. $2m \leqslant \int_0^2 f(x)\, dx \leqslant 2M$ pela Propriedade 8 da Comparação

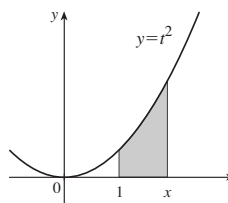
55. $3 \leqslant \int_1^4 \sqrt{x}\, dx \leqslant 6$ **57.** $\dfrac{\pi}{12} \leqslant \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\, dx \leqslant \dfrac{\pi}{12}\sqrt{3}$

59. $0 \leqslant \int_0^2 xe^{-x}\, dx \leqslant 2/e$ **69.** $\int_0^1 x^4\, dx$ **71.** $\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS 5.3 ■ PÁGINA 364

1. Um processo desfaz o que o outro faz. Veja o Teorema Fundamental do Cálculo, na página 363.

3. (a) 0, 2, 5, 7, 3
(b) (0, 3)
(c) $x = 3$
(d)

5.

(a), (b) x^2

7. $g'(x) = 1/(x^3 + 1)$

9. $g'(y) = y^2 \operatorname{sen} y$ **11.** $F'(x) = -\sqrt{1 + \sec x}$

13. $h'(x) = -\dfrac{\operatorname{arctg}(1/x)}{x^2}$ **15.** $y' = \sqrt{\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg} x}}\, \sec^2 x$

17. $y' = \dfrac{3(1 - 3x)^3}{1 + (1 - 3x)^2}$ **19.** $\frac{3}{4}$ **21.** 63

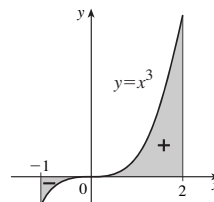
23. $\frac{16}{3}$ **25.** $\frac{7}{8}$ **27.** $\frac{156}{7}$ **29.** $\frac{40}{3}$ **31.** 1 **33.** $\frac{49}{3}$

35. ln 3 **37.** π **39.** $e^2 - 1$ **41.** 0

43. A função $f(x) = x^{-4}$ não é contínua no intervalo $[-2, 1]$, de modo que o TFC2 não pode ser aplicado.

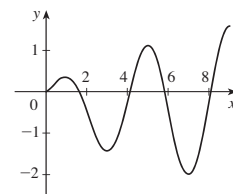
45. A função $f(\theta) = \sec\theta \operatorname{tg}\theta$ não é contínua no intervalo $[\pi/3, \pi]$, de modo que o TFC2 não pode ser aplicado.

47. $\frac{243}{4}$ **49.** 2

51. 3,75

53. $g'(x) = \dfrac{-2(4x^2 - 1)}{4x^2 + 1} + \dfrac{3(9x^2 - 1)}{9x^2 + 1}$

55. $y' = 3x^{7/2} \operatorname{sen}(x^3) - \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt[4]{x}}$ **57.** $\sqrt{257}$ **59.** 29

61. (a) $-2\sqrt{n}, \sqrt{4n - 2}$, n um inteiro > 0
(b) $(0, 1), (-\sqrt{4n - 1}, -\sqrt{4n - 3})$, e $(\sqrt{4n - 1}, \sqrt{4n + 1})$, n um inteiro > 0 (c) 0,74

63. (a) Máx. loc. em 1 e 5; mín. loc. em 3 e 7
(b) $x = 9$
(c) $(\frac{1}{2}, 2), (4, 6), (8, 9)$
(d) Ver o gráfico à direita.

65. $\frac{1}{4}$ **73.** $f(x) = x^{3/2}, a = 9$

75. (b) Gasto médio em $[0, t]$; minimiza o gasto médio

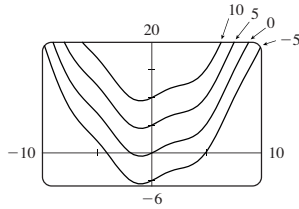
EXERCÍCIOS 5.4 ■ PÁGINA 372

5. $\frac{1}{3}x^3 - (1/x) + C$ **7.** $\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + x + C$

9. $2t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + C$ **11.** $\frac{1}{3}x^3 - 4\sqrt{x} + C$

13. $-\cos x + \cosh x + C$ **15.** $\frac{1}{2}\theta^2 + \operatorname{cossec}\theta + C$

17. $\operatorname{tg}\alpha + C$

19. $\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}x^2 + C$

21. 18 **23.** $-2 + 1/e$ **25.** 52

27. $\frac{256}{15}$ **29.** $-\frac{63}{4}$ **31.** $\frac{55}{63}$ **33.** $2\sqrt{5}$ **35.** 8

37. $1 + \pi/4$ **39.** $\frac{256}{5}$ **41.** $\pi/6$ **43.** $-3{,}5$

45. 0, 1,32; 0,84 **47.** $\frac{4}{3}$

49. O aumento no peso da criança (em quilogramas) entre as idades de 5 e 10 anos

51. Número de litros de petróleo que vazou nas primeiras 2 horas

53. Aumento na receita quando a produção aumenta de 1 000 para 5 000 unidades

55. Newton-metros (ou joules) **57.** (a) $-\frac{3}{2}$ m (b) $\frac{41}{6}$ m

59. (a) $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 5$ m/s (b) $416\frac{2}{3}$ m

61. $46\frac{2}{3}$ kg **63.** 2,2 km **65.** \$58 000

67. (b) No máximo 40%; $\frac{5}{36}$

EXERCÍCIOS 5.5 ■ PÁGINA 381

1. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$ **3.** $\frac{2}{9}(x^3 + 1)^{3/2} + C$ **5.** $-1/(1 + 2x)^2 + C$

7. $-\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$ **9.** $\frac{1}{63}(3x - 2)^{21} + C$

11. $\frac{1}{3}(2x + x^2)^{3/2} + C$ **13.** $-\frac{1}{3}\ln|5 - 3x| + C$

15. $-(1/\pi)\cos \pi t + C$ **17.** $\frac{2}{3}\sqrt{3ax + bx^3} + C$

19. $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$ **21.** $2\operatorname{sen}\sqrt{t} + C$

23. $\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7\theta + C$ **25.** $\frac{2}{3}(1 + e^x)^{3/2} + C$

27. $\frac{1}{2}(1 + z^3)^{2/3} + C$ **29.** $e^{\operatorname{tg} x} + C$

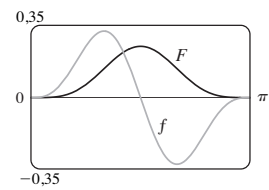
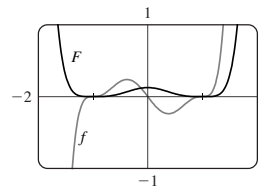
31. $-1/(\operatorname{sen} x) + C$ **33.** $-\frac{2}{3}(\operatorname{cotg} x)^{3/2} + C$

35. $-\ln(1 + \cos^2 x) + C$ **37.** $\ln|\operatorname{sen} x| + C$

39. $\frac{1}{3}\sec^3 x + C$ **41.** $\ln|\operatorname{sen}^{-1} x| + C$

43. $\operatorname{tg}^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

45. $\frac{4}{7}(x + 2)^{7/4} - \frac{8}{3}(x + 2)^{3/4} + C$

47. $\frac{1}{8}(x^2 - 1)^4 + C$ **49.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C$

51. 0 **53.** $\frac{182}{9}$ **55.** 4

57. 0 **59.** $e - \sqrt{e}$ **61.** 1 **63.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)a^3$

65. $\frac{16}{15}$ **67.** 2 **69.** $\ln(e + 1)$ **71.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$

73. 6π **75.** Todas as três áreas são iguais. **77.** $\approx$ 4 512 L

79. $\dfrac{5}{4\pi}\left(1 - \cos\dfrac{2\pi t}{5}\right)$L **81.** 5 **87.** $\pi^2/4$

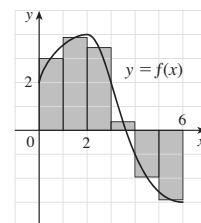
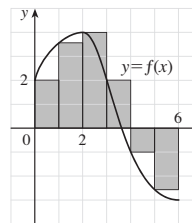
CAPÍTULO 5 REVISÃO ■ PÁGINA 384

Teste Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Verdadeiro

9. Verdadeiro **11.** Falso **13.** Falso **15.** Falso

Exercícios

1. (a) 8 (b) 5,7

3. $\frac{1}{2} + \pi/4$ **5.** 3 **7.** f é c, f' é b, $\int_0^x f(t)\,dt$ é a

9. 37 **11.** $\frac{9}{10}$ **13.** -76 **15.** $\frac{21}{4}$ **17.** Não existe

19. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 1$ **21.** 0 **23.** $-(1/x) - 2\ln|x| + x + C$

25. $\sqrt{x^2 + 4x} + C$ **27.** $[1/(2\pi)]\operatorname{sen}^2 \pi t + C$

29. $2e^{\sqrt{x}} + C$ **31.** $\frac{1}{2}[\ln(\cos x)]^2 + C$

33. $\frac{1}{4}\ln(1 + x^4) + C$ **35.** $\ln|1 + \sec\theta| + C$ **37.** $\frac{23}{3}$

39. $2\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} + C$ **41.** $\frac{64}{5}$ **43.** $F'(x) = x^2/(1 + x^3)$

45. $g'(x) = 4x^3\cos(x^8)$ **47.** $y' = (2e^x - e^{\sqrt{x}})/(2x)$

49. $4 \leqslant \int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx \leqslant 4\sqrt{3}$ **55.** 0,280981

57. Número de barris de petróleo consumidos de 1 de janeiro de 2000 até 1 de janeiro de 2008

59. 72 400 **61.** 3 **63.** $c \approx 1{,}62$

65. $f(x) = e^{2x}(1 + 2x)/(1 - e^{-x})$ **71.** $\frac{2}{3}$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 388

1. $\pi/2$ **3.** $f(x) = \frac{1}{2}x$ **5.** -1 **7.** e^{-2} **9.** $[-1, 2]$

11. (a) $\frac{1}{2}(n - 1)n$ (b) $\frac{1}{2}[\![b]\!](2b - [\![b]\!] - 1) - \frac{1}{2}[\![a]\!](2a - [\![a]\!] - 1)$

17. $2(\sqrt{2} - 1)$

CAPÍTULO 6

EXERCÍCIOS 6.1 ■ PÁGINA 395

1. $\frac{32}{3}$ **3.** $e - (1/e) + \frac{10}{3}$ **5.** 19,5 **7.** $\frac{1}{6}$ **9.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$

11. $\frac{1}{3}$ **13.** 72 **15.** $2 - 2\ln 2$ **17.** $\frac{59}{12}$ **19.** $\frac{32}{3}$

21. $\frac{8}{3}$ **23.** $\frac{1}{2}$ **25.** $\pi - \frac{2}{3}$ **27.** $\ln 2$ **29.** 6,5

31. $\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$ **33.** 0,6407 **35.** 0, 0,90; 0,04 **37.** 8,38

39. $12\sqrt{6} - 9$ **41.** 36 m **43.** 4 232 cm^2

45. (a) Carro A (b) A distância que A está à frente de B depois de 1 minuto (c) Carro A (d) $t \approx 2{,}2$ min

47. $\frac{24}{5}\sqrt{3}$ **49.** $4^{2/3}$ **51.** ± 6

53. $0 < m < 1$; $m - \ln m - 1$

EXERCÍCIOS 6.2 ■ PÁGINA 405

1. $19\pi/12$

3. $\pi/2$

5. 162π

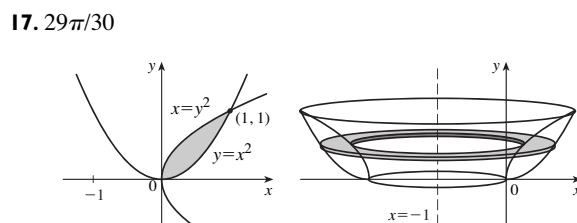
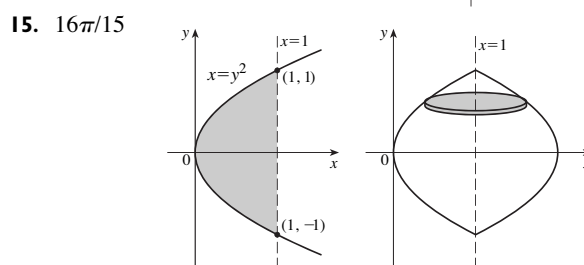
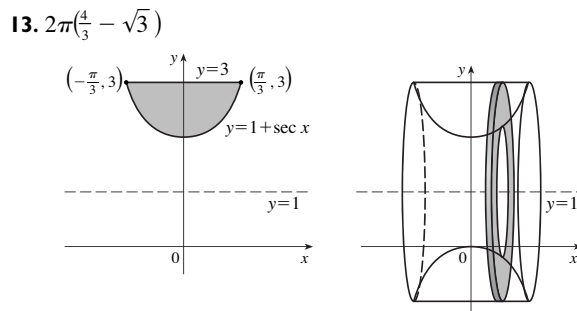
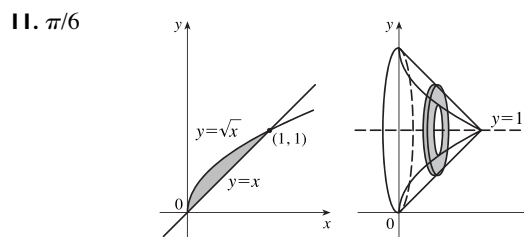
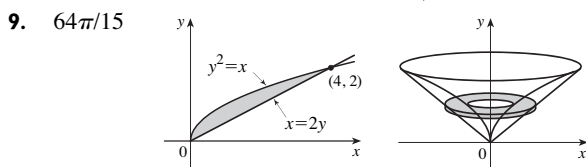
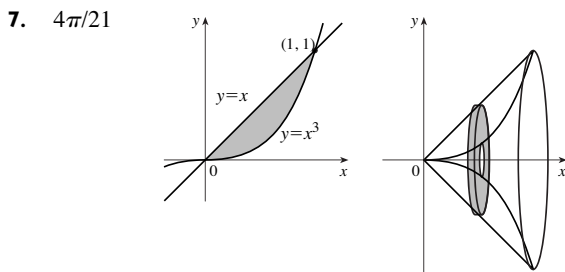
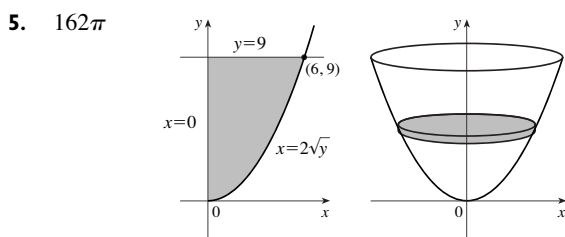
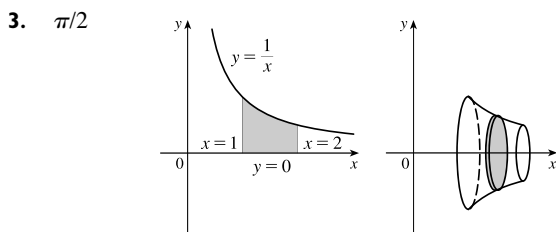
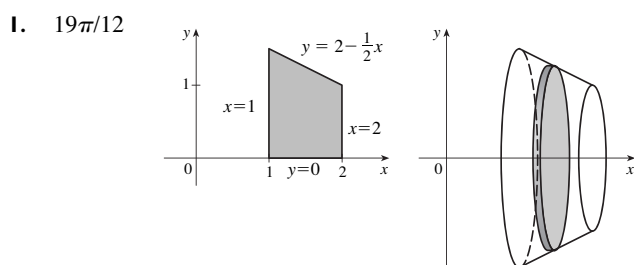
7. $4\pi/21$

9. $64\pi/15$

11. $\pi/6$

13. $2\pi\left(\frac{4}{3} - \sqrt{3}\right)$

15. $16\pi/15$

17. $29\pi/30$

19. $\pi/7$ **21.** $\pi/10$ **23.** $\pi/2$ **25.** $7\pi/15$

27. $5\pi/14$ **29.** $13\pi/30$ **31.** $\pi\int_0^{\pi/4}(1 - \text{tg}^3 x)^2\,dx$

33. $\pi\int_0^{\pi}[1^2 - (1 - \text{sen}\,x)^2]\,dx$

35. $\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left[5^2 - \left(\sqrt{1 + y^2} + 2\right)^2\right]dy$

37. $-1{,}288$, $0{,}884$; $23{,}780$ **39.** $\frac{11}{8}\pi^2$

41. Sólido obtido pela rotação da região $0 \leqslant y \leqslant \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ em torno do eixo x

43. Sólido obtido pela rotação da região acima do eixo x limitada por $x = y^2$ e $x = y^4$ em torno do eixo y

45. 1 110 cm^3 **47.** (a) 196 (b) 838 **49.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

51. $\pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right)$ **53.** $\frac{2}{3}b^2 h$ **55.** 10 cm^3 **57.** 24

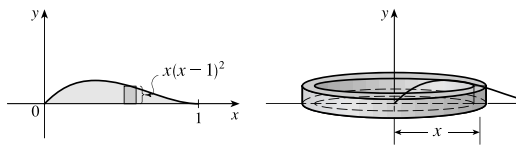
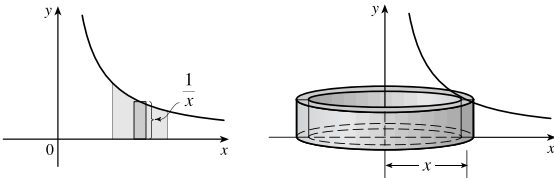
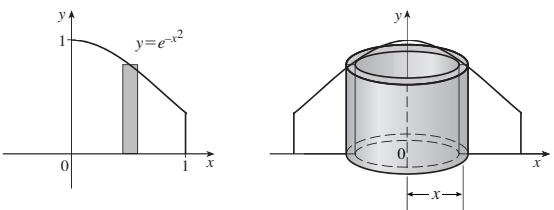
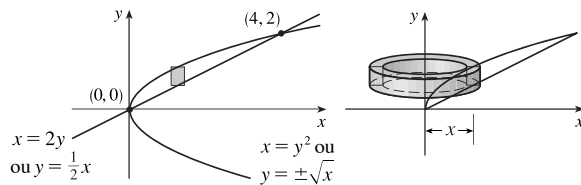
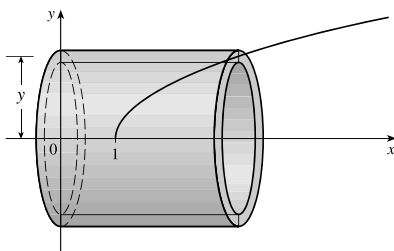
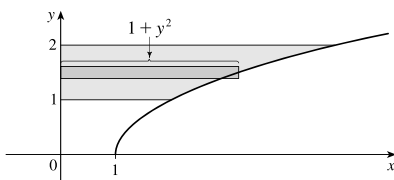
59. $\frac{1}{3}$ **61.** $\frac{8}{15}$

63. (a) $8\pi R\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\,dy$ (b) $2\pi^2 r^2 R$

65. $\pi r^2 h$ **67.** $\frac{5}{12}\pi r^3$ **69.** $8\int_0^r \sqrt{R^2 - y^2}\sqrt{r^2 - y^2}\,dy$

EXERCÍCIOS 6.3 ■ PÁGINA 410

1. Circunferência = $2\pi x$, altura = $x(x-1)^2$; $\pi/15$

3. 2π

5. $\pi(1-1/e)$

7. $\frac{64}{15}\pi$

9. $21\pi/2$

11. $768\pi/7$ **13.** $16\pi/3$ **15.** $17\pi/6$ **17.** $8\pi/3$

19. $5\pi/14$ **21.** $\int_1^2 2\pi x \ln x\, dx$

23. $\int_0^1 2\pi(x+1)[\text{sen}(\pi x/2) - x^4]\, dx$

25. $\int_0^\pi 2\pi(4-y)\sqrt{\text{sen}\, y}\, dy$ **27.** 3,68

29. Sólido obtido pela rotação da região $0 \leqslant y \leqslant x^4$, $0 \leqslant x \leqslant 3$ em torno do eixo y

31. Sólido obtido pela rotação da região delimitada por (i) $x = 1 - y^2$, $x = 0$, and $y = 0$, ou (ii) $x = y^2$, $x = 1$, e $y = 0$ em torno da reta $y = 3$

33. 0,13 **35.** $\frac{1}{32}\pi^3$ **37.** 8π **39.** $2\pi(12 - 4\ln 4)$

41. $\frac{4}{3}\pi$ **43.** $\frac{4}{3}\pi r^3$ **45.** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

EXERCÍCIOS 6.4 ■ PÁGINA 415

1. 588 J **3.** 9 J **5.** 180 J **7.** $\frac{15}{4}$ pés-lb

9. (a) $\frac{25}{24} \approx 1{,}04$ J (b) 10,8 cm **11.** $W_2 = 3W_1$

13. (a) 625 pés-lb (b) $\frac{1\,875}{4}$ pés-lb **15.** 650 000 pés-lb

17. 3 857 J **19.** 2 450 J **21.** $\approx 1{,}06 \times 10^6$ J

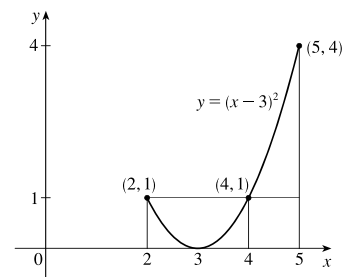
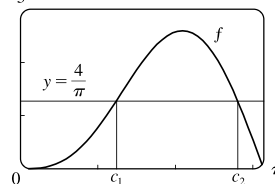
23. $\approx 1{,}04 \times 10^5$ pés-lb **25.** 2,0 m **29.** $Gm_1m_2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

EXERCÍCIOS 6.5 ■ PÁGINA 419

1. $\frac{8}{3}$ **3.** $\frac{45}{28}$ **5.** $\frac{1}{10}(1 - e^{-25})$ **7.** $2/(5\pi)$

9. (a) 1 (b) 2,4 (c)

11. (a) $4/\pi$ (b) $\approx 1{,}24$, 2,81

(c)

15. $38\frac{1}{3}$ **17.** $(20 + 12/\pi)$ºC $\approx$ 24ºC

19. 6 kg/m **21.** $5/(4\pi) \approx 0{,}4$ L

CAPÍTULO 6 REVISÃO ■ PÁGINA 421

Exercícios

1. $\frac{8}{3}$ **3.** $\frac{7}{12}$ **5.** $\frac{4}{3} + 4/\pi$ **7.** $64\pi/15$ **9.** $1\,656\pi/5$

11. $\frac{4}{3}\pi(2ah + h^2)^{3/2}$ **13.** $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\pi\,(\pi/2 - x)\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right) dx$

15. (a) $2\pi/15$ (b) $\pi/6$ (c) $8\pi/15$

17. (a) 0,38 (b) 0,87

19. Sólido obtido pela rotação da região $0 \leqslant y \leqslant \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ em torno do eixo y

21. Sólido obtido pela rotação da região $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2 - \text{sen}\, x$ em torno do eixo x

23. 36 **25.** $\frac{125}{3}\sqrt{3}$ m^3 **27.** 3,2 J

29. (a) $8\,000\pi/3 \approx 8\,378$ pés-lb (b) 2,1 pés **31.** $f(x)$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 423

1. (a) $f(t) = 3t^2$ (b) $f(x) = \sqrt{2x/\pi}$ **3.** $\frac{32}{27}$

5. (b) 0,2261 (c) 0,6736 m
(d) (i) $3/(119\pi) \approx 0{,}008$ cm/s (ii) $1\,664\pi/9$s $\approx 9{,}7$ min

9. $y = \frac{32}{9}x^2$

11. (a) $V = \int_0^h \pi[f(y)]^2\,dy$ (c) $f(y) = \sqrt{kA/(\pi C)}\;y^{1/4}$
Vantagem: as marcas no recipiente são igualmente espaçadas.

13. $b = 2a$ **15.** $B = 16A$

CAPÍTULO 7

EXERCÍCIOS 7.1 ■ PÁGINA 432

1. $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$ **3.** $\frac{1}{5}x \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$

5. $2(r-2)e^{r/2} + C$

7. $\frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\operatorname{sen} 3x + C$

9. $\frac{1}{2}(2x+1)\ln(2x+1) - x + C$

11. $t \operatorname{arctg} 4t - \frac{1}{8}\ln(1+16t^2) + C$

13. $\frac{1}{2}t \operatorname{tg} 2t - \frac{1}{4}\ln|\sec 2t| + C$

15. $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

17. $\frac{1}{13}e^{2\theta}(2\operatorname{sen} 3\theta - 3\cos 3\theta) + C$

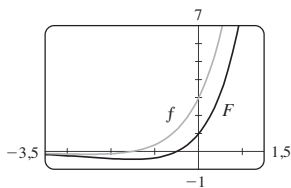
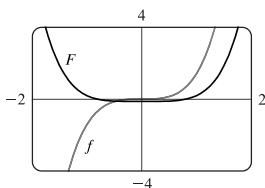
19. $\pi/3$ **21.** $1 - 1/e$ **23.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$ **25.** $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$

27. $\frac{1}{6}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$ **29.** $\operatorname{sen} x(\ln \operatorname{sen} x - 1) + C$

31. $\frac{32}{5}(\ln 2)^2 - \frac{64}{25}\ln 2 + \frac{62}{125}$

33. $2\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$ **35.** $-\frac{1}{2} - \pi/4$

37. $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C$

39. $(2x+1)e^x + C$

41. $\frac{1}{3}x^2(1+x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1+x^2)^{5/2} + C$

43. (b) $-\frac{1}{4}\cos x \operatorname{sen}^3 x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\operatorname{sen} 2x + C$

45. (b) $\frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ **51.** $x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$

53. $\frac{25}{4} - \frac{75}{4}e^{-2}$ **55.** 1,0475, 2,8731; 2,1828 **57.** $4 - 8/\pi$

59. $2\pi e$ **61.** $\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{13}{9}$ **63.** $2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$ m

65. 2

EXERCÍCIOS 7.2 ■ PÁGINA 439

1. $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ **3.** $-\frac{11}{384}$

5. $\dfrac{1}{3\pi}\operatorname{sen}^3(\pi x) - \dfrac{2}{5\pi}\operatorname{sen}^5(\pi x) + \dfrac{1}{7\pi}\operatorname{sen}^7(\pi x) + C$

7. $\pi/4$ **9.** $\frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4t + C$

11. $\frac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C$

13. $\pi/16$ **15.** $\frac{2}{45}\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}\,(45 - 18\operatorname{sen}^2\alpha + 15\operatorname{sen}^4\alpha) + C$

17. $\frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$ **19.** $\ln|\operatorname{sen} x| + 2\operatorname{sen} x + C$

21. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$ **23.** $\operatorname{tg} x - x + C$

25. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 t + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{tg} t + C$ **27.** $\frac{117}{8}$

29. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$

31. $\frac{1}{4}\sec^4 x - \operatorname{tg}^2 x + \ln|\sec x| + C$

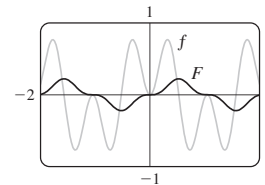
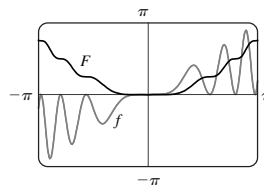
33. $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6\theta + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\theta + C$

35. $x\sec x - \ln|\sec x \;\operatorname{tg} x| + C$ **37.** $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$

39. $\frac{1}{3}\operatorname{cossec}^3\alpha - \frac{1}{5}\operatorname{cossec}^5\alpha + C$ **41.** $\ln|\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x| + C$

43. $-\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{26}\cos 13x + C$ **45.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{24}\operatorname{sen} 12\theta + C$

47. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C$ **49.** $\frac{1}{10}\operatorname{tg}^5(t^2) + C$

51. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2) + C$ **53.** $\frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{18}\operatorname{sen} 9x + C$

55. 0 **57.** 1 **59.** 0 **61.** $\pi^2/4$ **63.** $\pi\left(2\sqrt{2} - \frac{5}{2}\right)$

65. $s = (1 - \cos^3\omega t)/(3\omega)$

EXERCÍCIOS 7.3 ■ PÁGINA 445

1. $\sqrt{x^2-9}/(9x) + C$ **3.** $\frac{1}{3}(x^2-18)\sqrt{x^2+9} + C$

5. $\pi/24 + \sqrt{3}/8 - \frac{1}{4}$ **7.** $-\sqrt{25-x^2}/(25x) + C$

9. $\ln(\sqrt{x^2+16} + x) + C$ **11.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(2x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + C$

13. $\frac{1}{6}\sec^{-1}(x/3) - \sqrt{x^2-9}/(2x^2) + C$

15. $\frac{1}{16}\pi a^4$ **17.** $\sqrt{x^2-7} + C$

19. $\ln\left|(\sqrt{1+x^2} - 1)/x\right| + \sqrt{1+x^2} + C$ **21.** $\frac{9}{500}\pi$

23. $\frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}((x-2)/3) - \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{5+4x-x^2} + C$

25. $\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+x+1} + x + \frac{1}{2}\right) + C$

27. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\ln|x + 1 + \sqrt{x^2+2x}| + C$

29. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(x^2) + \frac{1}{4}x^2\sqrt{1-x^4} + C$

33. $\frac{1}{6}\left(\sqrt{48} - \sec^{-1}7\right)$ **37.** 0,81, 2; 2,10

41. $r\sqrt{R^2-r^2} + \pi r^2/2 - R^2 \operatorname{arcsen}(r/R)$ **43.** $2\pi^2 Rr^2$

EXERCÍCIOS 7.4 ■ PÁGINA 454

1. (a) $\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{3x+1}$ (b) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$

3. (a) $\dfrac{A}{x+4}+\dfrac{B}{x-1}$ (b) $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

5. (a) $1+\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

(b) $\dfrac{At+B}{t^2+1}+\dfrac{Ct+D}{t^2+4}+\dfrac{Et+F}{(t^2+4)^2}$

7. $\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|+C$

9. $2\ln|x+5|-\ln|x-2|+C$ **11.** $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

13. $a\ln|x-b|+C$ **15.** $\frac{7}{6}+\ln\frac{2}{3}$

17. $\frac{27}{5}\ln 2-\frac{9}{5}\ln 3$ (or $\frac{9}{5}\ln\frac{8}{3}$)

19. $-\dfrac{1}{36}\ln|x+5|+\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{1}{36}\ln|x-1|+C$

21. $\frac{1}{2}x^2-2\ln(x^2+4)+2\,\mathrm{tg}^{-1}(x/2)+C$

23. $2\ln|x|+(1/x)+3\ln|x+2|+C$

25. $\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\mathrm{tg}^{-1}(x/3)+C$

27. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+(1/\sqrt{2})\,\mathrm{tg}^{-1}(x/\sqrt{2})+C$

29. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\frac{3}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+C$

31. $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

33. $\frac{1}{3}\ln\frac{17}{2}$ **35.** $(1/x)+\frac{1}{2}\ln|(x-1)/(x+1)|+C$

37. $\frac{7}{8}\sqrt{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{3x-8}{4(x^2-4x+6)}+C$

39. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$

41. $2+\ln\frac{25}{9}$ **43.** $\frac{3}{10}(x^2+1)^{5/3}-\frac{3}{4}(x^2+1)^{2/3}+C$

45. $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$

47. $\ln\left[\dfrac{(e^x+2)^2}{e^x+1}\right]+C$

49. $\ln|\mathrm{tg}\,t+1|-\ln|\mathrm{tg}\,t+2|+C$

51. $(x-\frac{1}{2})\ln(x^2-x+2)-2x+\sqrt{7}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)+C$

53. $-\frac{1}{2}\ln 3\approx-0{,}55$

55. $\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+C$ **59.** $\frac{1}{5}\ln\left|\dfrac{2\,\mathrm{tg}(x/2)-1}{\mathrm{tg}(x/2)+2}\right|+C$

61. $4\ln\frac{2}{3}+2$ **63.** $-1+\frac{11}{3}\ln 2$

65. $t=-\ln P-\frac{1}{9}\ln(0{,}9P+900)+C$, where $C\approx 10{,}23$

67. (a) $\dfrac{24\,110}{4\,879}\dfrac{1}{5x+2}-\dfrac{668}{323}\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{9\,438}{80\,155}\dfrac{1}{3x-7}+\dfrac{1}{260\,015}\dfrac{22\,098x+48\,935}{x^2+x+5}$

(b) $\dfrac{4\,822}{4\,879}\ln|5x+2|-\dfrac{334}{323}\ln|2x+1|-\dfrac{3\,146}{80\,155}\ln|3x-7|+\dfrac{11\,049}{260\,015}\ln(x^2+x+5)+\dfrac{75\,772}{260\,015\sqrt{19}}\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{19}}+C$

O SCA omite o sinal de valor absoluto e a constante de integração.

EXERCÍCIOS 7.5 ■ PÁGINA 461

1. $\mathrm{sen}\,x+\frac{1}{3}\mathrm{sen}^3x+C$

3. $\mathrm{tg}^{-1}(\mathrm{sen}\,x)+C$

5. $4-\ln 9$ **7.** $e^{\pi/4}-e^{-\pi/4}$

9. $\frac{243}{5}\ln 3-\frac{242}{25}$ **11.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\mathrm{tg}^{-1}(x-2)+C$

13. $\frac{1}{8}\cos^8\theta-\frac{1}{6}\cos^6\theta+C$ (ou $\frac{1}{4}\mathrm{sen}^4\theta-\frac{1}{3}\mathrm{sen}^6\theta+\frac{1}{8}\mathrm{sen}^8\theta+C$)

15. $x/\sqrt{1-x^2}+C$

17. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}\,x\cos x+\frac{1}{4}\mathrm{sen}^2x+C$
(ou $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\,\mathrm{sen}\,2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$)

19. $e^{e^x}+C$ **21.** $(x+1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

23. $\frac{4097}{45}$ **25.** $3x+\frac{23}{3}\ln|x-4|-\frac{5}{3}\ln|x+2|+C$

27. $x-\ln(1+e^x)+C$ **29.** $15+7\ln\frac{2}{7}$

31. $\mathrm{sen}^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+C$

33. $2\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+\dfrac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+C$

35. 0 **37.** $\pi/8-\frac{1}{4}$ **39.** $\ln|\sec\theta-1|-\ln|\sec\theta|+C$

41. $\theta\,\mathrm{tg}\,\theta-\frac{1}{2}\theta^2-\ln|\sec\theta|+C$ **43.** $\frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2}+C$

45. $-\frac{1}{3}(x^3+1)e^{-x^3}+C$

47. $\ln|x-1|-3(x-1)^{-1}-\frac{3}{2}(x-1)^{-2}-\frac{1}{3}(x-1)^{-3}+C$

49. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{\sqrt{4x+1}+1}\right|+C$ **51.** $-\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+1}{2x}\right|+C$

53. $\dfrac{1}{m}x^2\cosh(mx)-\dfrac{2}{m^2}x\,\mathrm{senh}(mx)+\dfrac{2}{m^3}\cosh(mx)+C$

55. $2\ln\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$

57. $\frac{3}{7}(x+c)^{7/3}-\frac{3}{4}c(x+c)^{4/3}+C$

59. $\mathrm{sen}(\mathrm{sen}\,x)-\frac{1}{3}\mathrm{sen}^3(\mathrm{sen}\,x)+C$ **61.** $2(x-2\sqrt{x}+2)e^{\sqrt{x}}+C$

63. $-\mathrm{tg}^{-1}(\cos^2x)+C$ **65.** $\frac{2}{3}[(x+1)^{3/2}-x^{3/2}]+C$

67. $\sqrt{2}-2/\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})-\ln(1+\sqrt{2})$

69. $e^x - \ln(1 + e^x) + C$

71. $-\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}(\text{arcsen } x)^2 + C$

73. $\frac{1}{8}\ln|x - 2| - \frac{1}{16}\ln(x^2 + 4) - \frac{1}{8}\text{tg}^{-1}(x/2) + C$

75. $2(x - 2)\sqrt{1 + e^x} + 2\ln\dfrac{\sqrt{1 + e^x} + 1}{\sqrt{1 + e^x} - 1} + C$

77. $\frac{2}{3}\text{tg}^{-1}(x^{3/2}) + C$

79. $\frac{1}{3}x\,\text{sen}^3 x + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{9}\cos^3 x + C$ **81.** $xe^{x^2} + C$

EXERCÍCIOS 7.6 ■ PÁGINA 466

1. $(-1/x)\sqrt{7 - 2x^2} - \sqrt{2}\,\text{sen}^{-1}(\sqrt{2}x/\sqrt{7}) + C$

3. $\dfrac{1}{2\pi}\sec(\pi x)\,\text{tg}(\pi x) + \dfrac{1}{2\pi}\ln|\sec(\pi x) + \text{tg}(\pi x)| + C$

5. $\pi/4$ **7.** $\dfrac{1}{2\pi}\text{tg}^2(\pi x) + \dfrac{1}{\pi}\ln|\cos(\pi x)| + C$

9. $\frac{1}{2}[x^2\,\text{sen}^{-1}(x^2) + \sqrt{1 - x^4}] + C$ **11.** $e - 2$

13. $-\frac{1}{2}\text{tg}^2(1/z) - \ln|\cos(1/z)| + C$

15. $\frac{1}{2}(e^{2x} + 1)\,\text{arctg}(e^x) + \frac{1}{2}e^x + C$

17. $\dfrac{2y - 1}{8}\sqrt{6 + 4y - 4y^2} + \frac{7}{8}\,\text{sen}^{-1}\left(\dfrac{2y - 1}{\sqrt{7}}\right)$
$-\frac{1}{12}(6 + 4y - 4y^2)^{3/2} + C$

19. $\frac{1}{9}\text{sen}^3 x\,[3\ln(\text{sen } x) - 1] + C$

21. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{e^x + \sqrt{3}}{e^x - \sqrt{3}}\right| + C$

23. $\frac{1}{4}\text{tg } x \sec^3 x + \frac{3}{8}\text{tg } x \sec x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

25. $\frac{1}{2}(\ln x)\sqrt{4 + (\ln x)^2} + 2\ln\left[\ln x + \sqrt{4 + (\ln x)^2}\right] + C$

27. $\sqrt{e^{2x} - 1} - \cos^{-1}(e^{-x}) + C$

29. $\frac{1}{5}\ln|x^5 + \sqrt{x^{10} - 2}| + C$ **31.** $2\pi^2$

35. $\frac{1}{3}\text{tg } x \sec^2 x + \frac{2}{3}\text{tg } x + C$

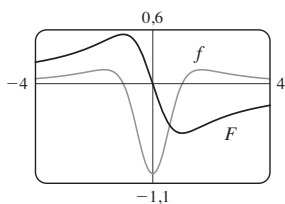
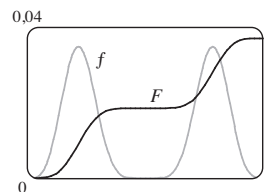
37. $-\frac{1}{5}\text{sen}^2 x \cos^3 x - \frac{2}{15}\cos^3 x + C$

39. $\frac{1}{10}(1 + 2x)^{5/2} - \frac{1}{6}(1 + 2x)^{3/2} + C$

41. $-\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\text{tg}^2 x + \frac{1}{4}\text{tg}^4 x + C$

43. (a) $-\ln\left|\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right| + C$;

ambas têm domínio $(-1, 0) \cup (0, 1)$

45. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1)$;
máx. em -1, mín. em 1; PI em $-1{,}7$, 0, e 1,7

47. $F(x) = -\frac{1}{10}\text{sen}^3 x \cos^7 x - \frac{3}{80}\text{sen } x \cos^7 x + \frac{1}{160}\text{sen } x \cos^5 x$
$+ \frac{1}{128}\text{sen } x \cos^3 x + \frac{3}{256}\text{sen } x \cos x + \frac{3}{256}x$;
máx. em π, mín. em 0; PI em 0,7, $\pi/2$, e 2,5

EXERCÍCIOS 7.7 ■ PÁGINA 477

1. (a) $L_2 = 6$, $R_2 = 12$, $M_2 \approx 9{,}6$
(b) L_2 está subestimada, R_2 e M_2 estão superestimadas.
(c) $T_2 = 9 < I$ (d) $L_n < T_n < I < M_n < R_n$

3. (a) $T_4 \approx 0{,}895759$ (subestimado)
(b) $M_4 \approx 0{,}908907$ (superestimado)
$T_4 < I < M_4$

5. (a) 5,932957, $E_M \approx -0{,}063353$
(b) 5,869247, $E_S \approx 0{,}000357$

7. (a) 0,746211 (b) 0,747131 (c) 0,746825

9. (a) 0,146879 (b) 0,147391 (c) 0,147219

11. (a) 0,451948 (b) 0,451991 (c) 0,451976

13. (a) 4,513618 (b) 4,748256 (c) 4,675111

15. (a) −0,495333 (b) −0,543321 (c) −0,526123

17. (a) 1,064275 (b) 1,067416 (c) 1,074915

19. (a) $T_8 \approx 0{,}902333$, $M_8 \approx 0{,}905620$
(b) $|E_T| \leqslant 0{,}0078$, $|E_M| \leqslant 0{,}0039$
(c) $n = 71$ para T_n, $n = 50$ para M_n

21. (a) $T_{10} \approx 1{,}983524$, $E_T \approx 0{,}016476$;
$M_{10} \approx 2{,}008248$, $E_M \approx -0{,}008248$;
$S_{10} \approx 2{,}000110$, $E_S \approx -0{,}000110$
(b) $|E_T| \leqslant 0{,}025839$, $|E_M| \leqslant 0{,}012919$, $|E_S| \leqslant 0{,}000170$
(c) $n = 509$ para T_n, $n = 360$ para M_n, $n = 22$ para S_n

23. (a) 2,8 (b) 7,954926518 (c) 0,2894
(d) 7,954926521 (e) O erro real é muito menor.
(f) 10,9 (g) 7,953789422 (h) 0,0593
(i) O erro real é menor. (j) $n \geqslant 50$

25.

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0,742943	1,286599	1,014771	0,992621
10	0,867782	1,139610	1,003696	0,998152
20	0,932967	1,068881	1,000924	0,999538

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	0,257057	−0,286599	−0,014771	0,007379
10	0,132218	−0,139610	−0,003696	0,001848
20	0,067033	−0,068881	−0,000924	0,000462

As observações são as mesmas que as de depois do Exemplo 1.

27.

n	T_n	M_n	Sn
6	6,695473	6,252572	6,403292
12	6,474023	6,363008	6,400206

n	E_T	E_M	E_S
6	−0,295473	0,147428	−0,003292
12	−0,074023	0,036992	−0,000206

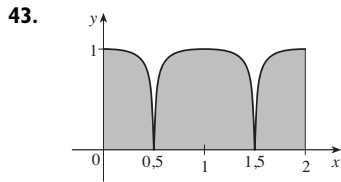
As observações são as mesmas que as de depois do Exemplo 1.

29. (a) 19,8 (b) 20,6 (c) $20,5\overline{3}$

31. (a) 23,44 (b) $0,341\overline{3}$ **33.** 18,8 m/s

35. $1{,}0337 \times 10^5$ megawatt-horas

37. 828 **39.** 6,0 **41.** 59,4

43.

EXERCÍCIOS 7.8 ■ PÁGINA 487

Abreviações: C, convergente; D, divergente

1. (a) Intervalo infinito (b) Descontinuidade infinita

(c) Descontinuidade infinita (d) Intervalo infinito

3. $\frac{1}{2} - 1/(2t^2)$; 0,495, 0,49995, 0,4999995; 0,5

5. $\frac{1}{12}$ **7.** D **9.** $2e^{-2}$ **11.** D **13.** 0 **15.** D

17. D **19.** $e^2/4$ **21.** D **23.** $\pi/9$

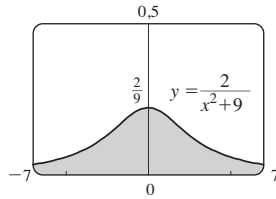
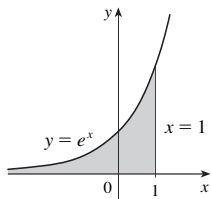
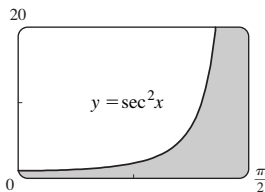
25. $\frac{1}{2}$ **27.** D **29.** $\frac{32}{3}$ **31.** D **33.** $\frac{75}{4}$

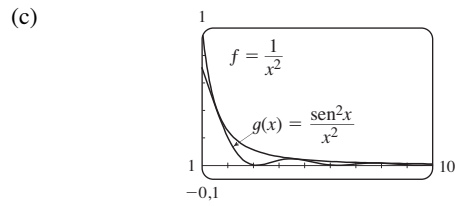
35. D **37.** $-2/e$ **39.** $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$

41. e **43.** $2\pi/3$

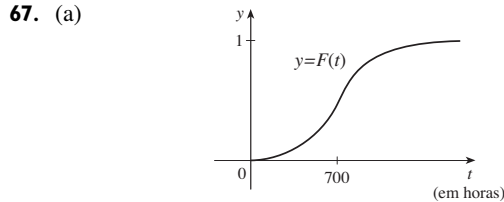
45. Área infinita

47. (a)

t	$\int_1^t [(\text{sen}^2 x)/x^2]\, dx$
2	0,447453
5	0,577101
10	0,621306
100	0,668479
1 000	0,672957
10 000	0,673407

Parece que a integral é convergente.

(c)

49. C **51.** D **53.** D **55.** π **57.** $p < 1$, $1/(1-p)$

59. $p > -1$, $-1/(p+1)^2$ **65.** $\sqrt{2GM/R}$

67. (a)

(b) A taxa na qual a fração $F(t)$ aumenta à medida que t aumenta

(c) 1; todas as lâmpada queimam eventualmente

69. 1 000

71. (a) $F(s) = 1/s$, $s > 0$ (b) $F(s) = 1/(s-1)$, $s > 1$

(c) $F(s) = 1/s^2$, $s > 0$

77. $C = 1$; ln 2 **79.** Não

CAPÍTULO 7 REVISÃO ■ PÁGINA 490

Teste Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Falso **7.** Falso

9. (a) Verdadeiro (b) Falso **11.** Falso **13.** Falso

Exercícios

1. $5 + 10 \ln \frac{2}{3}$ **3.** ln 2 **5.** $\frac{2}{15}$

7. $-\cos(\ln t) + C$ **9.** $\frac{64}{5} \ln 4 - \frac{124}{25}$

11. $\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$ **13.** $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C$

15. $-\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$

17. $x \sec x - \ln|\sec x + \text{tg}\, x| + C$

19. $\frac{1}{18}\ln(9x^2 + 6x + 5) + \frac{1}{9}\text{tg}^{-1}[\frac{1}{2}(3x+1)] + C$

21. $\ln|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x}| + C$

23. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}\right| + C$

25. $\frac{3}{2}\ln(x^2+1) - 3\,\text{tg}^{-1}x + \sqrt{2}\,\text{tg}^{-1}(x/\sqrt{2}) + C$

27. $\frac{2}{5}$ **29.** 0 **31.** $6 - \frac{3}{2}\pi$

33. $\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$

35. $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$ **37.** $\frac{1}{2}\text{sen}\, 2x - \frac{1}{8}\cos 4x + C$

39. $\frac{1}{8}e - \frac{1}{4}$ **41.** $\frac{1}{36}$ **43.** D

45. $4\ln 4 - 8$ **47.** $-\frac{4}{3}$ **49.** $\pi/4$

51. $(x+1)\ln(x^2+2x+2) + 2\,\text{arctg}(x+1) - 2x + C$

53. 0

55. $\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{4x^2-4x-3} - \ln|2x-1+\sqrt{4x^2-4x-3}| + C$

57. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\sqrt{4+\operatorname{sen}^2 x} + 2\ln(\operatorname{sen} x + \sqrt{4+\operatorname{sen}^2 x}) + C$

61. Não

63. (a) 1,925444 (b) 1,920915 (c) 1,922470

65. (a) 0,01348, $n \geqslant 368$ (b) 0,00674, $n \geqslant 260$

67. 13,7 km

69. (a) 3,8 (b) 1,7867, 0,000646 (c) $n \geqslant 30$

71. C **73.** 2 **75.** $\frac{3}{16}\pi^2$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 494

1. Há aproximadamente 4,77 cm do centro **3.** 0

7. $f(\pi) = -\pi/2$ **11.** $(b^b a^{-a})^{1/(b-a)} e^{-1}$

13. $2 - \operatorname{sen}^{-1}(2/\sqrt{5})$

CAPÍTULO 8

EXERCÍCIOS 8.1 ■ PÁGINA 502

1. $4\sqrt{5}$ **3.** $\int_0^1 \sqrt{1+9x^4}\,dx$ **5.** $\int_1^4 \sqrt{9y^4+6y^2+2}\,dy$

7. $\frac{2}{243}(82\sqrt{82}-1)$ **9.** $\frac{1\,261}{240}$ **11.** $\frac{32}{3}$

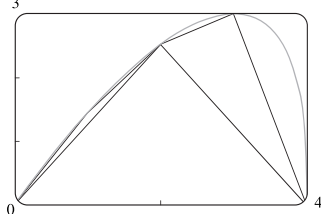
13. $\ln(\sqrt{2}+1)$ **15.** $\ln 3 - \frac{1}{2}$

17. $\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{1+e^2}-1) - 1 - \ln(\sqrt{2}-1)$

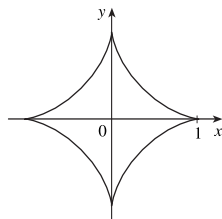
19. $\int_0^1 \sqrt{1+9x^4}\,dx$ **21.** $\frac{46}{3}$ **23.** 5,115840

25. 1,569619

27. (a), (b)

$L_1 = 4$, $L_2 \approx 6{,}43$, $L_4 \approx 7{,}50$

(c) $\int_0^4 \sqrt{1+[4(3-x)/(3(4-x)^{2/3})]^2}\,dx$ (d) 7,7988

29. $\sqrt{5} - \ln(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})) - \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$

31. 6

33. $s(x) = \frac{2}{27}[(1+9x)^{3/2} - 10\sqrt{10}]$ **35.** $2\sqrt{2}(\sqrt{1+x}-1)$

37. 209,1 m **39.** 62,55 cm **41.** 12,4

EXERCÍCIOS 8.2 ■ PÁGINA 508

1. (a) $\int_0^1 2\pi x^4\sqrt{1+16x^6}\,dx$ (b) $\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+16x^6}\,dx$

3. (a) $\int_0^1 2\pi \operatorname{tg}^{-1}x\sqrt{1+\frac{1}{(1+x^2)^2}}\,dx$

(b) $\int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\frac{1}{(1+x^2)^2}}\,dx$

5. $\frac{1}{27}\pi(145\sqrt{145}-1)$ **7.** $\frac{98}{3}\pi$

9. $\pi[1+\frac{1}{4}(e^2-e^{-2})]$ **11.** $\frac{21}{2}\pi$

13. $\frac{1}{27}\pi(145\sqrt{145}-10\sqrt{10})$ **15.** πa^2

17. 9,023754 **19.** 13,527296

21. $\frac{1}{4}\pi[4\ln(\sqrt{17}+4) - 4\ln(\sqrt{2}+1) - \sqrt{17} + 4\sqrt{2}]$

23. $\frac{1}{6}\pi[\ln(\sqrt{10}+3) + 3\sqrt{10}]$

27. (a) $\frac{1}{3}\pi a^2$ (b) $\frac{56}{45}\pi\sqrt{3}\,a^2$

29. (a) $2\pi\left[b^2 + \frac{a^2 b \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{a^2-b^2}/a)}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]$

(b) $2\pi\left[a^2 + \frac{ab^2 \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{b^2-a^2}/b)}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]$

31. $\int_a^b 2\pi[c - f(x)]\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ **33.** $4\pi^2 r^2$

EXERCÍCIOS 8.3 ■ PÁGINA 517

1. (a) 187,5 lb/pé^2 (b) 1 875 lb (c) 562,5 lb

3. 6 000 lb **5.** $6{,}7 \times 10^4$ N **7.** $9{,}8 \times 10^3$ N

9. $1{,}2 \times 10^4$ lb ^{2} **11.** $\frac{2}{3}\delta ah$ **13.** $5{,}27 \times 10^5$ N

15. (a) 314 N (b) 353 N

17. (a) $4{,}9 \times 10^4$ N (b) $\approx 4{,}4 \times 10^5$ N
(c) $\approx 4{,}2 \times 10^5$ N (d) $\approx 3{,}9 \times 10^6$ N

19. $2{,}5 \times 10^5$ N **21.** 230; $\frac{23}{7}$ **23.** 10; 1; $(\frac{1}{21}, \frac{10}{21})$

25. (0, 1,6) **27.** $\left(\frac{1}{e-1}, \frac{e+1}{4}\right)$ **29.** $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$

31. $\left(\frac{\pi\sqrt{2}-4}{4(\sqrt{2}-1)}, \frac{1}{4(\sqrt{2}-1)}\right)$ **33.** (2, 0)

35. 60; 160; $(\frac{8}{3}, 1)$ **37.** (0,781, 1,330) **41.** $(0, \frac{1}{12})$

45. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

EXERCÍCIOS 8.4 ■ PÁGINA 523

1. \$38 000 **3.** \$43 866 933,33 **5.** \$407,25

7. \$12 000 **9.** 3 727; \$37 753

11. $\frac{2}{3}(16\sqrt{2}-8) \approx$ \$9,75 milhões **13.** $\frac{(1-k)(b^{2-k}-a^{2-k})}{(2-k)(b^{1-k}-a^{1-k})}$

15. $1{,}19 \times 10^4$ cm^3/s

17. 6,60 L/min **19.** 5,77 L/min

EXERCÍCIOS 8.5 ■ PÁGINA 530

1. (a) A probabilidade de que um pneu escolhido aleatoriamente tenha uma duração entre 30 000 e 40 000 km
(b) A probabilidade de que um pneu escolhido aleatoriamente tenha uma duração de pelo menos 25 000 km

3. (a) $f(x) \geqslant 0$ para todo x e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
(b) $1 - \frac{3}{8}\sqrt{3} \approx 0{,}35$

5. (a) $1/\pi$ (b) $\frac{1}{2}$

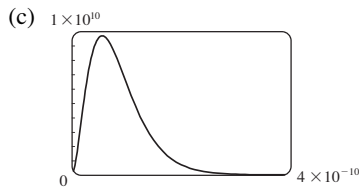
7. (a) $f(x) \geqslant 0$ para todo x e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (b) 5

11. (a) $e^{-4/2{,}5} \approx 0{,}20$ (b) $1 - e^{-2/2{,}5} \approx 0{,}55$
(c) Se você não for servido em 10 minutos, ganha um hambúrguer de graça.

13. $\approx 36\%$

15. (a) 0,0668 (b) $\approx 5{,}21\%$

17. $\approx 0{,}9545$

19. (b) 0; a_0 (c)

(d) $1 - 41e^{-8} \approx 0{,}986$ (e) $\frac{3}{2}a_0$

CAPÍTULO 8 REVISÃO ■ PÁGINA 532

Exercícios

1. $\frac{15}{2}$ **3.** (a) $\frac{21}{16}$ (b) $\frac{41}{10}\pi$ **5.** 3,292287 **7.** $\frac{124}{5}$

9. 6 533 N **11.** $(\frac{8}{5}, 1)$ **13.** $(2, \frac{2}{3})$ **15.** $2\pi^2$

17. \$7 166,67

19. (a) $f(x) \geqslant 0$ para todo x e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
(b) $\approx 0{,}3455$ (c) 5, sim

21. (a) $1 - e^{-3/8} \approx 0{,}31$ (b) $e^{-5/4} \approx 0{,}29$
(c) $8 \ln 2 \approx 5{,}55$ min

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 534

1. $\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

3. (a) $2\pi r(r \pm d)$ (b) $\approx 8{,}69 \times 10^6$ km^2
(d) $\approx 2{,}03 \times 10^8$ km^2

5. (a) $P(z) = P_0 + g\int_0^z \rho(x)\,dx$
(b) $(P_0 - \rho_0 gH)(\pi r^2) + \rho_0 gHe^{L/H}\int_{-r}^{r} e^{x/H} \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

7. Altura $\sqrt{2}b$, volume $(\frac{28}{27}\sqrt{6} - 2)\,\pi b^3$ **9.** 0,14 m

11. $2/\pi$, $1/\pi$

ÍNDICE REMISSIVO

D

VOLUME 1

TRADUÇÃO DA 6ª EDIÇÃO NORTE-AMERICANA

Cálculo foi escrito originalmente na forma de um curso. Sempre dando ênfase à compreensão dos conceitos, o autor inicia a obra oferecendo uma visão geral do assunto para, em seguida, apresentá-lo em detalhes, por meio da formulação de problemas, exercícios, tabelas e gráficos. A obra está dividida em dois volumes (Vol. 1– capítulos 1 a 8 e Vol. 2– capítulos 9 a 17).

Esta 6ª edição de *Cálculo* traz diversas inovações em relação à edição anterior. Algumas seções e capítulos foram reformulados, mais de 25% dos exercícios são novos e os exemplos tiveram seus dados modernizados. Em muitos deles, as unidades foram alteradas do sistema norte-americano para o Sistema Internacional de Unidades.

Revista e atualizada, a obra mantém o espírito das edições anteriores, apresentando exercícios graduados, com progressão cuidadosamente planejada dos conceitos básicos até problemas complexos e desafiadores. Os exemplos e exercícios agora têm uma perspectiva global, incluindo dados inspirados em países da Ásia e América Latina.

Aplicações:

Livro-texto para a disciplina Cálculo nos cursos de Matemática e Engenharia.

Para suas soluções de curso e aprendizado, visite **www.cengage.com.br**

ISBN 13 978-85-221-0968-5
ISBN 10 85-221-0968-0

9 788522 109680